Глава 11
Диференциални уравнения

1. Основни понятия

Уравнения от вида

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0\,, \tag{1.1}$$

свързващо аргумента x, неизвестната функция $y(x)$ и нейните производни, се нарича обикновено диференциално уравнение.

Ред на диференциалното уравнение наричаме реда на най-високата производна, срещаща се в диференциалното уравнение.

Така например уравнението $y'' - 7y' + 12 = 0$ е от втори ред, $y^{\mathrm{IV}} = 0$ е от четвърти ред, а $y' - 2x = 0$ е от първи ред.

Уравнение (1.1) дава общия вид на диференциалното уравнение от n-ти ред.

Под *степен на диференциално* уравнение се разбира най-високият степенен показател на производната от най-висок ред.

Трябва да се прави разлика между степен и ред на диференциално уравнение. Така например уравнението $(y'')^3 = 2x$ е от втори ред, но от трета степен, а $y''^2 = (1 + y'^2)^3$ е от втори ред и от втора степен.

Решение или интеграл на диференциалното уравнение (1.1) наричаме такава функция $y = f(x)$, която заместена в уравнението (1.1) превръща същото в тъждество, т.е.

$$F(x, f(x), f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

Графиката на решението на диференциалното уравнение се нарича *интегрална крива*.

Докато при алгебричните уравнения знаем, че квадратното уравнение има две решения, кубичното три и т.н., то всяко диференциално уравнение почти винаги има неограничен брой решения (интеграли).

Процесът на търсене решенията се нарича интегриране на диференциалното уравнение. В общия случай, за да намерим решенията на уравнението (1.1) ще е необходимо да интегрираме последователно n-пъти и затова в този случай решението ще съдържа n-произволни независими константи.

Общо решение на диференциално уравнение от n-ти ред се нарича функцията

$$y = f(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)\,, \tag{1.2}$$

зависеща от x и n произволни независими константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и обръщаща това уравнение в тъждество.

Общото решение, зададено в неявен вид

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0, \tag{1.3}$$

се нарича общ интеграл.

Частно решение на диференциалното уравнение се нарича решението, което се получава от общото, когато на произволните константи $C_1, C_2, \ldots, C_n$ са зададени определени (конкретни) числови стойности, т.е. решение от вида $y = f(x, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0)$, където $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ са фиксирани числа.

Частен интеграл се нарича интегралът

$$\Phi(x, y, C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0) = 0\,,$$

където $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$ са определени числа.

На практика намирането на частното решение (интеграл) от общото става не като даваме на произволните константи конкретни числови стойности, а се изхожда от условия, наречени начални условия, които трябва да удовлетворяват исканото частно решение.

Особени решения или *особени интеграли* са тези, които не могат да се получат от общия интеграл.

Примери:

1. Общото решение на уравнението

$$y'' + y = 0$$

е $$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x .$$

Намерете частното решение при начални условия $y = 2$ и $y' = -1$ при $x = 0$.

Решение. От общото решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

намираме

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

Като имаме предвид, че съгласно началните условия за $x = 0$, $y = 2$, получаваме

$$2 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \text{ или } C_1 = 2.$$

Пак от началните условия $y' = -1$ при $x = 0$, намираме

$$-1 = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 \text{ или } C_2 = -1.$$

Като заместим така намерените числови стойности на C_1 и C_2 в общото решение, намираме търсен
частно решение

$$y = 2 \cos x - \sin x.$$

2. Покажете, че функцията $y = C_1 x + C_2 x^2$ се явява решение на диференциалното уравнение

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2y}{x^2} = 0 .$$

Решение. Намираме първата и втората производни на дадената функция:

$$y' = C_1 + 2C_2 x \, ; \; y'' = 2C_2 .$$

Заместваме изразите за y', y'' и y в даденото уравнение:

$$2C_2 - \frac{2}{x}(C_1 + 2C_2 x) + \frac{2(C_1 x + C_2 x^2)}{x^2} =$$

$$= 2C_2 - \frac{2}{x} C_1 - 4C_2 + \frac{2C_1}{x} + 2C_2 = 0 .$$

Тъй като получаваме тъждество, то дадената функция се явява решение на даденото диференциал
уравнение. Това решение е общо решение, защото съдържа две произволни независими константи C_1 и C

3. Проверете, че функцията $y = (2 + Cx)e^x$ удовлетворява уравнението $y'' - 2y' + y = 0$. Явва
ли се тази функция общо решение на диференциалното уравнение.

Решение. Намираме y' и y'' :

$$y' = Ce^x + (2 + Cx)e^x = (C + 2 + Cx)e^x \, ;$$

$$y'' = Ce^x + (C + 2 + Cx)e^x = (2C + 2 + Cx)e^x .$$

Заместваме y, y' и y'' в даденото уравнение:

$$(2C + 2 + Cx)e^x - 2(C + 2 + Cx)e^x + (2 + Cx)e^x =$$

$$= (2C + 2 + Cx - 2C - 4 - 2Cx + 2 + Cx).e^x = 0.e^x = 0 .$$

Тъй като се получава тъждество, то функцията $y = (2 + Cx)e^x$ е решение на даденото диференциал
уравнение. Това решение обаче не се явява общо, защото съдържа само една произволна констант
уравнението е от втори ред.

4. Проверете, че функцията $y = C_1 e^x + C_2 e^x + xe^x$ удовлетворява уравнението $y'' - 2y' + y =$
Явява ли се тази функция общо решение на диференциалното уравнение?

Решение. Намираме y' и y'' .

$$y' = C_1e^x + C_2e^x + e^x + xe^x \, ;$$

$$y'' = C_1e^x + C_2e^x + 2e^x + xe^x \, .$$

Заместваме y', y'' , y в даденото уравнение:

$$C_1e^x + C_2e^x + 2e^x + xe^x - 2\,(C_1e^x + C_2e^x + e^x + xe^x\,) +$$
$$+ C_1e^x + C_2e^x + xe^x = (C_1 + C_2 + 2 + x - 2C_1 - 2C_2 - 2 - 2x + C_1 + C_2 + x)e^x = 0 \, .$$

Дадената функция се явява решение на даденото диференциално уравнение, обаче това решение не е общо, а частно, тъй като то съдържа само една независима константа. Константите C_1 и C_2 в дадения случай не се явяват независими, защото доколкото сумата на две константи е пак константа, то може да се означи $C_1 + C_2 = C$. Тогава дадената функция (решение) може да се преобразува по следния начин:

$$y = C_1e^x + C_2e^x + xe^x = (C_1 + C_2 + x)e^x = (C + x)e^x$$

или

$$y = (C + x)e^x \, ,$$

т.е. решението съдържа една независима произволна константа, а уравнението е от втори ред.

5. Покажете, че функцията $\arcsin\dfrac{y}{x} = C - x$ се явява общо решение на диференциалното уравнение

$$xy' - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0 \, .$$

Решение. Диференцираме по x дадената неявна функция и получаваме:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{y^2}{x^2}}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = 1 \; ; \quad \frac{y'x - y}{x\sqrt{x^2 - y^2}} = -1 \; ;$$

$$y'x - y = -x\sqrt{x^2 - y^2} \, .$$

Заместваме последното в даденото уравнение и получаваме тъждество

$$-x\sqrt{x^2 - y^2} + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0 \, .$$

Следователно дадената функция е решение на диференциалното уравнение и при това общо, защото то съдържа една произволна константа, т.е. толкова, колкото е редът на уравнението.

Задачи:

Определете реда и степента на следните диференциални уравнения:

1. $xy'^2 - 1 = 0 \, .$

2. $y^{V} - y^{IV} - y = 0 \, .$

3. $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2y}{x^2} = 0 \, .$

4. $8\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 - \dfrac{12y}{x}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 27 = 0 \, .$

Проверете, че дадените функции се явяват решения на съответно дадените диференциални уравнения. Посочете какви са тези решения – частни или общи и защо?

5. $y = C_1x + C_2x^2 \, , \quad y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2y}{x^2} = 0 \, .$

6. $y = x\sqrt{1 - x^2} \, , \quad yy' = x - 2x^3 \, .$

7. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-5x} - \dfrac{x}{5} - \dfrac{3}{50} \, , \quad y'' + 3y'y' - 10y = 2x \, .$

8. $s'' + 9s = t + \frac{1}{2}, \quad s = 5\cos 3t + \frac{1}{9}t + \frac{1}{18}.$

9. $x^2 + 2xy = C, \ (x + y)\,dx + x\,dy = 0.$

10. $y^2 - x^2 - 2y = 0, \quad y'(x^2 + y^2) - 2xy = 0.$

11. $x = y\,e^{Cy+1}, \quad y' = \dfrac{y}{x(\ln x - \ln y)}.$

Отговори:

1. Първи ред, втора степен.
2. Пети ред, първа степен.
3. Втори ред, първа степен.
4. Първи ред, трета степен.
5. Общо.
6. Частно.
7. Общо.
8. Частно.
9. Общо.
10. Частно.
11. Общо.

2. Диференциални уравнения от първи ред

Диференциално уравнение от първи ред се нарича уравнение от вида:

(2.1) $\qquad F(x, y, y') = 0$

или $\qquad y' = f(x, y)$,

където y е неизвестната функция, x – независимата променлива. Всяко такова уравнение може да бъ записано във вида

(2.2) $\qquad M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$,

където $M(x,y)$ и $N(x,y)$ са непрекъснати функции на променливите x и y.

Общо решение на уравнението (2.1) се нарича функцията

(2.3) $\qquad y = f(x, C)$

от x и произволната константа C, която функцията го обръща в тъждество.

Общото решение, зададено в неявен вид

(2.4) $\qquad \Phi(x, y, C) = 0$,

се нарича общ интеграл.

Геометрически общото решение (общия интеграл) представлява фамилия интегрални крив равнината, зависеща от един параметър. Всяка крива от фамилията отговаря на една конкретна (фикси рана) стойност на константата C.

В следващите параграфи на настоящата глава ще дадем начини за решаване на различни вид диференциални уравнения от първи ред. Тук обаче ще спрем вниманието си върху общо и частно реше на диференциално уравнение от първи ред и геометричното им построяване.

Примери:

1. Проверете, че функцията $y = x^2 + C$ се явява решение на диференциалното уравнение $y' = 2$ Постройте фамилията от интегрални криви.

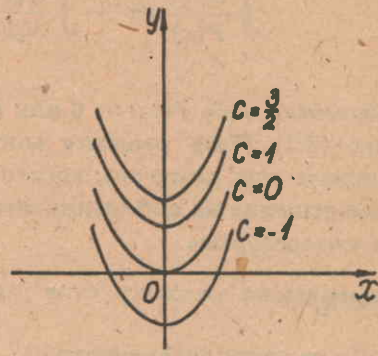
Решение. Намираме y':

$$y' = 2x.$$

Заместваме y' в даденото уравнение и получаваме тъждество

$$2x = 2x .$$

Следователно $y = x^2 + C$ е общото решение на даденото уравнение. Геометрически $y = x^2 + C$ представлява фамилия параболи в равнината. Някои от тези параболи при $C = 0$, $C = 1$, $C = -1$, $C = \frac{3}{2}$ са дадени на *черт. 11.1*.



Черт. 11.1

Задачи:

1. Общото решение на някакво диференциално уравнение от първи ред е $4x^2 + y^2 = C^2$. Намерете и постройте неговите интегрални криви (частни интеграли), минаващи през точките $M_1(-1,0)$, $M_2(0,-3)$ и $M_3(2,0)$.

2. Проверете, че общият интеграл на диференциалното уравнение $x + yy' = 0$ е $x^2 + y^2 = C$.
Постройте фамилията интегрални криви и отделете от тях тези, които минават през точките $M_1(1,1)$, $M_2(3,-4)$ и $M_3(0,1)$.

3. Даден е общият интеграл $x^2 - y^2 - Cx = 0$ на диференциалното уравнение $2xyy' = x^2 + y^2$. Намерете частните интеграли и ги постройте, ако: а) $C = 4$; б) $C = 6$; в) $C = 8$; г) $C = -10$.

Отговори:

1. Концентричните елипси $4x^2 + y^2 = 4$, $4x^2 + y^2 = 9$, $4x^2 + y^2 = 16$, осите на които съвпадат с координатните оси.

2. Концентричните окръжности $x^2 + y^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 + y^2 = 1$, центровете на които съвпадат с началото на координатната система.

3. а) $x^2 - y^2 - 4x = 0$ или $(x - 2)^2 - y^2 = 4$ – равнораменна хипербола, центърът на която се намира в точката $M(2,0)$;
б) $x^2 - y^2 - 6x = 0$; в) $x^2 - y^2 + 8x = 0$; г) $x^2 - y^2 + 10x = 0$.

3. Уравнения с отделящи се променливи

Диференциални уравнения от вида

$$M(x) \,.\, N(y)\, dx + P(x) \,.\, Q(y)\, dy = 0 , \tag{3.1}$$

където $M(x)$, $N(y)$, $P(x)$, $Q(y)$ са непрекъснати функции съответно на x и на y, се наричат диференциални уравнения с отделящи се променливи.

Като разделим двете страни на уравнение (3.1) на $P(x) \,.\, N(y)$, то променливите се отделят, т.е. всеки от членовете на уравнението зависи само от една променлива x или y:

$$\frac{M(x)}{P(x)}\, dx + \frac{Q(y)}{N(y)}\, dy = 0 . \tag{3.2}$$

Решението на диференциалното уравнение (3.1) ще получим, като интегрираме двете страни на уравнението (3.2), т.е.

$$\int \frac{M(x)}{P(x)}\,dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)}\,dy = C\,.$$

Забележка. Ако $P(x_0) = 0$ или $N(y_0) = 0$, то $x = x_0$ или $y = y_0$ също ще бъдат решения на даденото уравнение (3.1). Тези решения могат да бъдат изключени (изгубени) при процеса на отделяне на променливите или по-точно, когато се дели уравнението на произведението $P(x).N(y)$ и те спадат към особените решения на диференциалното уравнение. В бъдещите наши изследвания от такива решения ние не ще се интересуваме.

