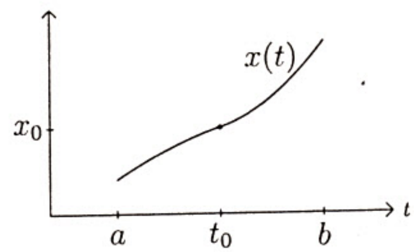
Теорема за съществуване и единственост на решение на задачата на Коши за ОДУ

Ако $f(t,x)$ е C^1-функция в околност на точка (t_0, x_0), то в някакъв интервал от време $t \in [a,b]$, където $a < t_0 < b$, задачата на Коши

$$\dot{x} = f(t,x)\,, \quad x(t_0) = x_0\,, \qquad t \in [a,b] \tag{1}$$

има единствено решение $x = x(t)$.



Доказателство. Отначало избираме b и триъгълник Δ, в който ще лежи графиката на решението при $t \geq t_0$. Построяваме решение $x(t)$ като граница на начупени линии на Ойлер и доказваме неговата единственост.

Конструкцията на решение за $t \in [a\,,t_0]$ е аналогична, смяната на посоката на времето съответства на уравнението $\dot{x} = -f(-t,x)$.

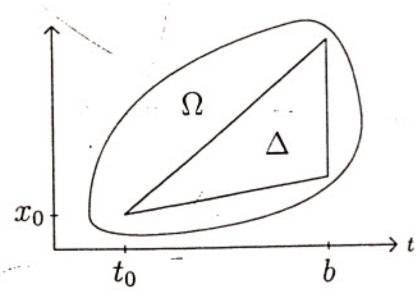
Избор на b. Фиксираме произволни $k_- < f(t_0,x_0)$ и $k_+ > f(t_0,x_0)$. Функцията f е непрекъсната, значи в околност Ω на (t_0,x_0) е в сила неравенството

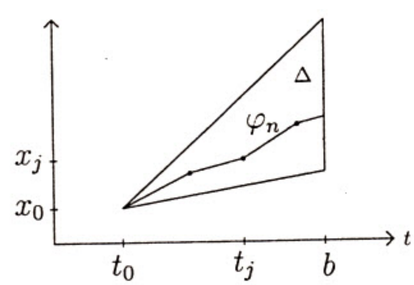
$$k_- < \; f(t,x) \; < \; k_+ \,.$$

Вписваме в Ω триъгълник Δ с връх (t_0,x_0), от този връх излизат страни с ъглови наклони k_- и k_+, а третата страна лежи върху правата $t = b$.

Тъй като f е C^1-функция, то съгласно теоремата за крайните нараствания съществуват константа на Липшиц $L = \sup f_x$ и $C = \sup |f_t|$ такива, че

$$f(t^*,x^*) - f(t,x) \leq C\,|t^* - t| + L.(x^* - x) \qquad \forall\,(t^*,x^*),(t,x) \in \Delta,\; x^* \geq x. \tag{2}$$





Начупени линии на Ойлер. За всяко n построяваме полигон $\varphi_n(t)$, т.е. начупена линия с възли (t_0,x_0), (t_1,x_1), (t_2,x_2), …, ъглов наклон при (t_j,x_j) равен на $f(t_j,x_j)$ и дължини на отсечките не надминаващи $\frac{1}{n}$. Аналитично,

$$\varphi_n(t) \;=\; x_j + (t - t_j)\,f(t_j,x_j) \qquad \text{за } t \in [t_j, t_{j+1}]\,.$$

Тъй като $k_- < f < k_+$, то графиките на $\varphi_n(t)$ са изцяло в Δ и могат да се продължат до $t = b$.

Конструкция на решение x(t). Редицата от функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$ е фундаментална. Наистина, с помощта на (2) достигаме до оценката[1]

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{|L|t} \cdot \frac{d}{dt}\Big[\,|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)|\,\mathrm{e}^{-|L|t}\Big] \;&=\; \pm|\dot\varphi_n(t) - \dot\varphi_m(t)| \;-\; |L|\,|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \\
&=\; \pm|f(t_j, \varphi_n(t_j)) - f(t_s, \varphi_m(t_s))| \;-\; |L|\,|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \\
&\le\; C\,|t_j - t_s| \;+\; |L|\,|\varphi_n(t_j) - \varphi_n(t)| \;+\; |L|\,|\varphi_m(t_s) - \varphi_m(t)| \\
&\le\; \frac{C}{\min(n,m)} \;+\; |L|\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\Big)\max(|k_+|, |k_-|) \;:=\; B_{n,m} \;=\; constant\;.
\end{aligned}
$$

Тук t_j е най–близкият отляво на t възел на φ_n, респективно t_s за φ_m.

Следователно за всяко $\varepsilon > 0$, при достатъчно големи n и m ще имаме

$$
|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \;\le\; \mathrm{e}^{|L|t}\int_{t_0}^{t} B_{n,m}\,\mathrm{e}^{-|L|s}\,ds \;<\; \varepsilon\;.
$$

Току-що доказаната фундаменталност ни позволява да дефинираме равномерната граница

$$
\varphi_1(t)\,,\, \varphi_2(t)\,,\, \varphi_3(t)\,,\, \ldots \;\rightrightarrows\; x(t)\;, \qquad t \in [t_0, b]\;.
$$

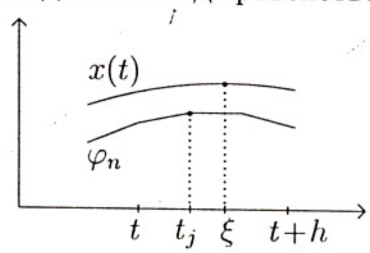
Функцията $x(t)$ е непрекъсната и с графика лежаща в Δ, защото φ_n са такива.

Диференцируемост. За фиксирани t и $t+h$ от дефиниционния интервал,

$$
\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t) \;=\; \int_t^{t+h} \dot\varphi_n(\xi)\,d\xi \;=\; \int_t^{t+h} f(t_j, \varphi_n(t_j))\,d\xi\;,
$$

където t_j е най–близкият отляво на ξ възел на φ_n (възможно е и $t_j < t$). По построение $|t_j - \xi| < \frac{1}{n}$ и след граничен преход $n \to \infty$ достигаме до равенството

$$
x(t+h) - x(t) \;=\; \int_t^{t+h} f(\xi, x(\xi))\,d\xi\;.
$$



То доказва, че функцията $x(t)$ е диференцируема и $\dot x(t) = f(t, x(t))$.

По построение $\varphi_n(t_0) = x_0$, значи и границата $x(t_0) = x_0$. С това установяваме окончателно, че $x(t)$ е решение на задачата на Коши.

Единственост. Ако $y(t)$ и $z(t)$ са две решения на (1), то

$$
\mathrm{e}^{|L|t}\cdot\frac{d}{dt}\Big[\,|y(t) - z(t)|\,\mathrm{e}^{-|L|t}\Big] \;=\; \pm|f(t, y(t)) - f(t, z(t))| - |L|.|y(t) - z(t)| \;\le\; 0
$$

по силата на (2). Функцията $|y(t) - z(t)|\,\mathrm{e}^{-|L|t}$ е нула при $t = t_0$, неотрицателна, намаляваща и следователно тъждествено равна на нула. Оттук $y(t) \equiv z(t)$.

Теоремата е доказана. □

[1] Изключваме от разглеждане тези t, за които φ_n, φ_m или $|\varphi_n - \varphi_m|$ нямат производна. Това са краен брой точки, невлияещи на следващите интегрирания.