ИЗПИТ

по Математически анализ, 18 юни 2012г.

Име:.. Фак.номер:........... Специалност:.....

1. Нека Δ е правоъгълник в равнината. Какво представлява едно подразделяне на Δ? Дефинирайте малка и голяма сума на Дарбу за ограничената функция $f:\Delta\to\mathbb{R}$. Дефинирайте риманов интеграл на f. Формулирайте поне едно необходимо и достатъчно условие за интегруемост.

2. Представете интеграла

$$\int\int_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(тук K е множеството $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le x\le 1,\ 0\le y,\ x^2+y^2\ge 2x,\ y\le 2x\}$, а $f:K\to\mathbb{R}$ е непрекъсната функция) като повторен веднъж с външно интегриране по x и веднъж с външно интегриране по y.

3. Изразете криволинейния интеграл от първи род $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$ чрез обикновен риманов интеграл, ако кривата Γ е зададена в полярни координати чрез уравнението $\rho=\rho(\varphi)$, където ρ е полярният радиус, φ е полярният ъгъл и φ се мени в интервала $[\varphi_1,\varphi_2]$. Използвайте полученото, за да пресметнете интеграла $\int_\Gamma(x-y)\mathrm{d}s$, където $\Gamma=\{x^2+y^2=x\}$, параметризирайки кривата Γ по подходящ начин.

4. Разгледайте функцията $f(x)=\cos(3\|x\|)\langle x,a\rangle$, където $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ и a е векторът $(4,5,3)$. Пресметнете $\mathbf{grad}f$. Каква е стойността на $\mathbf{rot}\,(\mathbf{grad}f)$ и защо?

5. Дайте дефиниция на това какво значи едно поле да е потенциално. Докажете, че ако непрекъснатото векторно поле е потенциално, то криволинейният интеграл от втори род не зависи от пътя, а само от крайните точки. Намерете потенциал за полето

$$F(x,y)=\left(e^x(x+\ln y+1)\ ,\ \frac{e^x}{y}\right)\ .$$

В каква област е дефинирано полето F? Едносвързана ли е тази област?

6. Напишете формулата на Грийн и достатъчни условия, при които тя е вярна. Докажете я за област, която е криволинеен трапец по двете променливи. Пресметнете криволинейния интеграл от втори род

$$\oint_C(-x^2y)\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y$$

където C е окръжността $\{(x,y):\ x^2+y^2=R^2\}$.

7. Напишете формулата за свеждане на повърхнинен интеграл от първи род към двоен риманов интеграл. Пресметнете лицето на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

където a и b са положителни параметри. **Упътване:** Използвайте обобщени сферични координати.