Примери:

1. Да се реши уравнението

$$x(y^2 + 1)\,dx + \sqrt{1 + x^2}\,dy = 0\,.$$

Решение. Това диференциално уравнение е от вида (3.1). Променливите в него ще отделим, като разделим двете му страни на $(y^2 + 1)\,.\,\sqrt{1 + x^2}$, след което получаваме

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} + \frac{dy}{y^2 + 1} = 0\,.$$

Интегрираме последното уравнение:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1 + x^2}} + \int \frac{dy}{y^2 + 1} = C$$

или общият интеграл на даденото уравнение е

$$\sqrt{1 + x^2} + \operatorname{arctg} y = C\,.$$

2. Решете уравнението

$$(x - 1)y' = 1 + y\,.$$

Решение. Известно е, че $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и следователно даденото уравнение може да запишем във вида

$$(x - 1)\,\frac{dy}{dx} = 1 + y\,.$$

Умножаваме двете страни на dx:

$$(x - 1)dy = (1 + y)dx.$$

Делим двете страни на $(1 - x).(1 + y)$ и намираме

$$\frac{dy}{1 + x} = \frac{dx}{x - 1}\,.$$

Интегрираме почленно и получаваме общото решение

$$\int \frac{dy}{1 + y} = \int \frac{dx}{x - 1}\,.$$

или $$\ln|1 + y| = \ln|x - 1| + \ln|C_1|\,.$$

Оттук последователно получаваме:

$$\ln|1 + y| = \ln|C_1(x - 1)|\,;\quad |1 + y| = |C_1(x - 1)|\,;$$

$$1 + y = \pm C_1(x - 1)\,;\quad 1 + y = C(x - 1)\,.$$

В последното равенство сме означили $C = \pm C_1$.
И така, окончателно получихме, че общото решение на даденото диференциално уравнение е
$y = C(x - 1) - 1$.

3. Решете уравнението

$$2\left(x\frac{dy}{dx}+y\right)=xy\frac{dy}{dx}.$$

Решение. Умножаваме двете страни на уравнението с dx:

$$2xdy+2ydx=xydy$$

или

$$2xdy+2ydx-xydy=0.$$

Групираме членовете, които съдържат един и същ диференциал, като изнасяме същевременно и общите множители от тези групи извън скоби:

$$(2-y)xdy+2ydx=0.$$

За да отделим променливите, делим на $x.y$ и получаваме

$$\frac{2-y}{y}dy+\frac{2}{x}dx=0.$$

Интегрираме:

$$\int\frac{2-y}{y}dy+\int\frac{2}{x}dx=C_1$$

или

$$2\int\frac{dy}{y}-\int dy+2\int\frac{dx}{x}=C_1;\quad 2\ln|y|-y+2\ln|x|=C_1.$$

Последното преобразуваме последователно както следва:

$$\ln y^2+\ln x^2=C_1+y;\quad \ln x^2y^2=C_1+y.$$

$$x^2y^2=e^{C_1+y};\quad x^2y^2=e^{C_1}e^y.$$

Накрая, означавайки $e^{C_1}=C$, намираме общия интеграл на даденото диференциално уравнение

$$x^2y^2=Ce^y.$$

4. Решете уравнението

$$\sin x.\cos y\,dx-\cos x.\sin y\,dy=0.$$

Решение. Отделянето на променливите ще получим като разделим двете части на уравнението на $\cos x.\cos y$:

$$\frac{\sin x}{\cos x}dx-\frac{\sin y}{\cos y}dy=0.$$

Интегрираме

$$\int\frac{\sin x}{\cos x}dx-\int\frac{\sin y}{\cos y}dy=\ln|C_1|$$

или

$$-\ln|\cos x|+\ln|\cos y|=\ln|C_1|;\quad \ln\left|\frac{\cos y}{\cos x}\right|=\ln|C_1|;$$

$$\frac{\cos y}{\cos x}=\pm C_1;\quad \cos y=C\cos x\quad(C=\pm C_1).$$

5. Да се намери общият и частният интеграл на уравнението

$$(1+e^x)y.y'=e^x$$

при начални условия $x=1$, $y=1$.

Решение. След отделянето на променливите даденото уравнение приема вида

$$y\,dy = \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx\,.$$

Като интегрираме, получаваме

$$\int y\,dy = \int \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx + C_1\,; \quad \frac{y^2}{2} = \ln(e^x + 1) + C_1$$

или общият интеграл е

$$y^2 = 2\ln(e^x + 1) + C \quad (C = 2C_1)\,.$$

Частният интеграл намираме, като намерим константата C от общия интеграл. За тази цел в общ интеграл заместваме началните условия $x = 1$ и $y = 1$:

$$1 = 2\ln(e + 1) + C \quad \text{или} \quad C = 1 - 2\ln(e + 1)\,.$$

Заместваме тази стойност на C в общия интеграл и намираме, че частният интеграл е

$$y^2 = 2\ln(e^x + 1) + 1 - 2\ln(e + 1)$$

или

$$y^2 - 1 = 2\ln\left(\frac{e^x + 1}{e + 1}\right).$$

6. Крива линия минава през точката (0; – 2).

Намерете уравнението ѝ, ако се знае, че ъгловият коефициент на допирателната в коя да е н точка е три пъти по-голям от ординатата на точката, в която е прекарана допирателната.

Решение. Като изходим от геометричния смисъл на първата производна, ще получим диферен ното уравнение на фамилията криви, които удовлетворяват исканото в задачата свойство. Действите ние знаем, че ъгловият коефициент на допирателната в точка $M(x; y)$ от кривата изпълнява услови

$$k = y'(x)$$

и като вземем предвид, че съгласно условието на задачата $k = 3y$, то получаваме диференциал уравнение

$$y' = 3y$$

или

$$\frac{dy}{dx} = 3y\,, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dy}{y} = 3dx\,.$$

За общия интеграл на това уравнение получаваме последователно

$$\int \frac{dy}{y} = 3\int dx\,; \quad \ln|y| = 3x + \ln|C_1|\,;$$

$$\ln|y| - \ln|C_1| = 3x\,; \quad \ln\left|\frac{y}{C_1}\right| = 3x\,; \quad \pm\frac{y}{C_1} = e^{3x}\,;$$

$$y = \pm C_1 e^{3x}\,; \quad y = Ce^{3x} \quad (C = \pm C_1)\,.$$

Тъй като търсената крива минава през точката (0; – 2), то стойността на константата C ще на като в общото решение $y = Ce^{3x}$ заместим $x = 0$ и $y = -2$. Така получаваме, че $-2 = Ce^{3.0}$ или C И така, търсената крива има уравнение

$$y = -2e^{3}x.$$

Задачи:

Намерете общите интеграли, а там, където са посочени началните условия, и частните интегр следните диференциални уравнения:

1. $xy\,dx + \sqrt{1 - x^2}\,dy = 0\,.$
2. $\sqrt{1 + x^2}\,dy = \sqrt{1 - y^2}\,dx\,.$
3. $(1 + y^2)x\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0\,.$
4. $(xy^2 + x)\,dx + (y + x^2y)$

5. $y' = \dfrac{4}{x^2 - 4}$.

6. $dr - r\, d\varphi = 0$.

7. $(\sqrt{x\,y}\,)\, y' - y = 0 . = 0$.

8. $2^{x+y} + 3^{x-2y} . y' = 0$.

9. $(1 + y^2)(e^{2x}\, dx - e^y dy) - (1 + y)\, dy = 0$.

10.* $(1 + y^2)\, dx = (y - \sqrt{1 + y^2}\,)(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}\, dy$.

11.* $x^2(2yy' - 1) = 1$.

12. $xy' = \dfrac{y}{\ln x}$, $y = 1$ при $x = e$.

13. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$, $y = 1$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$.

14. $s = s' \cos^2 t . \ln s$, $s = 1$ при $t = \pi$.

За всяко от следните диференциални уравнения намерете частните решения и постройте тези частни решения:

15. $\dfrac{dx}{y} + \dfrac{dy}{x} = 0$, $y = 4$ при $x = 3$.

16. $(1 + y^2)\, dx = xy\, dy$, $y = 0$ при $x = 1$.

17. $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$, $y = 1$ при $x = 0$.

18. Крива линия минава през точката (0; – 2). Намерете уравнението ѝ, ако се знае, че ъгловият коефициент на допирателната в коя да е нейна точка е равен на ординатата на точката, в която е прекарана допирателната, увеличена с 3.

19*. Намерете уравнението на кривата, която минава през началото на координатната система и ъгловият коефициент на всяка нейна допирателна е равен на $\dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + x^2}$.

***Отговори*:**

1. $y = C\, e^{\sqrt{1 - x^2}}$.

2. $\arcsin y = \ln C\,(x + \sqrt{1 + x^2}$

3. $\operatorname{arctg} y + \ln C \sqrt{1 + x^2} = 0$.

4. $(1 + x^2)(1 + y^2) = C$.

5. $y = \ln \left|\dfrac{x - 2}{x + 2}\right| + C$.

6. $r = C\, e^{\varphi}$.

7. $2\sqrt{y} + \ln |y| - 2\sqrt{x} = C$.

8. $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\ln \frac{2}{3}} - \dfrac{18^{-y}}{\ln 18} = C$.

9. $\dfrac{1}{2} e^{2x} - e^y - \ln \sqrt{1 + y^2} - \operatorname{arctg} x = C$.

10. $\ln \dfrac{\sqrt{1 + y^2}}{|y + \sqrt{1 + y^2}|} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C$.

11. $x\,(y^2 + C) = x^2 - 1$.

12. $y = \ln x$.

13. $y = 2 \sin x - 1$.

14. $\ln^2 s - 2 \operatorname{tg} t = 0$.

15. Окръжността $x^2 + y^2 = 25$.

16. Равнораменната хипербола $x^2 - y^2 = 1$.

17. Полуокръжността $y = \sqrt{1 - x^2}$ с радиус $R = 1$ и център $O(0,0)$.

18. $y = e^x - 3$.

19. $x = \dfrac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$.

4. Хомогенни деференциални уравнения

1. Диференциалното уравнение

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{4.1}$$

се нарича хомогенно, когато $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са хомогенни функции на x и y от една и съща степен.

С помощта на субституцията $y = u.x$ такива диференциални уравнения се свеждат до уравнени отделящи се променливи. Тук u е нова функция на x т.е. $u = u(x)$ и следователно, когато пра субституцията $y = u.x$, трябва да се има предвид, че

$$y' = u'x + u \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u\,.$$

Също така $\qquad dy = x\, du + u\, dx.$

2. Диференциалното уравнение

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{4.2}$$

където $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ са константи при условие, че

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{4.3}$$

се преобразува в хомогенно с помощта на субституцията

$$\begin{cases} x = u + h \\ y = v + k \end{cases} \tag{4.4}$$

Тук h и k са константи и са решение на системата

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

При $\Delta = 0$ и $b_1 \neq 0$ уравнение (4.2) се преобразува в уравнение с отделящи се променливи с помо на субституцията

$$a_1x + b_1y = t. \tag{4.6}$$

Примери:

1. Решете уравнението

$$xy^2\, dy - (x^3 + y^3)\, dx = 0\,.$$

Решение. Коефицентите пред dx и dy са

$$P(x, y) = -(x^3 + y^3) \quad \text{и} \quad Q(x, y) = xy^2\,.$$

Функциите $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са хомогенни от една и съща степен (в случая от трета степен). Действително:

$$P(tx, ty) = -(t^3x^3 + t^3y^3) = -t^3(x^3 + y^3) = t^3 . P(x, y)\,;$$

$$Q(tx, ty) = tx\,.\,t^2y^2 = t^3xy^2 = t^3\, Q(x, y)\,.$$

Уравнението е хомогенно и полагаме

$$y = u\,.\,x\,, \quad \text{а} \quad dy = x\, du + u\, dx\,.$$

Тогава

$$x\,.\,u^2x^2\,(x\, du + u\, dx) - (x^3 + u^3x^3)\, dx = 0$$

или

$$x^3u^2(x\,du + u\,dx) - x^3(1 + u^3)\,dx = 0\,.$$

Разделяме двете страни на уравнението на x^3:

$$u^2(x\,du + u\,dx) - (1 + u^3)\,dx = 0.$$

Разкриваме скоби и групираме членовете:

$$u^2x\,du + (u^3 - 1 - u^3)\,dx = 0$$

или

$$u^2x\,du - dx = 0\,.$$

Отделяме променливите в последното уравнение:

$$u^2\,du - \frac{dx}{x} = 0\,.$$

Интегрираме уравнението и получаваме последователно

$$\frac{u^3}{3} - \ln|x| = \ln|C|\,;\quad u^3 = 3\ln|Cx|\,.$$

Като заместим в последното равенство $u = \dfrac{y}{x}$, получено от $y = ux$, намираме:

$$\frac{y^3}{x^3} = 3\ln|Cx| \quad \text{или} \quad y^3 = 3x^3\ln|Cx|\,.$$

2. Решете уравнението

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{y^2 - x^2}\,dx\,.$$

Решение. Прехвърляме членовете на уравнението от едната страна и групираме:

$$x\,dy - (y + \sqrt{y^2 - x^2})\,dx = 0\,.$$

Коефициентите пред dx и dy са функциите

$$P(x, y) = -(y + \sqrt{y^2 - x^2}) \quad \text{и} \quad Q(x, y) = x\,.$$

Тези две функции са хомогенни, защото

$$P(tx, ty) = -(tx + \sqrt{t^2y^2 - t^2x^2}) = -t(x + \sqrt{y^2 - x^2}) = tP(x, y)\,,$$

$$Q(tx, ty) = tx = t\,.\,Q(x, y)\,.$$

Следователно даденото уравнение е хомогенно и ще го решим, като заместим в него

$$y = ux \quad \text{и} \quad dy = x\,du + u\,dx\,.$$

Получава се:

$$x(x\,du + u\,dx) - (ux + \sqrt{u^2x^2 - x^2})\,dx = 0$$

или

$$x(x\,du + u\,dx) - x(u + \sqrt{u^2 - 1})\,dx = 0\,.$$

Разделяме на x, след това разкриваме скоби и получаваме

$$x\,du - \sqrt{u^2 - 1}\,dx = 0\,.$$

Отделяме променливите и интегрираме

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} - \int \frac{dx}{x} = \ln|C_1|$$

или

$$\ln|u+\sqrt{u^2-1}|-\ln|x| = \ln|C_1|; \quad \ln\left|\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{x}\right| = \ln|C_1|;$$

$$\frac{u+\sqrt{u^2-1}}{x} = \pm C_1\,; \quad u+\sqrt{u^2-1} = Cx \quad (C = \pm C_1\,.)$$

В последното равенство заместваме $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1} = Cx\,; \quad \sqrt{\frac{y^2}{x^2}-1} = Cx-\frac{y}{x}\,.$$

Повдигаме двете страни на квадрат:

$$\frac{y^2}{x^2}-1 = C^2x^2-2Cy+\frac{y^2}{x^2}\,.$$

Или $C^2x^2-2Cy+1 = 0$ е общото решение на даденото диференциално уравнение

3. Намерете частното решение на диференциалното уравнение

$$y' = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

при начални условия $x = 1,\, y = 1$.

