

Дифференциални уравнения от първи ред с отделящи се променливи

ДУ от първи ред с отделящи се променливи имат вида

$$f_1(x) g_1(y) dy = f_2(x) g_2(y) dx.$$

Уравнението е записано в симетрична форма и в него променливите x и y са равноправни, т.е. може да считаме, че неизвестната функция е $y = y(x)$ или, че неизвестната функция е $x = x(y)$.

За да се реши това уравнение, първо трябва да се отделят променливите, като се раздели почленно с $f_1(x) g_2(y)$:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx$$

След почленно интегриране се получава, така нареченото, решение в квадратури:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = \int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx$$

Ако неопределените интегралите в това равенство се изразяват с елементарни функции $G(y)$ и $F(x)$, то се получава уравнение от вида $G(y) + F(x) = C$, което се нарича общ интеграл.

Ако уравнението е разрешимо относно y или относно x , то общото решение на ОДУ се получава или във вида:

$$y = y(x, C),$$

или във вида:

$$x = x(y, C).$$

ПРИМЕР:

Да се реши уравнението $y' = \sqrt{1 - y^2}$

Записваме $\frac{dy}{dx}$ вместо y' и получаваме $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$

Отделяме променливите: $\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx$

Интегрираме почленно

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}} = \int dx$$

и получаваме общия интеграл $\arcsin y = x - C$.

Общото решение може да се представи във вида:

$$x = \arcsin y + C,$$

или във вида:

$$y = \sin(x - C).$$

Понеже дефиниционната област на уравнението е множеството $\{(x, y) : |y| \leq 1\}$, а областта на единственост – множеството $\{(x, y) : |y| < 1\}$, то не е трудно да се забележи, че уравнението има и две особени решения $y = 1$ и $y = -1$.

Нека $f(x)$ и $g(y)$ са дадени непрекъснати функции. Диференциалните уравнения от вида: $y' = f(x) g(y)$ също са уравнения с отделящи се променливи (по-олекотен вариант).

Да се решат уравненията

Пример 1.

$$y' = y^{2/3}$$

Записваме $\frac{dy}{dx}$ вместо y' и получаваме $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = dx$$

Интегрираме двете страни и получаваме:

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int dx$$

$$\int \left(y^{-\frac{2}{3}} dy \right) = x + C$$

$$\frac{y^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} = x + C$$

$$\frac{y^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} = x + C$$

Изразяваме y и повдигаме двете страни на трета степен и получаваме:

$$\sqrt[3]{y} = \left(\frac{x+C}{3} \right)$$

$$y = \left(\frac{x+C}{3} \right)^3$$

Пример 2.

$$y' = \frac{y^2 + y}{x - x^2}$$

Записваме $y' = \frac{dy}{dx}$ и заместваем в уравнението.

$$\frac{dy}{y^2 + y} = \frac{dx}{x - x^2}$$

И разлагаме на прости дроби:

$$\frac{1}{x-x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$$

От тук получаваме:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \ln C \\ \ln \left| \frac{y}{y+1} \right| &= \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| + \ln C \Rightarrow \frac{y(x-1)}{x(y+1)} = C, \\ y &= \frac{Cx}{x(1-C)-1}, \quad x \neq \frac{1}{1-C} \end{aligned}$$

Пример 3.

Намерете решението на задачата на Коши и интервала на съществуване на решението:

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1$$

Записваме $y' = \frac{dy}{dx}$ и замества в уравнението горе, разделяме

променливите, интегрираме двете страни и получаваме:

$$\begin{aligned} 2 \int (y-1) dy &= \int (3x^2 + 4x + 2) dx + C \\ (y-1)^2 &= x^3 + 2x^2 + 2x + C. \end{aligned}$$

Частно решение се получава при заместване на $x=0$ и $y=-1$.

Откъдето $(-1-1)^2 = 0 + C$ и следва, че $C=4$.

Търсеното решение е:

$$(y-1)^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 4$$

или

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

То е определено за

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 4 \geq 0$$

или

$$(x^2 + 2)(x + 2) \geq 0 \Rightarrow x \geq -2.$$

Пример 4.

$$y' = 4x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x\sqrt{y}$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = 2x dx$$

Откъдето след интегриране на двете страни получаваме:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int 2x dx + C$$

Като пресметнем интегралите получаваме, че общото решение е:

$$\sqrt{y} = x^2 + C.$$

Може да решим уравнението относно двете променливи:

$$y = (x^2 + C)^2$$

или

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{y} - C}$$

Дефиниционната област относно y се изчислява:

$$\sqrt{y} - C \geq 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{y} \geq C,$$

от където следва че

$$y \geq C^2$$

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЯТЕЛНА РАБОТА

Решете диференциалните уравнения с отделящи се променливи:

1. $y' \sin x = y \ln y;$

2. $x^3 \sin y \ y' = 2;$

3. $y' \sin x - y \cos x = 0;$

4. $xy' + y \ln y = 0$

5. $1 - y^2 = y'(1 + x^2).$

Да се решат задачите на Коши:

1.
$$\begin{aligned} y' &= 1, \\ y(0) &= 2; \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} y' &= xy, \\ y(0) &= 2; \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} y' &= \frac{x^2-1}{y+1}, \\ y(0) &= 0; \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} y' &= \frac{e^{2x}}{y-1}, \\ y(1) &= 2; \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} \frac{x}{y-1}y' &= \frac{1}{x^2+1}, \\ y(1) &= -1. \end{aligned}$$