

ИЗПИТ

по Математически анализ и диференциална геометрия

март 2005г.

Име:..... Фак.номер:..... Адм.група:.....

1. Пресметнете:

(а) производната на $f(t) = \ln \|\alpha(t)\|$, където $\alpha(t)$ е гладка векторна функция на скаларния аргумент t , която не се анулира.

(б) производната на $g(\alpha) = \int_1^{\ln \alpha} e^{x^2 \alpha^2} dx$

2. Нека $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция на един аргумент и $Gr f \subset \mathbb{R}^2$ е нейната графика. Докажете, че $Gr f$ е пренебрежимо множество в равнината (т.е. има лице и то е нула).

3. Формулирайте принципа на Кавалиери. Използвайте го, за да изведете формулата за обем на ротационно тяло. Като нейно приложение изведете формулата за обем на прав кръгов конус с радиус на основата R и височина H .

4. Разгледайте хомогенна материална нишка с плътност 1, разположена по полуокръжност с радиус R (да мислим, че центърът ѝ е в началото на координатната система и тя е в горната полуравнина).

(а) Пресметнете координатите на центъра на тежестта на нишката.

(б) Каква е гравитационната сила, с която материалната нишка притегля материална точка с маса m_0 , разположена в началото на координатната система?

5. Да разгледаме гладкото векторно поле

$$F(x, y) = \left(\frac{e^x(x^2 + y^2 - 2x)}{(x^2 + y^2)^2}, -\frac{2ye^x}{(x^2 + y^2)^2} \right)$$

(а) В коя област в равнината е дефинирано това поле? Едносвързана ли е тази област?

(б) Потенциално ли е това поле? Ако отговорът Ви е "да", намерете потенциала.

(в) Формулирайте необходимо условие за независимост от пътя на криволинеен интеграл от втори род и някое достатъчно условие. Приложими ли са те в нашия конкретен случай?

(г) Колко е $\oint_{\Gamma} F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$, където $\Gamma = \{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1\}$?

6. Пресметнете лицето на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

където a и b са положителни параметри. **Упътване:** Използвайте обобщени сферични координати.