Решение. Уравнението е хомогенно (убедете се сами в този факт).
Заместваме в даденото уравнение $y = ux$ и $y' = u'x+u$:

$$u'x+u = u+\frac{1}{u}\,; \quad u'x = \frac{1}{u}$$

или

$$\frac{du}{dx}\,x = \frac{1}{u}\ ; \quad uxdu-dx = 0$$

Отделяме променливите в последното уравнение, интегрираме и получаваме последователно

$$\int u\,du-\int\frac{dx}{x} = \ln|C|\,; \quad \frac{u^2}{2}-\ln|x| = \ln|C|\,;$$

$$u^2 = 2\ln|x|+2\ln|C|$$

Заместваме $u = \dfrac{y}{x}$:

$$\frac{y^2}{x^2} = 2\ln|x|+2\ln|C|\,; \quad y^2 = 2x^2\ln|x|+2x^2\ln|C|\,.$$

От условието, че $y = 1$ при $x = 1$ намираме

$$1 = 2\ln 1+2\ln|C| \quad \text{или} \quad 2\ln|C| = 1$$

Частното решение е

$$y^2 = 2x^2\ln|x|+x^2\,.$$

4. Решете уравнението

$$(2x-4y)\,dx+(x+y-3)\,dy = 0\,.$$

Решение. Уравнението е от вида (4.2) и е приводимо към хомогенно, тъй като

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0\,.$$

От системата

$$\left|\begin{array}{l} 2h - 4k = 0 \\ h + k - 3 = 0 \end{array}\right.$$

намираме, че $h = 2$ и $k = 1$.
Тогава в даденото уравнение съгласно (4.4) заместваме

$$\begin{cases} x = u + 2 \\ y = v + 1 \end{cases} ; \qquad \begin{cases} dx = du \\ dy = dv. \end{cases}$$

и получаваме

$$(2u - 4v)\, du + (u + v)\, dv = 0 \; .$$

Последното уравнение е хомогенно и за да го решим, полагаме

$$u = z\,v, \quad du = v\,dz + z\,dv \; ;$$

$$2\,(zv - 2v) \,.\, (v\,dz + z\,dv) + (zv + v)\,dv = 0 \; .$$

Разделяме на v и отделяме променливите:

$$2\,(z - 2)\,v\,dz + (2z^2 - 3z + 1)\,dv = 0 \; ;$$

$$\frac{2\,(z-2)}{2\,z^2 - 3\,z + 1}\,dz + \frac{dv}{v} = 0$$

Интегрираме и получаваме

$$-2 \ln |z - 1| + 3 \ln \left|z - \frac{1}{2}\right| + \ln |v| = \ln |C_1| \; ;$$

$$\ln \left|\frac{\left(z - \frac{1}{2}\right)^3 v}{(z-1)^2}\right| = \ln |C_1| \; ; \quad \left(z - \frac{1}{2}\right)^3 v = C_2\,(z-1)^2 \;\; (C_2 = \pm\, C_1) \; .$$

Заместваме $z = \dfrac{u}{v}$:

$$\left(\frac{u}{v} - \frac{1}{2}\right)^3 . \, v = C_2 \left(\frac{u}{v} - 1\right)^2 ; \quad (2u - v)^3 = 8\,C_2\,(u - v)^2 \; .$$

Като имаме предвид, че $u = x - 2$ и $v = y - 1$, то

$$\left[2\,(x-2) - (y-1)\right]^3 = 8\,C_2 \left[x - 2 - (y-1)\right]^2 \; .$$

Общото решение на даденото уравнение е

$$(2x - y - 3)^3 = C\,(x - y - 1)^2 \quad (C = 8\,C_2) \; .$$

5. Решете уравнението

$$(x + y)\,dx + (x + y - 1)\,dy = 0 \; .$$

Решение. Даденото уравнение е приводимо към уравнение с отделящи се променливи, защото

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \; .$$

Съгласно (4.6) полагаме в даденото уравнение $x + y = t$, $dy = dt - dx$ и получаваме

$$t\,dx + (t-1)\,(dt - dx) = 0 \; .$$

Отделяме променливите :

$$dx + (t-1)\,dt = 0 \; .$$

Интегрираме и намираме :

$$x + \frac{1}{2}\left(t - 1\right)^2 = C_1 \,; \qquad 2x + (t-1)^2 = 2C_1 \,.$$

В последното уравнение заместваме $t = x + y$ и намираме, че общото решение на даде… уравнение е

$$2x + (x + y - 1)^2 = C \qquad (C = 2C_1)\,.$$

Задачи:

Намерете общите интеграли, а там, където са посочени началните условия, и частните интеграли … следните диференциални уравнения :

1. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0\,.$
2. $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy = 0\,.$
3. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,.$
4. $(x^2 + y^2)\,dx = 2xy\,dy\,.$
5. $4x^2 - xy + y^2 + y'\,(x^2 - xy + 4y^2) = 0\,.$
6. $(x^2 + y^2 + xy)\,dx = x^2\,dy\,.$
7. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}\,.$
8. $xy' - y + x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{y}{x} = 0\,.$
9. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0\,.$
10. $y = x\,(y'\ \sqrt[x]{e^y})\,.$
11. $(xy' - y)\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = x\,.$
12. $\left(x - y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx + x\cos\dfrac{y}{x}\,dy$ …
13. $(x + y - 2)\,dx + (x - y + 4)\,dy = 0\,.$
14. $(x - y + 3)\,dx + (3x + y + 1)\,dy = 0\,.$
15. $(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0\,.$
16. $(2x + 2y - 1) + y'\,(x + y - 2) = 0\,.$
17. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0\,,\ y = -2$ при $x = 1\,.$
18*. $(x - xy')\cos\dfrac{y}{x} = x\,,\ y = \pi$ при $x = 1\,.$

Отговори:

1. $x^2 + 2xy = C\,.$
2. $\ln(x^2 + y^2) - 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x} = C$
3. $1 + 2Cy - C^2x^2 = 0\,.$
4. $y^2 = x^2 + Cx\,.$
5. $(x + y)(x^3 + y^3) = C\,.$
6. $y = Cx\,e^{x^2/y^2}\,.$
7. $C\,(y^2 - x^2) = y^3\,.$
8. $x\sin\dfrac{y}{x} = C\,.$
9. $\sqrt{x} + \sqrt{y}\,\ln Cy = 0\,.$
10. $e^{-\frac{y}{x}} + \ln Cx = 0.$
11. $\sqrt{x^2 + y^2} = Ce^{\frac{y}{x}\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}}\,.$
12. $\sin\dfrac{y}{x} + \ln|x| = C\,.$
13. $x^2 + 2xy - y^2 - 4x + 8y = C\,.$
14. $y = 1 - x + C\,e^{\frac{2x+2}{x+y-1}}\,.$
15. $x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = C\,.$
16. $x + y + 1 = C\,e^{\frac{2x+y}{3}}\,.$
17. $3y^3 = 8\,(x^2 - y^2)\,.$
18. $\sin\dfrac{y}{x} + \ln|x| = 0\,.$

5. Линейни диференциални уравнения от първи ред

Линейно диференциално уравнение от първи ред е уравнение от вида

(5.1) $$y' + P(x).y = Q(x),$$

където $P(x)$ и $Q(x)$ са непрекъснати функции на x или константи.

Общото решение на (5.1) се дава по формулата

(5.2) $$y = e^{-\int P dx}\left[C + \int Q e^{\int P dx} . dx\right].$$

Примери:

1. Решете уравнението

$$y' - \frac{2\cancel{x}}{x + 1} = (x + 1)^{\frac{5}{2}}.$$

Решение. Ясно е, че това уравнение е линейно диференциално уравнение от първи ред. В случая

$$P = -\frac{2\cancel{x}}{x + 1}, \text{ а } Q = (x + 1)^{\frac{5}{2}}.$$

Общото му решение намираме като заместим P и Q във формула (5.2) и интегрираме:

$$y = e^{-\int -\frac{2\cancel{x}}{x+1} dx}\left[C + \int (x + 1)^{\frac{5}{2}} e^{\int -\frac{2\cancel{x}}{x+1} dx} . dx\right] =$$

$$= e^{\ln (x + 1)^2}\left[C + \int (x + 1)^{\frac{5}{2}} e^{\ln \frac{1}{(x+1)^2}} . dx\right] =$$

$$= (x + 1)^2\left[C + \int (x + 1)^{\frac{5}{2}} . \frac{1}{(x + 1)^2} . dx\right] =$$

$$= (x + 1)^2\left[C + \frac{2}{3}(x + 1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

или

$$y = \frac{2(x + 1)^{7/2}}{3} + C(x + 1)^2.$$

2. Решете уравнението

$$\frac{ds}{dt} . \cos t + s . \sin t = 1.$$

Решение. Разделяме двете страни на $\cos t \neq 0$:

$$\frac{ds}{dt} + s . \operatorname{tg} t = \frac{1}{\cos t}.$$

Ясно е, че уравнението е линейно:

$$P = \operatorname{tg} t, \quad Q = \frac{1}{\cos t}.$$

По формула (5.2) получаваме:

$$s = e^{-\int \operatorname{tg} t\, dt}\left[C + \int \frac{1}{\cos t} e^{\int \operatorname{tg} t\, dt} . dt\right] =$$

$$= e^{\ln \cos t}\left[C + \int \frac{1}{\cos t} e^{-\ln \cos t} . dt\right] =$$

$$= \cos t \left[C + \int \frac{dt}{\cos^2 t}\right] = \cos t \,[C + \operatorname{tg} t]$$

или

$$s = \sin t + C . \cos t .$$

6. Бернулиеви диференциални уравнения

Деференциалното уравнение

(6.1) $y' + P(x)y = Q(x)y^n$,

където $P(x)$ и $Q(x)$ са непрекъснати функции на x или константи, се нарича Бернулиево.
Чрез субституцията

(6.2) $y^{1-n} = z$

това уравнение се превръща в линейно спрямо z. След решаването на полученото уравнение се връщаме отново към променливата y.

Примери:

1. Решете уравнението

$$xy' + y = y^2 \ln x.$$

Решение. Делим двете страни на уравнението на x:

$$y' + \frac{y}{x} = \frac{\ln x}{x} y^2 .$$

Уравнението е Бернулиево. В случая $n = 2$.

$$P(x) = \frac{1}{x}, \quad Q(x) = \frac{\ln x}{x} .$$

Делим двете страни на уравнението на y^2:

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x} .$$

Полагаме $y^{1-n} = z$, но $n = 2$ и получаваме последователно

$$y^{-1} = z ; \quad -y^{-2} . \ y' = z' ; \quad \frac{y'}{y^2} = -z' .$$

Като вземем предвид последните равенства и заместим в уравнението, получаваме

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x} .$$

Последното уравнение е линейно спрямо z и следователно

$$z = e^{\int \frac{dx}{x}} \left[C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\int \frac{dx}{x}} . dx \right] =$$

$$= e^{\ln x} \left[C - \int \frac{\ln x}{x} e^{-\ln x} . dx \right] = x \left[C - \int \frac{\ln x}{x^2} dx \right] .$$

Интеграла в скобите намираме, като интегрираме по части. Получаваме

$$z = x \left[C + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \right] \quad \text{или} \quad z = 1 + Cx + \ln x .$$

Но $z = \dfrac{1}{y}$ и следователно общото решение на даденото диференциално уравнение е

$$\frac{1}{y} = 1 + Cx + \ln x .$$

2. Намерете уравнението на кривата, минаваща през точката (0;1), за която ъгловият коефициент на допирателната, прекарана през коя да е нейна точка, е равен на $xy\,(x^2y^2 - 1)$.

