

Линейни диференциални уравнения от първи ред

Линейните диференциални уравнения (ЛДУ) от първи ред имат вида:

$$y' + p(x)y = f(x),$$

където функцията $f(x)$ се нарича свободен член.

Ако $f(x) \equiv 0$, уравнението се нарича **хомогенно**, а когато $f(x) \neq 0$ – **нехомогенно**.

Ако функциите $p(x)$ и $f(x)$ са непрекъснати в интервала (a, b) , то множеството $\{(x, y) : a < x < b\}$ е област на единственост на уравнението.

а) Решение на хомогенното уравнение: $y' + p(x)y = 0$

Решаваме това уравнение, като отделим променливите:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= -p(x)y, \\ \frac{dy}{y} &= -p(x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= - \int p(x)dx, \\ \ln |y| &= - \int p(x)dx + \ln |C|\end{aligned}$$

Окончателно общото решение на хомогенното ЛДУ има вида:

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

б) Решение на нехомогенното уравнение: $y' + p(x)y = f(x)$

Решението на нехомогенното уравнение търсим във вида:

$$y = C(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

За да намерим функцията $C(x)$, заместваме y :

$$\begin{aligned}C'(x)e^{-\int p(x)dx} + C(x)e^{-\int p(x)dx}(-p(x)) \\ + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)\end{aligned}$$

След преобразуване получаваме уравнението

$$C'(x) = f(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Интегрираме и намираме, че

$$C(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C$$

Заместваме полученото в $C(x)$ и намираме **общото решение на нехомогенното уравнение**:

$$y = \left[\int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + C \right] e^{-\int p(x)dx}.$$

ПРИМЕР 1.

Да се реши уравнението

$$y' + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

Решаваме хомогенното уравнение

$$y' + 2xy = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy,$$

$$\frac{dy}{y} = -2xdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int -2xdx,$$

$$\ln |y| = -x^2 + \ln |C|,$$

и получаваме общо решение на хомогенното уравнение:

$$y = Ce^{-x^2}.$$

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида:

$$y = C(x)e^{-x^2}.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = 2xe^{-x^2} \cdot e^{x^2}$$

или

$$C'(x) = 2x.$$

Тогава

$$C(x) = \int 2x dx = x^2 + C,$$

и

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

Кое е общо решение на нехомогенното уравнение.

ПРИМЕР 2.

Да се реши уравнението

$$xy' - 2y = x^3 \cos x.$$

Делим на x , за да определим свободния член $f(x)$

$$y' - \frac{2y}{x} = x^2 \cos x \equiv f(x).$$

Решаваме хомогенното уравнение:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2dx}{x},$$

$$\ln |y| = 2 \ln |x| + \ln |C|,$$

и получаваме общо решение на хомогенното уравнение:

$$y = Cx^2.$$

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида:

$$y = C(x)x^2.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = \frac{x^2 \cos x}{x^2},$$

или

$$C'(x) = \cos x.$$

Тогава:

$$C(x) = \int \cos x dx = \sin x + C,$$

и

$$y = (\sin x + C)x^2.$$

ПРИМЕР 3.

Да се реши уравнението

$$y' \cos x - y \sin x = 2x.$$

Делим на $\cos x$, за да определим свободния член $f(x)$

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = \frac{2x}{\cos x},$$

Решаваме хомогенното уравнение:

$$y' - \frac{\sin x}{\cos x}y = 0,$$

като отделяме променливите и интегрираме.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x}y,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{\sin x dx}{\cos x},$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{\sin x dx}{\cos x},$$

$$\ln |y| = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln |\cos x| + \ln |C|,$$

и получаваме общо решение на хомогенното уравнение:

$$y = \frac{C}{\cos x}.$$

Търсим решението на нехомогенното уравнение във вида:

$$y = \frac{C(x)}{\cos x}.$$

Уравнението за $C'(x)$ е

$$C'(x) = \frac{2x}{\cos x} \cdot \cos x = 2x.$$

Тогава

$$C(x) = \int 2x dx = x^2 + C,$$

$$y = \frac{x^2 + C}{\cos x}.$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Решете линейните диференциалните уравнения от първи ред:

1. $y' - y \cos x = 0$

2. $y' - y = \cos x - \sin x$

3. $y' - y \operatorname{tg} x = 0$

4. $y' - y \cos x = \sin 2x$

5. $y' - y \operatorname{tg} x = 1$

6. $(2x - y^2) y' = 2y$