Решение. Като вземем предвид геометричния смисъл на първата производна, съставяме уравнението

$$\frac{dy}{dx} = xy\,(x^2y^2 - 1)$$

или

$$y' + xy = x^3y^3 .$$

Последното уравнение е Бернулиево ($n = 3$).
Делим двете страни на уравнението на y^3:

$$\frac{y'}{y^3} + xy^{-2} = x^3 .$$

Полагаме $y^{1-n} = z$, но в случая $n = 3$ и получаваме последователно:

$$y^{-2} = z \; ; \qquad -2y^{-3}y' = z' \; ; \qquad \frac{y'}{y^3} = -\frac{z'}{2} .$$

Като вземем предвид последните равенства, уравнението се преобразува във вида

$$z' - 2xz = -2x^3 ,$$

което е линейно спрямо z и следователно

$$z = e^{2\int x dx} \left[C - 2 \int x^3 e^{-2\int x dx} dx \right] =$$

$$= e^{x^2} \left[C - 2 \int x^3 e^{-x^2} dx \right] .$$

Интеграла в скобите решаваме чрез интегриране по части и получаваме

$$z = x^2 + 1 + Ce^{x^2} .$$

Но $z = \dfrac{1}{y^2}$ и следователно

$$\frac{1}{y^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2} .$$

Като вземем предвид, че кривата минава през точката (0; 1), то намираме, че $C = 0$ или кривата има уравнение

$$y^2 = \frac{1}{x^2 + 1} .$$

Задачи:

Намерете общите решения, а там, където са дадени начални условия, и частните решения на сле... диференциални уравнения:

1. $y' + y = e^{-x}$.

2. $y' - \dfrac{ny}{x} = e^x x^n$.

3. $\dfrac{ds}{dt} + s\cos t = \dfrac{1}{2}\sin 2t$.

4. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{2x}{\cos x}$.

5. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{ay}{x} = \dfrac{x+1}{x}$.

6. $e^{x^2}\dfrac{dy}{dx} + 2xye^{x^2} = x\sin x$.

7. $x\ln x \, . \, y' - y = x^3(3\ln x - 1)$.

8.* $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$

9. $y' + xy = x^3y^3$.

10. $xy' + y = y^2\ln x$.

11. $y' + y = x\sqrt{y}$.

12. $3\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x+1} = \dfrac{x^3}{y^2}$.

13. $xy' - 2y = x^3e^x$, $y = 0$ при $x = 1$.

14. $\dfrac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y = 0$ при $x = 0$.

15. $xy' + y = x + 1$, $y = 3$ при $x = 2$.

16. Намерете уравнението на линията, минаваща през точката (0;0) и за която ъгловият коеф... на допирателната в коя да е нейна точка е равен на $y + 2x$.

Отговори:

1. $y = (x + C)\,e^{-x}$.

2. $y = x^n(e^x + C)$.

3. $s = \sin t - 1 + Ce^{-\sin t}$.

4. $y = \dfrac{x^2 + C}{\cos x}$.

5. $y = Cx^a + \dfrac{x}{1-a} - \dfrac{1}{a}$.

6. $y = Ce^{-x^2} + (\sin x - x\cos x)$

7. $y = C\ln x + x^3$.

8. $y = Ce^{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. $\dfrac{1}{y^2} = x^2 + 1 + Ce^{x^2}$.

10. $\dfrac{1}{y} = 1 + Cx + \ln x$.

11. $y = \left(x - 2 + Ce^{-\frac{x^2}{2}}\right)^2$.

12. $60y^3(x+1)^2 = 10x^6 + 24x^5 + 15x^4 + C$.

13. $y = x^2(e^x - e)$.

14. $y = \sin x$.

15. $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{2} + 1$.

16. $y = 2(e^x - x - 1)$.

7. Точни диференциални уравнения. Интегриращ множител

I. Диференциалното уравнение

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0\,, \tag{7.1}$$

където функциите $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ са определени в някаква област в равнината, е точно, когато лява... част е пълен диференциал на някоя функция $f(x,y)$, т.е.

$$(7.2) \qquad df(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy\ .$$

Като се вземе предвид (7.1), то (7.2) може да се запише:

$$(7.3) \qquad df(x,y) = 0\ .$$

От (7.3) следва, че общият интеграл на (7.1) е

$$(7.4) \qquad f(x,y) = C\ .$$

И така, ако лявата страна на (7.1) е пълен диференциал на една функция $f(x,y)$, то (7.4) е общият интеграл на (7.1).

Необходимото и достатъчно условие лявата страна на уравнението (7.1) да е пълен диференциал на някаква функция $f(x,y)$ е

$$(7.5) \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\ .$$

Когато искаме да решим уравнението (7.1), постъпваме по следния начин:

а) Проверяваме дали е изпълнено условие (7.5), от което ще следва верността на следните равенства:

$$(7.6) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)\ .$$

б) Вземаме едно от равенствата (7.6), примерно първото:

$$(7.8) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P(x, y)\ .$$

Смятаме y за постоянно в това равенство, интегрираме и получаваме

$$(7.9) \qquad f(x, y) = \int P(x, y) + \varphi(y)\ ,$$

където $\varphi(y)$ е една неизвестна функция само на y.

в) Диференцираме двете страни на (7.9) по y:

$$(7.10) \qquad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial[\int P(x, y)]\,dx}{\partial y} + \varphi'(y)\ .$$

г) Вземаме предвид второто равенство на (7.6) и тогава (7.10) може да се напише

$$(7.11) \qquad Q(x, y) = \frac{\partial[\int P(x, y)\,dx]}{\partial y} + \varphi'(y)\ .$$

От това равенство намираме $\varphi(y)$.

д) Заместваме $\varphi(y)$ в (7.9) и намираме функцията $f(x,y)$.

е) Приравняваме намерената функция $f(x,y)$ на константата и намираме общото решение на уравнение (7.1).

II. Интегриращ множител. Когато лявата страна на (7.1) не е пълен диференциал, то се търси функция $\mu = \mu(x,y)$ такава, че изразът

$$(7.12) \qquad \mu\,.\,Pdx + \mu\,.\,Qdy = 0$$

да бъде пълен диференциал.

Функция $\mu = \mu(x,y)$, за която изразът (7.12) е пълен диференциал, наричаме интегриращ множител.

Лявата страна на (7.12) е пълен диференциал при условие, че

$$(7.13) \qquad \frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \quad \text{или}$$

$$(7.14) \qquad P\,.\,\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\,.\,\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

От уравнение (7.14), което е едно частно диференцирано уравнение и което трябва да удовлетвор
$\mu = \mu(x,y)$, намираме интегриращ множител. За целта не е необходимо да се търсят всички решен
(7.14), а поне едно негово решение, при което лявата страна на (7.12) е пълен диференциал. Всичко
ни дава възможност да търсим интегриращия множител $\mu = \mu(x,y)$ в някаква отнапред дадена фор
примерно:

а) μ да е функция само на x т.е. $\mu = \mu(x)$. В такъв случай $\dfrac{\partial\mu}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial\mu}{\partial x} = \dfrac{d\mu}{dx}$ и от уравнението (
намираме

$$(7.15) \qquad \mu = \mu(x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx} .$$

За да има уравнението (7.1) интегриращ множител от вида (7.15) е необходимо подинтеграл
функция

$$(7.16) \qquad \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$$

да е функция само на променливата x.

б) μ да е функция само на y, т.е. $\mu = \mu(y)$. Чрез разсъждения, аналогични на тези в точка а), нами
че

$$(7.17) \qquad \mu = \mu(y) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dy} ,$$

а за това е необходимо

$$(7.18) \qquad \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

да бъде функция само на променливата y.

в) Често пъти с допълнителни условия за структурата на интегриращия множител уравнението (
се свежда към обикновено диференциално уравнение спрямо μ, от което намираме този множител
търси се интегриращ множител $\mu = \mu(x,y)$, при който променливите x, y да са свързани с ня
зависимост $\varphi(x,y)$ (напр. $x + y$, $x^2 + y^2$, $x.y$ и др.).

Примери:

1. Решете уравнението

$$(3x^2 + 6xy^2)\, dx + (6x^2y + 4y^3)\, dy = 0 .$$

Решение. В случая $P = 3x^2 + 6xy^2$, а $Q = 6x^2y + 4y^3$. Тъй като

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \quad \text{и} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy ,$$

условие (7.5) е изпълнено и следователно лявата част на даденото диференциално уравнение е п
диференциал на някоя функция $f(x,y)$, която ще търсим по начина, посочен в точка I (а-е) на насто
параграф.

Ползуваме едно от условията (7.6) – примерно първото (може да тръгнем, разбира се, и от втор
В случая

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 .$$

Интегрираме това равенство, смятайки y за константа и получаваме

$$f(x, y) = \int (3x^2 + 6xy^2)\, dx + \varphi(y)$$

или

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) ,$$

Диференцираме спрямо y:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 6x^2y + \varphi'(y) .$$

Но съгласно (7.6)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3 .$$

Тогава като вземем предвид последните две равенства, можем да запишем, че

$$6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$$

или

$$\varphi'(y) = 4y^3 .$$

Интегрираме последното:

$$\varphi(y) = \int 4y^3dy = y^4 + C \text{ , т.е. } \varphi(y) = y^4 + C .$$

Заместваме намереното $\varphi(y)$ в израза за $f(x,y)$ и намираме, че търсената функция $f(x,y)$ е

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 .$$

Приравняваме намерения израз за $f(x,y)$ на някоя константа – например C_2:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C_1 = C_2$$

или

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C_2 - C_1 ,$$

т.е. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ е общият интеграл на даденото диференциално уравнение.

2. Намерете частното решение на диференциалното уравнение

$$(2x + ye^{xy})\, dx + (1 + xe^{xy})\, dx = 0$$

при начални условия $x = 0, y = 1$.

Решение. В случая

$$P = 2x + ye^{xy} ; \quad Q = 1 + xe^{xy} ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} .$$

Условието (7.5) е изпълнено и лявата страна на даденото уравнение е пълен диференциал на някоя функция $f(x,y)$. Следователно

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2x + ye^{xy} ; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1 + xe^{xy} .$$

От първото от тези две равенства намираме

$$f(x, y) = \int (2x + ye^{xy})\, dx + \varphi(y)$$

или

$$f(x, y) = x^2 + e^{xy} + \varphi(y) .$$

Диференцираме $f(x,y)$ по y:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = xe^{xy} + \varphi'(y) .$$

Но вече знаем, че $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 1 + xe^{xy}$ и следователно

$$xe^{xy} + \varphi'(y) = 1 + xe^{xy} \ ; \quad \varphi'(y) = 1 \ ,$$

откъдето

$$\varphi(y) = \int 1 \ . \ dy = y + C_1 \ .$$

Заместваме намерения израз за $\varphi(y)$ в израза за $f(x,y)$ и намираме

$$f(x, y) = x^2 + e^{xy} + y + C_1 \ .$$

Приравняваме $f(x,y)$ на константа – примерно на C_2:

$$x^2 + e^{xy} + y + C_1 = C_2$$

или

$$x^2 + e^{xy} + y = C \quad (C = C_2 - C_1) \ .$$

От общото решение, като заместим $x = 0$ и $y = 1$ намираме, че $C = 2$ и следователно частното реше...
на даденото диференциално уравнение е

$$x^2 + e^{xy} + y = 2.$$

3. Решете уравнението

$$(3x^2 + 2x - y) \ dx + (2y - x + 3y^2) \ dy = 0 \ .$$

Решение. Лесно се убеждаваме, че това уравнение е точно диференциално, т.е. лявата му стра... пълен диференциал на някаква функция $f(x,y)$ и следователно можем да го решим като уравнения... предните два примера. Тук обаче ще посочим и друг начин за решаване на уравнението, а именно чр... подходящо групиране на членовете му.

Разкриваме скобите в даденото уравнение и групираме членовете по следния начин:

$$(3x^2dx + 3y^2dy) + (2ydy + 2xdx) - (ydx + xdy) = 0 \ .$$

Внимателното разглеждане на отделните групи показва, че

$$3x^2dx + 3y^2dy = d \ (x^3 + y^3) \ ,$$

$$2ydy + 2xdx = d \ (x^2 + y^2) \ ,$$

$$ydx + xdy = d(x \ . \ y) \ .$$

Следователно уравнението приема вида:

$$d \ (x^3 + y^3) + d \ (x^2 + y^2) - d \ (x \ . \ y) = 0 \ .$$

Интегрираме двете му страни и получаваме, че общият интеграл на даденото уравнение е

$$x^3 + y^3 + x^2 + y^2 - xy = C \ .$$

Забележка. По същия начин можехме да решим и точните диференциални уравнения в предни... примера. Изисква се по-голяма находчивост и съобразителност.

4. Решете уравнението

$$(1 - x^2y) \ dx + x^2 \ (y - x) \ dy = 0 \ .$$

Решение. В случая $P = 1 - x^2y$, а $Q = x^2 \ (y - x)$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = - x^2 \ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \ .$$

Ясно е, че условие (7.5) не е изпълнено, т.е. $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Ще търсим интегриращ множител, който да е функция само на x, т.е. $\mu = \mu(x)$, тъй като е изпълнено условието (7.16):

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{x^2(y-x)}\left[-x^2 - (2xy - 3x^2)\right] = \frac{1}{x^2(y-x)}(2x^2 - 2xy) = -\frac{2}{x} ,$$

т.е. подинтегралната функция в (7.15) зависи само от x.

Тогава съгласно (7.15) намираме:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} .$$

Умножаваме двете страни на разглежданото уравнение с така намерения интегриращ множител $\mu = \frac{1}{x^2}$ и получаваме уравнение, лявата страна на което вече е пълен диференциал на някоя функция $f(x,y)$:

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)\,dy = 0 .$$

Действително сега $P_1 = \frac{1}{x^2} - y$, а $Q_1 = y - x$.

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -1 , \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -1 \text{, т.е. } \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} .$$

Прилагаме познатия вече начин за решаване на точни диференциални уравнения. В случая

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = P_1 = \frac{1}{x^2} - y$$

или

$$f(x,y) = \int\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + \varphi(y) ; \quad f(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + \varphi(y) .$$

Диференцираме $f(x,y)$ по y в последното равенство:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = -x + \varphi'(y)$$

и като имаме предвид още, че

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = Q_1 = y - x ,$$

то получаваме

$$-x + \varphi'(y) = y - x$$

или

$$\varphi'(y) = y ; \quad \varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C_1 .$$

Тогава

$$f(x,y) = -\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C_1 .$$

Приравняваме $f(x,y)$ на константа – примерно C_2:

$$-\frac{1}{x} - yx + \frac{y^2}{2} + C_1 = C_2 .$$

Общият интеграл на даденото диференциално уравнение е

$$xy^2 - 2x^2y - 2 = Cx \quad (C = C_2 - C_1) .$$

5. Решете уравнението

$$\sin y \cos x\, dx + (\sin y - y \cos y - \sin x \cos y)\, dy = 0 .$$

Решение. В случая

$$P = \sin y \cos x ; \quad Q = \sin y - y \cos y - \sin x \cos y ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cos y \cos x ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\cos x \cos y .$$

Виждаме, че

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

и следователно даденото уравнение не е точно диференциално. Условието (7.16) не е изпълнено. Тогава ще проверим дали е изпълнено (7.18). Ще търсим интегриращ множител.

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sin y \cos x}(-\cos x \cos y - \cos y \cos x) = -2\operatorname{ctg} y ,$$

т.е. изпълнено е (7.18) и подинтегралната функция в (7.17) зависи само от y. Следователно интегриращия множител ще намерим по (7.17):

$$\mu = \mu(y) = e^{\int -2\operatorname{cotg} y\, dy} = e^{-2\ln|\sin y|} = \frac{1}{\sin^2 y} .$$

Умножаваме двете страни на изходното уравнение с намерения множител $\mu(y)$ и получаваме

$$\frac{\cos x}{\sin y} dx + \left(\frac{1}{\sin y} - y \frac{\cos y}{\sin^2 y} - \sin x . \frac{\cos y}{\sin y}\right) dy = 0 ,$$

което вече е точно диференциално уравнение.

Действително

$$P_1 = \frac{\cos x}{\sin y} , \quad Q_1 = \frac{1}{\sin y} - y \frac{\cos y}{\sin^2 y} - \sin x \frac{\cos y}{\sin^2 y}$$

и

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = -\frac{\cos x . \cos y}{\sin^2 y} , \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -\frac{\cos x . \cos y}{\sin^2 y} ,\text{т.е. } \frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x} .$$

Тогава по начина за решаване на точни диференциални уравнения намираме последователно

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\cos x}{\sin y}$$

или

$$f(x, y) = \int \frac{\cos x}{\sin y} dx + \varphi(y) ; \quad f(x, y) = \frac{\sin x}{\sin y} + \varphi(y) .$$

Диференцираме последното равенство по y:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -\frac{\sin x . \cos y}{\sin^2 y} + \varphi'(y) .$$

От друга страна знаем, че

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q_1 = \frac{1}{\sin y} - y \frac{\cos y}{\sin^2 y} - \sin x \frac{\cos y}{\sin^2 y} ,$$

или

$$\varphi'(y) - \frac{\sin x . \cos y}{\sin^2 y} = \frac{1}{\sin y} - y \frac{\cos y}{\sin^2 y} - \frac{\sin x . \cos y}{\sin^2 y} ,$$

$$\varphi'(y) = \frac{1}{\sin y} - . y \frac{\cos y}{\sin^2 y} .$$

Оттук намираме:

$$\varphi(y) = \int\left(\frac{1}{\sin y} - y\,\frac{\cos y}{\sin^2 y}\right) dy = \int\frac{dy}{\sin y} - \int y\,\frac{\cos y}{\sin^2 y}\,dy =$$

$$= \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + \frac{y}{\sin y} - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right| + C_1 = \frac{y}{\sin y} + C_1 .$$

Следователно

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{\sin y} + \varphi(y) = \frac{\sin x}{\sin y} + \frac{y}{\sin y} + C_1 = \frac{y + \sin x}{\sin y} + C_1 .$$

Приравняваме $f(x,y)$ на константа – примерно C_2:

$$\frac{\sin x + y}{\sin y} + C_1 = C_2 .$$

Общият интеграл на даденото диференциално уравнение е

$$y + \sin x = C \,.\, \sin y \text{ ,където } \quad C = C_2 - C_1 .$$

6. Да се реши уравнението

$$xdx + ydy + x\,(xdy - ydx) = 0 ,$$

като се знае, че то има интегриращ множител от вида $\mu = \varphi(x^2 + y^2)$.

Решение. Най-напред записваме уравнението във вида

$$(x - xy)\,dx + (y + x^2)\,dy = 0 .$$

Сега вече е ясно, че $P = x - xy$, а $Q = y + x^2$. Нека означим $z = x^2 + y^2$, тогава $\mu = \varphi(z)$. Необходимото и достатъчно условие уравнението да има интегриращ множител от вида $\mu = f(z)$ е, както вече знаем, (7.13), т.е.

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q) \tag{A}$$

или

$$P\,\frac{\partial\mu}{\partial y} + \mu\,\frac{\partial P}{\partial y} = Q\,\frac{\partial\mu}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial Q}{\partial x} . \tag{B}$$

От последното частно диференциално уравнение ще намерим интегриращия множител μ, но за тази цел най-напред трябва да намерим $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial \mu}{\partial y}$, $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ и да ги заместим в него.

Като имаме предвид, че $\mu = \varphi(z)$, а $z = x^2 + y^2$, то

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\varphi(z)}{dz}\,.\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{d\varphi(z)}{dz}\,.\,2x\ ; \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\varphi(z)}{dz}\,.\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{d\varphi(z)}{dz}\,.\,2y\ . \tag{C}$$

Намираме също

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\,x\ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x\,. \tag{D}$$

Заместваме (C) и (D), а така също P и Q в (B) и получаваме последователно:

$$(x - xy)\,.\,2y\,\frac{d\varphi(z)}{dz} - x\,.\,\varphi(z) = (y + x^2)\,.\,\frac{d\varphi(z)}{dz}\,.\,2x + \varphi(z)\,.\,2x\ ;$$

$$(2xy - 2xy^2 - 2xy - 2x^3)\frac{d\varphi(z)}{dz} = 3x\varphi(z)\,;$$

$$-2x\,(x^2 + y^2)\frac{d\varphi(z)}{dz} = 3x\varphi(z)\,.$$

Като разделим на x и вземем предвид, че $x^2 + y^2 = z$, то предното уравнение приема вида:

$$-2z\frac{d\varphi(z)}{dz} = 3\,\varphi(z) \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi(z)}{\varphi(z)} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{dz}{z}\,.$$

От последното уравнение чрез интегриране намираме:

$$\varphi(z) = z^{-\frac{3}{2}} \quad \text{или} \quad \varphi(z) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,,$$

но $\mu = \varphi(z)$ и следователно $\mu = \dfrac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$.

Даденото уравнение, умножено с намерения интегриращ множител, се превръща в уравнение

$$\frac{x - xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx + \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dy = 0\,,$$

което е точно диференциално уравнение и което ще решим по познатия начин I (а-е). Съгласно (7.6)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = P_1 = \frac{x(1 - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,.$$

В последното равенство считаме, че y е константа, интегрираме и получаваме

$$f(x, y) = \int \frac{x(1 - y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,dx + \varphi(y) =$$

$$= (1 - y)\int (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\,x\,dx + \varphi(y) = \frac{1 - y}{2}\int (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\,d(x^2 + y^2) =$$

$$= \frac{1 - y}{2}\cdot\frac{(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \varphi(y) = (y - 1)\,(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \varphi(y)\,,$$

т.е.

$$f(x, y) = (y - 1)\,(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \varphi(y)\,.$$

Диференцираме $f(x,y)$ по y:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} - (y - 1)\,(x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}\,y + \varphi'(y) = \frac{x^2 + y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \varphi'(y)\,.$$

От друга страна, съгласно второто условие на (7.6), знаем, че

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = Q_1 = \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\,.$$

От последните две равенства получаваме:

$$\frac{x^2 + y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \varphi'(y) = \frac{y + x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{т.е.} \quad \varphi'(y) = 0$$

или

$$\varphi(y) = C_1\,.$$

Заместваме $\varphi(y) = C_1$ в израза за $f(x,y)$ и намираме, че

$$f(x, y) = (y - 1)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + C_1 .$$

Приравняваме $f(x,y)$ на константа – например на C_2:

$$(y - 1)(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + C_1 = C_2 .$$

От последното равенство намираме, че общият интеграл на изходното уравнение е

$$\frac{y-1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C \qquad (C = C_2 - C_1) .$$

7. Решете уравнението

$$(3x + 2y + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)\,dy = 0 ,$$

ако то има интегриращ множител от вида $\mu = \varphi(x+y^2)$.

Решение. В това уравнение

$$P = 3x + 2y + y^2 \text{ , а } Q = x + 4xy + 5y^2 .$$

Нека означим $x + y^2 = z$, тогава $\mu = \varphi(z)$. Намираме:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{d\varphi(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz} \ ; \quad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{d\varphi(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz} \ ;$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2 + 2y \ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 + 4y .$$

Заместваме $\frac{\partial\mu}{\partial x}$, $\frac{\partial\mu}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в равенството (7.14) и получаваме:

$$(3x + 2y + y^2) \cdot 2y\frac{d\varphi(z)}{dz} + \varphi(z) \cdot (2 + 2y) = (x + 4xy + 5y^2) \cdot \frac{d\varphi(z)}{dz} + \varphi(z) \cdot (1 + 4y) .$$

Преработваме последното уравнение:

$$\left[(3x + 2y + y^2) \cdot 2y - (x + 4xy + 5y^2)\right]\frac{d\varphi(z)}{dz} = (1 + 4y - 2 - 2y)\,\varphi(z) \ ;$$

$$(2xy + 2y^3 + x - y^2)\frac{d\varphi(z)}{dz} = (2y - 1)\,\varphi(z) \ ;$$

$$(2y - 1)(x + y^2)\frac{d\varphi(z)}{dz} = (2y - 1)\,\varphi(z) .$$

Делим на $(2y-1) \neq 0$ и като вземем предвид, че $x + y^2 = z$, получаваме:

$$z\frac{d\varphi(z)}{dz} = \varphi(z) \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi(z)}{dz} = \frac{dz}{z} .$$

От последното равенство получаваме, че

$\varphi(z) = z$, но $\mu = \varphi(z)$ и следователно $\mu = x + y^2$.

Умножаваме изходното уравнение с $\mu = x + y^2$:

$$(3x + 2y + y^2)(x + y^2)\,dx + (x + 4xy + 5y^2)(x + y^2)\,dy = 0 .$$

Последното уравнение вече е точно диференциално и като го решим по познатия метод, получаваме, че общият му интеграл е

$$(x + y)(x + y^2)^2 = C .$$

Задачи:

Решете следните диференциални уравнения

1. $(3x^2y^2 + 7)\,dx + 2x^3y\,dy = 0\,.$

2. $(3xy^2 - x^2)\,dx + (3x^2 - 6y^2 - 1)\,dy = 0\,.$

3. $(\ln y - 2x)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} - 2y\right)dy = 0\,.$

4. $(e^y + ye^x + 3)\,dx = (2 - xe^y - e^x)\,dy\,.$

5. $(\cos x + x\cos y + e^y)\,dy + (\sin y - y\sin x)\,dx = 0\,.$

6. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0\,.$

7. $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x\right)dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0\,.$

8. $\left(\dfrac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \dfrac{y}{x}\right)dx + \left(\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x\right)dy = 0\,.$

Решете следните диференциални уравнения, които допускат интегриращи множители от вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$.

9. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0\,.$

10. $(y^2 - 2x - 2)\,dx + 2y\,dy = 0\,.$

11. $(2y + xy^3)\,dx + (x + x^2y^2)\,dy = 0\,.$

12. $2x\ln y\,dx + (x^2 + y^2\sqrt{y^2+1})\,dy = 0\,.$

13. $2xy\,(1 + y^2)\,dx - (1 + x^2 + y^2x^2)\,dy = 0\,.$

Като преобразувате чрез групиране на членовете, решете следните диференциали уравнения:

14. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + (x^2 + y^2 + 2y)\,dy = 0\,.$

15. $(3x^2 + 6xy)^2\,dx + (6x^2y + 4y^2)\,dy = 0\,.$

16. $\left(1 + x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx + \left(-1 + y\sqrt{x^2+y^2}\right)dy = 0\,.$

17. $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{y}{x} - \dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x} + 1\right)dx + \left(\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)dy = 0\,.$

Решете следните диференциални уравнения, ако имат интегриращи множители от посочения вид

18. $(3x - y)\,dx - (3y - x)\,dy = 0\,,\quad \mu = \varphi\,(x + y)\,.$

19. $xy^2\,dx + (x^2y - x)\,dy = 0\,,\quad \mu = \varphi\,(x\,.\,y)\,.$

20. $(y^2 + x^2 + x)\,dy - y\,dx = 0\,,\quad \mu = \varphi\,(x^2 + y^2)\,.$

Отговори:

1. $x^3y^2 + 7x = C\,.$

2. $6y + 12y^3 - 9x^2y^2 + 2x^3 = C$

3. $x\ln y - x^2 - y^2 = C\,.$

4. $xe^y + ye^x + 3x - 2y = C\,.$

5. $x \sin y + y \cos x + e^y = C$.

6. $\sqrt{x^2 + y^2} + \ln |xy| + \frac{x}{y} = C$.

7. $\frac{\sin^2 x}{y} + \frac{x^2 + y^2}{2} = C$.

8. $y\sqrt{1 + x^2} + x^2 y - y \ln x = C$.

9. $\mu(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x = Ce^{\frac{y}{x}}$.

10. $\mu(y) = \frac{1}{y}, \quad xy - \ln y = C$.

11. $\mu(x) = \frac{1}{x}, \quad 3x^2y + x^3y^3 = C$.

12. $\mu(y) = \frac{1}{y}, \; x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C$.

13. $\mu(y) = \frac{1}{y^2(1 + y^2)}, \quad \frac{x^2}{y} + \frac{1}{y} \operatorname{arctg} y = C$.

14. $x + y + \ln(x^2 + y^2) = C$.

15. $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$.

16. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3} + x - \frac{1}{2}y^2 = C$.

17. $\sin\frac{y}{x} - \cos\frac{y}{x} + x - \frac{1}{y} = C$.

18. $\mu = (x + y), \; (x + y)^2(x - y) = C$.

19. $\mu = \frac{1}{xy}, \quad xy - \ln y = C$.

20. $\mu = \frac{1}{x^2 + y^2}, \quad y = \operatorname{arctg}\frac{x}{y} + C$.

8. Задачи, които водят към съставяне и решаване на диференциални уравнения

Ние вече разгледахме някои задачи, в които като се използува геометричният смисъл на първата производна, се съставят диференциални уравнения.

Много други проблеми и задачи от различните области на науката водят до съставяне и решаване на диференциални уравнения. При такива задачи се иска да се намери зависимостта между променливи величини, участвуващи в някакъв физически, химически и т.н. процеси.

Когато се пристъпва към съставяне на диференциалното уравнение е необходимо да се направи следното:

а)Да се избере независимата променлива величина и променливата величина функция.

б) При зададено нарастване на аргумента да се изрази съответното нарастване на функцията чрез величините, за които се говори в условието на задачата.

в) Съставяме отношението от нарастване на функцията към нарастването на аргумента.

г)Преминаваме към граничен преход в така съставеното отношение и по този начин се получава диференциално уравнение.

След това се пристъпва към решаване и изследване решението на съответното диференциално уравнение, като:

1. Определяме типа на диференциалното уравнение и съобразно това избираме метода за решаването му.

2. Намираме общото решение.

3. Намираме частното решение, удовлетворяващо дадените начални условия.

4. Изчисляваме (ако е необходимо това) някои стойности на спомагателните параметри (коефициента на пропорционалност и др.), използувайки допълнителните условия на задачата.

5. Намираме общия закон на разглеждания процес и, ако трябва, числените стойности на исканите величини.

Забележка. Понякога диференциалното уравнение може да се състави по съвсем прост начин, като се използува геометричния или механичния смисъл на производната.

Освен това при съставяне на диференциалното уравнение, в зависимост от условията на задачата, се използуват съответни закони от физиката, механиката, химията и други науки.

Примери:

1. В един съд със 100 литра вода е разтворена 10 кг готварска сол. Всяка минута от съда изт[illegible] литра разтвор и се вливат още 3 литра чиста вода при непрекъснато разбъркване така, че разтворът [illegible] с равномерна концентрация. Колко килограма готварска сол ще се съдържат в разтвора след 20 [illegible]

Решение. За независима променлива величина избираме времето t, а търсената функция е ко[illegible]вото сол Q, съдържащо се в съда след време t. Ясно е, че Q е функция от t т.е. $Q = Q(t)$.

За всяка минута изтичат 5 литра разтвор от съда, а се вливат 3 литра вода, следователно след [illegible] t от началото на опита съда ще има $(100 + 3t - 5t) = (100 - 2t)$ л разтвор. Нека да означим количе[illegible] сол, съдържащо се в съда в момента t с Q кг. Тогава в 1 л разтвор ще се съдържат $\dfrac{Q}{100 - 2t}$ кг со[illegible] концентрацията на разтвора в момента t е $k_t = \dfrac{Q}{100 - 2t}$ кг/л. Нека да намерим с колко се е изм[illegible] количеството сол в съда от момента t до момента $t + \Delta t$. За време Δt количеството сол в съда се е нам[illegible] с. ΔQ , защото с изтеклия разтвор се изхвърля и сол. За време Δt ще изтекат $5\Delta t$ л разтвор, а тъй [illegible] във всеки литър има по $k_t = \dfrac{Q}{100 - 2t}$ кг сол, то за същото време ще се изхвърлят от съда $5\Delta t k_t$ [illegible]

Това ще бъде така, ако през периода Δt концентрацията е постоянно равна на k_t. Но тъй като във [illegible] момент през това време Δt се влива вода и изтича разтвор, то k_t ще се изменя с безкрайно малка вел[illegible] $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Тогава за време Δt ще изтекат $5\Delta t$ л разтвор, който ще съдържа $5\Delta t(k_t + \alpha)$ [illegible] където $\alpha \to 0$ при $\Delta t \to 0$, т.е. за време Δt количеството сол Q се е изменило с ΔQ и

$$\Delta Q = -5\Delta t\,(k_t + \alpha)\,.$$

Знакът минус показва, че солта намалява.

Образуваме отношението $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$, т.е.

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -5\,(k_t + \alpha)\,.$$

Преминавайки към граничен преход при $\Delta t \to 0$, ще получим следното диференциално урав[illegible]

$$Q'(t) = -5k_t$$

или

$$\frac{dQ}{dt} = -5\,\frac{Q}{100 - 2t}\,.$$

Уравнението е с отделящи се променливи:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{5dt}{100 - 2t}\,.$$

Интегрираме:

$$\ln Q = \frac{5}{2}\ln(100 - 2t) + \ln C \quad \text{или} \quad Q = C\,(100 - 2t)^{\frac{5}{2}}\,.$$

Като вземем предвид, че в момента $t_0 = 0$ (начало на опита) солта е била $Q = 10$ кг, то пр[illegible] начални условия можем да намерим константата C от общото решение:

$$10 = C\,(100 - 2\,.\,0)^{\frac{5}{2}} \quad \text{или} \quad C = \frac{1}{10000}\,.$$

И така изменението на количеството сол се определя по формулата:

$$Q = \frac{1}{10000}\,(100 - 2t)^{\frac{5}{2}}\,.$$

Тогава в момента $t = 20$ количеството сол, съдържащо се в съда, ще бъде

$$Q(20) = \frac{1}{10000} \cdot (100 - 2 \cdot 20)^{\frac{5}{2}} = 10^{-4} \cdot (60)^{\frac{5}{2}} = 10^{-4} \cdot 10^2 \cdot 6^2 \cdot 2\sqrt{15} \approx 2{,}7 \text{ кг} .$$

2. Скоростта на разпадане на радия е пропорционална на наличното количество радий R. Намерете зависимостта на R от времето t; съставете диференциално уравнение и определете коефициента на пропорционалност, ако опитно е установено, че за 1600 години следствие на разпадането остава половината от първоначалното количество радий.

Решение. Ясно е, че количеството радий R е функция на времето t т.е. $R = R(t)$.

Търсим тази функционална зависимост. При съставяне на диференциалното уравнение вземаме предвид, че скоростта на разпадане е равна на първата производна $R(t)$ спрямо , т.е. на $\frac{dR}{dt}$.

Съгласно условието на задачата, тази скорост е пропорционална на наличното количество радий.

Следователно

$$\frac{dR}{dt} = k \cdot R \quad (k - \text{коефициент на пропорционалност})$$

Решаваме това уравнение:

$$\int \frac{dR}{R} = \int k dt + \ln C ; \quad \ln R = kt + \ln C ;$$

$$\ln \frac{R}{C} = kt ; \quad \frac{R}{C} = e^{kt} ; \quad R = C \cdot e^{kt} .$$

Нека в началния момент $t_0 = 0$ количеството радий е било R_0. При тези начални условия намираме константата C:

$$R_0 = Ce^{k.0} \quad \text{или} \quad C = R_0 .$$

Заместваме $C = R_0$ в общото решение и получаваме

$$R = R_0 e^{kt} .$$

От допълнителното условие на задачата, че при $t = 1600$, $R = \frac{R_0}{2}$,намираме коефициента k:

$$\frac{R_0}{2} = R_0 e^{k.1600} ; \quad \frac{1}{2} = e^{k.1600} .$$

Логаритмуваме двете страни на последното равенство:

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{1600k} ; \quad - \ln 2 = 1600k ; \quad k = -\frac{\ln 2}{1600} .$$

Следователно търсената функция е

$$R = R_0 \, e^{-\frac{\ln 2}{1600} t} .$$

Ако вземем предвид, че $k = \frac{- \ln 2}{1600} \approx - 0{,}00043$, то

$$R = R_0 \, e^{-0{,}00043t} .$$

3. По закона на Нютон скоростта на охлаждане на някакво тяло във въздуха е пропорционално на разликата между температурата T на тялото и температурата на въздуха T_0. Ако температурата на въздуха е 20° С и тялото в течение на 20 мин. се охлажда от 100° до 60°, то след колко време температурата на тялото ще се понижи на 30°С?

Решение. Ясно е, че температурата на тялото T ще бъде функция на времето t, т.е. $T = T(t)$. Скоростта на охлаждане в даден момент t е първата производна на T спрямо t, т.е. $\frac{dT}{dt}$. Съгласно условието на задачата тази скорост е пропорционална на температурната разлика $T - T_0$ и следователно

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_0) \quad (k \text{ – коефициент на пропорционалност}).$$

Решаваме това диференциално уравнение:

$$\int \frac{dT}{T - T_0} = \int k \cdot dt + \ln C ; \quad \ln (T - T_0) = kt + \ln C ;$$

$$\ln\left(\frac{T - T_0}{C}\right) = kt ; \quad \frac{T - T_0}{C} = e^{kt} ; \quad T - T_0 = Ce^{kt} ;$$

$$T = T_0 + Ce^{kt} ; \quad T = 20 + Ce^{kt} .$$

Константата C ще намерим от условието, че в началния момент $t = 0$ температурата на тялото била $T = 100°$, а на въздуха е била $20°$. Замествайки тези начални условия в общото решение, намираме

$$100 = 20 + C.e^{k.0} \text{ или } C = 80.$$

Следователно

$$T = 20 + 80 \cdot e^{kt}.$$

От допълнителното условие, а именно, че за време $t = 20$ мин. температурата се е понижила от 100° до 60°, намираме коефициента k:

$$60 = 20 + 80e^{k.20} ; \quad 40 = 80e^{k.20} ; \quad e^{k.20} = \frac{1}{2} .$$

Логаритмуваме последното равенство и последователно намираме:

$$k \cdot 20 = \ln \frac{1}{2} ; \quad k = \frac{1}{20} \ln \frac{1}{2} = \ln \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}} .$$

Следователно

$$T = 20 + 80 \cdot e^{t.\ln \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{20}}}$$

или

$$T = 20 + 80 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} .$$

Последната формула изразява търсената зависимост.
При $T = 30$, получаваме

$$30 = 20 + 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} ; \quad 10 = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} ; \quad \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} ;$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}} ; \quad \frac{t}{20} = 3 ; \quad t = 60 .$$

След 60 минути температурата на тялото ще бъде 30°.

Задачи:

1. Намерете уравнението на крива, за която ъгловият коефициент на допирателната в коя да е нейна точка е n пъти по-голяма от ъгловия коефициент на правата, която минава през същата точка и началото на координатната система.

2. Намерете уравнението на кривата, минаваща през точката (0;2), за която ъгловият коефициент на допирателната в коя да е нейна точка е равен на $\frac{1}{3y^2}$.

3. Намерете уравнението на кривата, минаваща през точката (2; 3) и притежаваща свойството: отсечката от коя да е нейна допирателна, заключена между координатните оси, се дели на половина в допирната точка.

4. Определете пътя s, изминат от тяло за време t, ако неговата скорост е пропорционална на изминатия път и ако тялото е изминало 100 м за 10 сек. и 200 м за 15 сек.

5. Тяло, излизайки от състояние на покой, се движи със скорост, която за всеки момент t се определя по формулата $v = (5t^2 + 2)$ м/сек. Намерете закона за движение на тялото и пътя, изминат от тялото за 3 сек.

6. Точка се движи по права линия с постоянно ускорение. Намерете закона на движение на тази точка.

7. Моторна лодка се движи в спокойна вода със скорост 5м/сек. Нейният мотор бил изключен и след 40 сек. скоростта на лодката се намалила до 2 м/сек. Определете скоростта на лодката 2 мин. след спирането на мотора, ако се знае, че съпротивлението на водата е пропорционално на скоростта на движение.

8. Кораб забавя своето движение вследствие съпротивлението на водата, което е пропорционално на скоростта на кораба. Началната скорост на кораба е била 10 м/сек., скоростта му след 5 сек. е станала 8 м/сек. След колко време скоростта му ще се намали на 1 м/сек.?

9. В съд, съдържащ 100 л разтвор, има 10 кг сол. В съда се влива вода със скорост 5 л в минута. Постъпващата вода постоянно се разбърква и сместа изтича със същата скорост. Колко сол ще остане в съда след 1 час?

10. В съд, съдържащ 10 л вода, със скорост 2 л в минута се влива разтвор с концентрация 0,3 кг сол. Постъпващият в съда разтвор се разбърква постоянно и получената смес изтича от съда със същата скорост. Колко сол ще остане в съда след 5 мин?

Отговори:

1. $y' = n\dfrac{y}{x}$; $y = Cx^n$.

2. $y^3 = x + 8$.

3. $xy = 6$.

4. $\dfrac{ds}{dt} = ks$; $s = 25 \cdot 2^{\frac{t}{5}}$.

5. $s = \dfrac{5}{3}t^3 + 2t$; 51м.

6. $\dfrac{dv}{dt} = a$; $a = \text{const}$; $s = \dfrac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$.

7. $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$; $v = 5\left[\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{1}{40}}\right]^t$; 0,32 м/сек.

Силата на съпротивлението е $F = m \cdot a$ (закон на Нютон), където m – масата на тялото, a – ускорението.

8. $m\dfrac{dv}{dt} = -kv$; $t = -\dfrac{5\ln 10}{\ln 0{,}8}$ сек.

9. 0,5 кг.

10. $\dfrac{dy}{dt} = 0{,}6 - 0{,}2y$; $y = 3 - 3e^{-0{,}2t}$; $\approx 1{,}9$ кг.

9. Диференциални уравнения от по-висок ред, допускащи понижаване на реда

1. Диференциално уравнение от вида

$$(9.1) \qquad y^{(n)} = f(x)\,,$$

където $n > 1$ е естествено число, а $f(x)$ е непрекъсната функция на x, може да се реши с n последов
интегрирания.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = \varphi_1(x) + C_1\,,$$

$$y^{(n-2)} = \int (\varphi_1(x) + C_1)dx + C_2 = \varphi_2(x) + C_1x + C_2\,,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$y = \varphi_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_n\,.$$

2. Диференциално уравнение, което не съдържа търсената функция y и нейните производни
$k - 1$-ви ред включително има вида

$$(9.2) \qquad F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0\,,\ k \geq 1\,.$$

Със субституцията $y^{(k)} = z$, уравнението (9.2) се преобразува в уравнение $F(x, z, z', \dots, z^{(n-}$
на което редът е с k единици по-нисък от реда на даденото уравнение. От това уравне
определя
$z = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$, а след това от уравнението $y^{(k)} = f(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$ чрез k – кратно интегр
се намира y.

3. Диференциално уравнение, което не съдържа независимата променлива x има вида

$$(9.3) \qquad F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0\,.$$

Субституцията $y' = p$ позволява да се понижи реда с 1. При това p се разглежда като нова не
функция от y.

$$y' = \frac{dy}{dx} = p(y)\,,$$

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} = p.p'\,,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\cdot\frac{dy}{dx} = \left[\frac{dp}{dy}.\frac{dp}{dy} + p\frac{d^2p}{dy^2}\right].p\,.$$

След заместване на тези равенства в (9.3) получаваме

$$\Psi(y, p, p', \dots, p^{(n-1)}) = 0\,.$$

4. Диференциално уравнение, хомогенно спрямо $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$ има вида

$$(9.4) \qquad F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0\,.$$

Редът му се понижава с единица чрез субституцията $\dfrac{y'}{y} = z$, където z е нова неизвестна функ
x. Тъй като $\dfrac{y''}{y} = z' + z^2$; $\dfrac{y'''}{y} = z'' + z^3 + 3zz', \dots$, след заместване в (9.4) се получава

$$\psi(x, z, z', \dots, z^{(n-1)}) = 0\,.$$

Примери:
Да се решат уравненията:

1. $\qquad y'''\,.\,\sin^4 x = \sin 2x\,.$

Решение. Уравнението се решава спрямо y''' и след трикратно интегриране се получава

$$y''' = \frac{\sin 2x}{\sin^4 x} = \frac{2\cos x}{\sin^3 x} \quad ; \quad y'' = -\frac{1}{\sin^2 x} + C_1 \, ;$$

$$y' = \operatorname{ctg} x + C_1 x + C_2 \, ;$$

$$y = \ln|\sin x| + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3 \quad \text{или} \quad y = \ln|\sin x| + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \, .$$

2. $$xy'' = y' + x.\sin\frac{y'}{x} \, .$$

Решение. Даденото уравнение не съдържа явно функцията y. Полага се $y' = z$, $y'' = z'$ и след заместване даденото уравнение се преобразува в уравнение от първи ред. Последното се разделя на x и се получава хомогенното уравнение $z' = \frac{z}{x} + \sin\frac{z}{x}$. След полагането $z = xu$, $z' = u + x\,u'$ се получава уравнение с отделящи се променливи $xu' = \sin u$. Общото му решение е $\operatorname{tg}\frac{u}{2} = C_1 x$, $u = 2\operatorname{arctg} C_1 x$,

$$z = 2x\operatorname{arctg} C_1 x = y' \, ,$$

$$dy = 2x\operatorname{arctg} C_1 x \, dx \, .$$

Тогава общото решение на даденото уравнение е:

$$y = x^2.\operatorname{arctg} C_1 x - \frac{1}{C_1}x + \frac{1}{C_1^2}\operatorname{arctg} C_1 x + C_2 \quad \text{или}$$

$$C_1^2 y = (C_1^2 x^2 + 1)\operatorname{arctg}(C_1 x) - C_1 x + C_2 \, .$$

3. $$2y'^2 = y''(y-1) \, .$$

Решение. Уравнението не съдържа независимата променлива x. Полага се $y' = p(y)$. Тогава $y'' = p\frac{dp}{dy} = pp'$ и се получава

$$2p^2 = pp'(y-1) \, , \quad p[2p - p'(y-1)] = 0 \, .$$

Последното уравнение се разлага на две уравнения: $p = 0$ и $2p = p'(y-1)$. Решението на първото $y' = 0$ е $y = C$. Второто е уравнение с отделящи се променливи. Решението му е $C_1 p = (y-1)^2$. Тогава

$$C_1 y' = (y-1)^2 \, , \quad \frac{C_1 dy}{(y-1)^2} = dx \, , \quad C_1 = (x + C_2)(y-1) \, .$$

Решенията на даденото уравнение са: $C_1 = (x + C_2)(y-1)$; $y = C$.

4. $$x^2 yy'' = (y - xy')^2 \, .$$

Решение. Даденото уравнение е от вида (9.4). Разделя се на y^2 и се получава

$$x^2\frac{y''}{y'} = \left(1 - x\frac{y'}{y}\right)^2 .$$

Полага се $\frac{y'}{y} = z$, тогава $y'' = y'z + yz'$, $\frac{y''}{y} = \frac{y'}{y}z + z' = z^2 + z$. След заместване в последното уравнение се получава

$$x^2 z' + 2xz = 1 \, .$$

Това уравнение е линейно от първи ред. То може да се запише и така:

$$(x^2 z)' = 1 \, ,$$

откъдето

$$x^2 z = x + C_1 \;, \; z = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \;;$$

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2}\right) dx \;;$$

$$\ln|y| = \ln(C_2 x) - \frac{C_1}{x} = \ln(C_2 x) + \ln e^{-\frac{C_1}{x}} \;.$$

Забележка. При търсене на частно решение на уравнения от по-висок ред от указаните видове е необходимо първо да се намери общото решение, а едва след това да се определят стойностите на всички константи, По-добре е всяка от тях да се определи веднага след като се появи в процеса на решаване.

5. $y''' = y''^2$, ако $y''(0) = \frac{1}{2}$, $y'(3) = 1$, $y(3) = 0$.

Решение. Уравнението е от вида (9.2). Полагаме $y'' = z$, тогава $y''' = z'$.

$$z' = z^2 \;, \; z = -\frac{1}{x + C_1} \;, \; y'' = -\frac{1}{x + C_1} \;, \; \frac{1}{2} = -\frac{1}{C_1} \;, \; C_1 = -2 \;,$$

$$y'' = \frac{1}{2 - x} \;, \; y' = -\ln|2 - x| + C_2 \,, \; 1 = -\ln|-1| + C_2 \;, \; C_2 = 1 \;,$$

$$y' = 1 - \ln|2 - x| \;, \; y = x - x \,.\, \ln|2 - x| + x + 2\ln|2 - x| + C_3 \;, \; C_3 = -6 \,,$$

$$y = 2x + (2 - x)\ln|2 - x| - 6 \,.$$

Задачи:

Да се решат уравненията:

1. $y''' = e^{2x}$.
2. $y'' = \operatorname{arctg} x$.
3. $x^2 y''' = \ln x$.
4. $y'' = x \,.\, \sin x$.
5. $y''' = x + \cos x$.
6. $x y'' + y' = 0$.
7. $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$.
8. $2xy'y'' = y'^2 + 1$.
9. $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.
10. $xy^{V} - y^{IV} = 0$.
11. $y'' = \sqrt{1 - (y')^2}$.
12. $y'' y^3 = 1$.
13. $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$.
14. $2y(y')^3 + y'' = 0$; $y(0) = 0$; $y'(0) = -3$.
15. $(x^2 + 1)(y'^2 - y y'') = xy y'$.
16. $xy y'' + x y'^2 = 3yy'$.

Отговори:

1. $y = \frac{1}{8} e^{2x} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.
2. $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} x \ln(1 + x^2) + C_1 x + C_2$.
3. $y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3 - \frac{1}{2} x \ln^2 x$.
4. $y = C_1 x + C_2 - x \sin x - 2 \cos x$
5. $y = \frac{1}{24} x^4 + C_1 x^2 + C_2 x + C_3 - \sin x$.
6. $y = C_1 \ln|x| + C_2$.
7. $y = C_2 x + C_3 + C_1 \ln|x| - \frac{1}{2x}$.
8. $y = \frac{2}{3C_1}(C_1 x - 1)^{3/2} + C_2$.

9. $y = \frac{C_1x - 1}{C_1^2} e^{C_1x+1} + C_2$.

10. $y = C_1x^5 + C_2x^3 + C_3x^2 + C_4x + C_5$.

11. $y = C_2 - \cos(x + C_1)$.

12. $C_1y^2 - 1 = (C_1x + C_2)^2$.

13. $e^y = (x + C_2)^2 + C_1$.

14. $y^3 - y = 3x$.

15. $y = C_2\left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{C_1}$.

16. $y = C_2\sqrt{x^4 + C_1}$.

10. Линейни хомогенни диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти

Диференциално уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{10.1}$$

където $a_k = \text{const}$ $(k = 1, 2, \ldots n)$ – се нарича линейно хомогенно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициенти.

Общото решение на уравнение (10.1) се дава с формулата

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \; (C_k = \text{const}, \; k = 1, 2, \ldots n), \tag{10.2}$$

където $y_1, y_2, \ldots, y_n$ са линейно независими частни решения на (10.1). Те се намират с помощта на характеристичното уравнение

$$r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n = 0, \tag{10.3}$$

което като алгебрично има n корена – комплексни и реални.

Възможни са следните случаи:

1. Уравнението (10.3) има n различни реални корена $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Тогава на всеки от тях съответства частно решение $e^{r_1x}, e^{r_2x}, \ldots e^{r_nx}$ и общото решение на уравнението (10.1) приема вида

$$y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + \ldots + C_ne^{r_nx}.$$

2. Корените на (10.3) са реални, но между тях има кратни. Нека например $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = r$, т.е. r е k-кратен корен на (10.3), а всички останали $n - k$ корена са различни. Съответните частни решения в този случай са:

$$e^{rx};\; xe^{rx};\; x^2e^{rx};\; \ldots;\; x^{k-1}e^{rx};\; e^{r_{k+1}x};\; e^{r_nx}.$$

и общото решение има вида

$$y = (C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1})e^{rx} + C_{k+1}e^{r_{k+1}x} + \ldots + C_ne^{r_nx}$$

3. Уравнението (10.3) има двойки еднократни комплексно спрегнати корени. Нека за определеност $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Тогава съответната на r_1 и r_2 част в общото решение (10.2) на уравнение (10.1) има вида

$$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

4. Уравнението (10.3) има двойка спрегнати k-кратни корени $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$, $\left(k \leq \frac{n}{2}\right)$. Тогава съответната им част в общото решение (10.2) има вида

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2x + \ldots + C_kx^{k-1})\cos\beta x + (C_{k+1} + C_{k+2}x + \ldots + C_{2k}x^{k-1})\sin\beta x].$$

Примери:

Да се решат уравненията:

1. $y^{V} - 5y''' + 4y' = 0$.

Решение. Съставя се характеристичното уравнение

$$r^5 - 5r^3 + 4r = 0 .$$

$r_1 = 0,\ r_2 = -1,\ r_3 = 1,\ r_4 = 2,\ r_5 = -2$. Корените са реални и различни, следователно

$$y = C_1 + C_2e^{x} + C_3e^{-x} + C_4e^{2x} + C_5e^{-2x} .$$

2. $$y^{V} - 6y^{IV} + 9y''' = 0 .$$

Решение.

$$r^5 - 6r^4 + 9r^3 = 0 ,\ r_1 = r_2 = r_3 = 0 ,\ r_4 = r_5 = 3$$

На трикратния корен $r = 0$ съответстват частните решения $y_1 = e^{0x}$, $y_2 = xe^{0x}$, $y_3 = x^2e^{0x}$. двукратния корен $r = 3$ — $y_4 = e^{3x}$; $y_5 = xe^{3x}$.Тогава

$$y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + (C_4 + C_5x)e^{3x} .$$

3. $$y^{IV} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0 .$$

Решение.

$$r^4 + 2r^3 + 4r^2 - 2r - 5 = 0 .$$

	1	2	4	−2	−5
1	1	3	7	5	0
−1	1	2	5	0	

По правилото на Хорнер се намират корените:

$$(r - 1)(r + 1)(r^2 + 2r + 5) = 0 ;$$

$$r_1 = 1 ,\ r_2 = -1 ,\ r_3 = -1 + 2i ,\ r_4 = -1 - 2i ;$$

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{-x}(C_3\cos 2x + C_4\sin 2x) .$$

4. $$y^{V} - 2y^{IV} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0$$

Решение.

$$r^5 - 2r^4 + 2r^3 - 4r^2 + r - 2 = 0 ;$$

$$(r - 2)\,(r^2 + 1)^2 = 0 ,\ r_1 = 2 ,\ r_2 = r_3 = i ,\ r_4 = r_5 = -i ;$$

$$y = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x \ .$$

Задачи:

Да се решат уравненията:

1. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.
2. $2y''' - 3y'' + y' = 0$.
3. $y''' - 3y' - 2y = 0$.
4. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.
5. $y^{IV} + 13y'' + 36y = 0$.
6. $y''' - y = 0$.
7. $y^{V} + 2y''' + y' = 0$.
8. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$
9. $y^{V} + 4y^{IV} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$.
10. $y^{(8)} - y^{(6)} - 9y^{IV} - 11y'' - 4y = 0$
11. $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, ако $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$.
12. $y'' - 2y' + 2y = 0$, ако $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

Отговори:

1. $y = C_1e^{-\frac{4}{3}x} + C_2e^{2x}$.
2. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{\frac{1}{2}x}$.
3. $y = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3x)e^{-x}$.
4. $y = e^{2x}(C_1 + C_2x + C_3x^2)$.
5. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$.
6. $y = C_1e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x)$.
7. $y = C_1 + (C_2 + C_3x)\cos x + (C_4 + C_5x)\sin x$.
8. $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$.
9. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{-2x} + e^{-x}(C_4\cos x + C_5\sin x)$.
10. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + (C_3 + C_4x + C_5x^2)\cos x + (C_6 + C_7x + C_8x^2)\sin x$.
11. $y = e^{-x}(3x^2 + x - 1)$.
12. $y = e^x . \sin x$.

11. Линейни нехомогенни диференциални уравнения от n-ти ред с постоянни коефициенти

Диференциално уравнение от вида

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots + a_{n-1} y' + a_n y = F(x), \tag{11.1}$$

където $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са константи, а $F(x)$ е известна функция на независимата променлива x се нарича лин нехомогенно диференциално уравнение от n-ти ред с постоянни коефициеннти.

Общото решение на (11.1) има вида $y = Y + \eta$, където Y е общото решение на съответн хомогенно уравнение, а η е едно частно решение на (11.1). Намирането на η, когато $F(x)$ е произ функция на x може да стане чрез метода на вариране на константите (Метод на Лагранж). Нека

$$Y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \qquad (C_\nu - \text{const}, \nu = \overline{1,n}) \tag{11.2}$$

е общото решение на хомогенното уравнение, получено от (11.1) при $F(x) = 0$. Частното решение η е от

$$\eta = C_1(x) y_1 + C_2(x) y_2 + \ldots + C_n(x) y_n \tag{11.3}$$

където константите C_ν от (11.2) са заменени с функциите $C_\nu(x)$ ($\nu = \overline{1,n}$) . Производните на тези фу се определят от системата линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{llll} C'_1(x)y_1 & + C'_2(x)y_2 + \ldots & + C'_n(x)y_n & = 0 \\ C'_1(x)y'_1 & + C'_2(x)y'_2 + \ldots & + C'_n(x)y'_n & = 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ C'_1(x)y_1^{(n-1)} & + C'_2(x)y_2^{(n-1)} + \ldots & + C'_n(x)y_n^{(n-1)} & = F(x) \end{array} \right. \tag{11.4}$$

Нека $C'_\nu(x) = \varphi_\nu(x)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ са решения на системата (11.4). Тогава след интегриране се полу

$$C_\nu(x) = \int \varphi_\nu(x)\, dx, \quad \nu = 1,2,\ldots,n, \tag{11.5}$$

където интеграционните константи са положени равни на нула , тъй като се търси произволно ч решение. Като се заместят получените функции в (11.3) се получава частното решение η.

За някои специални видове функции $F(x)$, частното решение може да се намери без интегр По вида на $F(x)$ може предварително да се определи вида на частното решение η, където неизве само числови коефициенти. Те се определят като се замести η в даденото нехомогенно уравнен сравняват коефициентите пред подобните членове в двете страни на полученото равенство.

I. Нека $F(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$, където $P_m(x)$ е полином от m-та степен.

Случай 1. Ако λ не е корен на характеристичното уравнение (10.3), частното решение е от вид

$$\eta = e^{\lambda x} Q_m(x) . \tag{11.6}$$

Случай 2. Ако λ е k-кратен корен на (10.3) частното решение е от вида

$$\eta = x^k e^{\lambda x} Q_m(x) . \tag{11.7}$$

И в двата случая $Q_m(x)$ е полином от m-та степен с неопределени коефициенти.

II. Нека $F(x) = e^{\alpha x} [\, P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x \,]$,
където $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ са полиноми от степени съответно m и n.

Случай 1. Ако $\alpha + \beta i$ не е корен на характеристичното уравнение (10, 3), частното решение е от

$$\eta = e^{\alpha x} [\, M_p(x) \cos \beta x + N_p(x) \sin \beta x \,] . \tag{11.8}$$

Случай 2. Ако $\alpha + \beta i$ е k-кратен корен на (10.3), частното решение е от вида

$$\eta = x^k e^{\alpha x} [\, M_p(x) \cos \beta x + N_p(x) \sin \beta x \,] . \tag{11.9}$$

И в двата случая $M_p(x)$ и $N_p(x)$ са полиноми с неопределени коефициенти от степен p, равна на по-голямото от числата m и n.

Примери:

Да се решат уравненията:

1) $$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение: Характеристичното уравнение $r^2 + 1 = 0$ има корени $r_1 = i$ и $r_2 = -i$. Общото решение на хомогенното уравнение е

$$Y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тъй като $F(x) = \frac{1}{\sin x}$, налага се използването на метода на Лагранж, за да се намери едно частно решение на даденото уравнение. То има вида $\eta = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x$.
За определяне на функциите $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ се образува системата

$$\begin{vmatrix} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \dfrac{1}{\sin x}. \end{vmatrix}$$

Решението ѝ е $C_1'(x) = -1$; $C_2'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \ln|\sin x|$.

Като се интегрира всяко от получените уравнения се получава

$$C_1(x) = -\int dx = -x; \quad C_2(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx.$$

Следователно $\eta = -x\cos x + \ln|\sin x| \,.\, \sin x$.
Общото решение на даденото уравнение е:

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x \,.\, \ln|\sin x| \quad \text{или}$$

$$y = (C_1 - x)\cos x + (C_2 + \ln|\sin x|)\sin x.$$

2) $$y'' + y = 4xe^x.$$

Решение: Характеристичното уравнение има корени $r_1 = i$, $r_2 = -i$,

$$Y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

$F(x) = 4xe^x = e^x P_1(x)$. $\lambda = 1$ не е корен на характеристичното уравнение. Частното решение е от вида (11.6), т.е. $\eta = e^x(Ax + B)$

$$\eta' = e^x(Ax + B + A), \quad \eta'' = e^x(Ax + 2A + B).$$

Заместваме η'' и η в даденото уравнение и получаваме тъждеството

$$(2Ax + 2B + 2A)\,e^x = 4xe^x.$$

Делим двете страни на e^x и сравняваме коефициентите на двата полинома. Получаваме

$$\begin{vmatrix} A = 2 \\ A + B = 0. \end{vmatrix}$$

Решението на тази система е $A = 2$, $B = -2$.
Следователно $\eta = e^x(2x - 2)$,

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x(2x - 2).$$

3. $$5y''' - 7y'' - 3 = 0.$$

Решение: $5y''' - 7y'' = 3$. Характеристичното уравнение $5r^3 - 7r^2 = 0$ има корени

$$r_1 = r_2 = 0, \quad r_3 = \frac{7}{5} \quad \text{и } Y = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{7}{5}x}. \; F(x) = e^{0x}P_0(x) .$$

$\lambda = 0$ е двукратен корен на характеристичното у-ние. Частното решение е от вида (11.7), т.е. $\eta = A$
Тогава $\eta' = 2Ax$, $\eta'' = 2A$, $\eta''' = 0$ и като се заместят в даденото уравнение се получава тъждест

$$-14A = 3,$$

откъдето $\quad A = \frac{-3}{14} \quad$ и $\quad \eta = \frac{-3}{14}x^2$.

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{\frac{7}{5}x} - \frac{3}{14}x^2 .$$

4) $\qquad y''' - y'' + 4y' - 4y = 5\cos x - x\sin x.$

Решение: Характеристичното уравнение $r^3 - r^2 + 4r - 4 = 0$ има корени $r_1 = 1, r_2 = 2i, r_3 = -$

$$Y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x$$

$$F(x) = 5\cos x - x\sin x = e^{0.x}[\, P_0(x)\cos x + Q_1(x)\sin x \,] .$$

$\alpha = 0, \beta = 1 \quad 0 + i$ не е корен на характеристичното уравнение.
Частното решение е от вида (11.8):

$$\eta = (Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x,$$
$$\eta' = (A + Cx + D)\cos x + (C - Ax - B)\sin x,$$
$$\eta'' = (2C - Ax - B)\cos x - (2A + Cx + D)\sin x,$$
$$\eta''' = (-3A - Cx - D)\cos x - (3C - Ax - B)\sin x.$$

Заместваме в даденото уравнение и получаваме тъждеството:

$$[(3C - 3A)x + (A - 3B - 2C + 3D)]\cos x +$$
$$+ [(5C - 3A)x + (2A - 3B + C + 3D)]\sin x = 5\cos x - x\sin x .$$

Приравняват се коефициентите пред $\sin x$ и $\cos x$ от двете страни и се получава:

$$(3C - 3A)x + A - 3B - 2C + 3D = 5$$
$$(5C - 3A)x + 2A - 3B + C + 3D = -x .$$

Като се приравнят коефициентите на равните степени на x във всяко от двете тъждества се намира

$$A = -\frac{1}{2}, \qquad B = -3, \qquad C = -\frac{1}{2}, \qquad D = -\frac{3}{2} .$$

$$y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3\sin 2x - (\frac{1}{2}x + 3)\cos x - (\frac{1}{2}x + \frac{3}{2})\sin x.$$

5) $\qquad y'' - 2y' + 2y = 2e^x\cos x .$

Решение: Характеристичното уравнение $r^2 - 2r + 2 = 0$ има корени $r_1 = 1 + i, r_2 = 1 - i$ и

$$Y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) ,$$
$$F(x) = 2e^x\cos x = e^x[\, P_0(x)\cos x + Q_0(x)\sin x \,] .$$

$\alpha = 1, \; \beta = 1, \qquad 1 + i$ е еднократен корен на характеристичното у-ние
Частното решение е от вида (11.9):

$$\eta = xe^x(A\cos x + B\sin x),$$

$$\eta' = e^x(A\cos x + B\sin x) + x.e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) ,$$
$$\eta'' = 2e^x(A\cos x + B\sin x - A\sin x + B\cos x) + x.e^x(2B\cos x - 2A\sin x) .$$

Заместваме в даденото уравнение и получаваме:

$$e^x(B\cos x - A\sin x) = e^x\cos x$$. Следователно

$$B = 1 \quad \text{и} \quad A = 0.$$

Частното решение на даденото уравнение е

$$\eta = xe^x\sin x$$

$$y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x)$$

Забележка: В случай, че $F(x)$ е сума от две и повече функции от вида I и II, частното решение на (11.1) се представя като сума на частните решения, съответстващи на всяка от функциите, участващи в $F(x)$.

6) $$y'' + y = 4xe^x + \frac{1}{\sin x}.$$

Решение: Тук $F(x) = F_1(x) + F_2(x) = 4xe^x + \dfrac{1}{\sin x}$.

Частното решение на даденото уравнение η е сума от две частни решения η_1 и η_2, съответстващи на уравненията $y'' + y = 4xe^x$ и $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$. Тези две частни решения са получени съответно в примери 2) и 1):

$$\eta_1 = e^x(2x - 2) \quad \text{и} \quad \eta_2 = -x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Общото решение на даденото уравнение е

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + e^x(2x - 2) - x\cos x + \sin x \ln|\sin x|.$$

Задачи: Да се решат уравненията:

1) $y'' - 5y' + 6y = 2e^{3x}$.

2) $y''' - y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3$.

3) $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$.

4) $y^{IV} + 2y'' + y = 8\cos x$.

5) $y'' + y = 2\sin x + 4x\cos x$.

6) $y'' - y = x\sin x$.

7) $y'' + 9y = 15\sin 2x$, $y(0) = -7$, $y'(0) = 0$.

8) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = y'(0) = 0$.

9) $y''' - 3y'' + 2y' = 4e^{2x} - 3e^{3x}$.

10) $4y''' + y' = 3e^x + 2\sin\frac{x}{2}$.

11) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$.

12) $y'' + 4y = 2\,\mathrm{tg}\,x$.

Отговори:

1) $y = C_1e^{2x} + (C_2 + 2x)e^{3x}$.

2) $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{11}{8}$.

3) $y = C_1e^{-3x} + C_2\,x\,e^{-3x} - \dfrac{3}{5}\cos x + \dfrac{4}{5}\sin x$.

4) $y = (C_1 + C_2x - x^2)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

5) $y = C_1\cos x + (C_2 + x^2)\sin x$.

6) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{1}{2}x.\sin x$.

7) $y = -7\cos 3x - 2\sin 3x + 3\sin 2x$.

8) $y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$;

9) $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{2x} - \dfrac{1}{2}e^{3x} + 2xe^{2x}$.

10) $y = C_1 + C_2\cos\dfrac{x}{2} + C_3\sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{5}e^x - x\sin\dfrac{x}{2}$.

11) $y = C_1e^x + C_2xe^x + e^x\sqrt{4-x^2} + xe^x\arcsin\dfrac{x}{2}$;

12) $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - x\cos 2x + \sin 2x\ln|\cos x|$.