

ОБИКНОВЕНИ ДИФЕРЕНЦИАЛНИ УРАВНЕНИЯ

Предмет на диференциалните уравнения

Предметът на диференциалните уравнения е възникнал едновременно с математическия анализ и механиката в трудовете главно на Нютон. Типична задача в диференциалните уравнения е: да се възстанови пътят на движещо се тяло по неговата скорост. Както се вижда, задачата е изцяло в механични термини. Заедно с това, ако си припомним интерпретацията на скоростта като първа производна, бихме могли да напишем уравнение по следния начин.

Нека $x(t)$ означава координатата (засега една) на движещото се тяло в момента t и нека скоростта (първата производна) е $\dot{x}(t)$. Ще предполагаме, че скоростта зависи от положението на тялото в даден момент t и от самия момент, т.е. има вида $v(t, x)$. Тогава уравнението за намиране на координатата $x(t)$ е:

$$\dot{x} = v(t, x(t))$$

Това уравнение се нарича обикновено диференциално уравнение. Важното тук е, че неизвестната функция на една променлива участва и със своята производна. Определението „**обикновено**” в случая се употребява за да отбележи, **че неизвестната функция е на една променлива**.

ПРИМЕР:

Тяло се движи със скорост $V(t)$, която може да зависи от времето, но не зависи от координатите. В този случай уравнението е:

$$\dot{x}(t) = V(t).$$

Всички решения на това уравнение, както е известно от курса по анализ, се дават с неопределения интеграл.

$$x(t) = \int V(t)dt.$$

Такива примери дават названието на процедурата по явното намиране на решенията – **интегриране**, макар че често се решават и с други методи.

ПРИМЕР:

Уравнение на нормалното размножаване. Да предположим, че биологически вид, чието количество в момента t ще означим с $x(t)$, се размножава със скорост, пропорционална на количеството в дадения момент. Такава ситуация се случва, когато необходимата хранителна среда е в относително голямо количество. Съответното диференциално уравнение е:

$$x' = kx$$

Ако забравим произхода на уравнението, можем да считаме, че неговата дефиниционна област е реалната права. Смисълът на задачата обаче подсказва, че правилният избор е положителната полуос.

Уравнението лесно се интегрира, (т.е. решава) като разделим двете страни с функцията x и след това интегрираме. Получаваме:

$$\int \frac{\dot{x}}{x} dt = \int k dt$$

Като решим интегралите получаваме:

$$\ln x = kt + c$$

където c е произволна константа.

Окончателно получаваме $x(t) = e^{kt}C$, където с C сме означили константата e^c .

Изложеното решение е една типична схема на решаване с метода на разделяне на променливите. Повечето уравнения могат да се интегрират, защото горната схема е приложима, евентуално след преработка на уравнението.

Основни понятия

Диференциални уравнения се наричат уравненията, в които се търси неизвестна функция на една или няколко променливи, като в тези уравнения влизат както неизвестната функция, така и нейните производни. Редът на старшата производна на неизвестната функция се нарича ред на уравнението.

Ако неизвестната функция, участваща в диференциалното уравнение, зависи от няколко променливи и в уравнението участват частни производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича частно диференциално уравнение.

Ако неизвестната функция зависи само от една променлива и в уравнението участват обикновени производни на тази функция, то такова диференциално уравнение се нарича обикновено диференциално уравнение (ОДУ). В най-общ вид обикновено диференциално уравнение от n -ти ред се записва по следния начин:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 1.$$

ПРИМЕР:

$$\begin{array}{ll} y' = 3y^{2/3} & \text{– уравнение от първи ред;} \\ y'' + y = 0 & \text{– уравнение от втори ред;} \end{array}$$

$xy''' = y'' + x$ – уравнение от трети ред.

Когато едно ОДУ е разрешимо относно старшата производна $y^{(n)}$, то същото може да се запише в следния нормален вид:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Уравненията: $y' = f(x, y),$ (1)

$$y'' = g(x, y, y') \quad (2)$$

са съответно ОДУ от първи и втори ред, записани в нормален вид.

Функцията $y = y(x)$ се нарича решение на ОДУ в интервала (a, b) , ако е диференцируема в интервала (a, b) и $y'(x) \equiv f(x, y(x)) \quad \forall x \in (a, b)$.

Аналогично се дава определението за решение на ОДУ (2).

Графиката на дадено решение на ОДУ се нарича **интегрална крива на уравнението**.

ПРИМЕР 1:

Функциите $y = \cos x$ и $y = \sin x$ са решения на уравнението $y'' + y = 0$ в интервала $(-\infty, +\infty)$.

Наистина, функцията $y = \cos x$ има производни $y' = -\sin x$, $y'' = -\cos x$ и като заместим в уравнението, получаваме твърдение: $-\cos x + \cos x \equiv 0$. Аналогично се проверява, че $y = \sin x$ също е решение на това уравнение в интервала $(-\infty, +\infty)$.

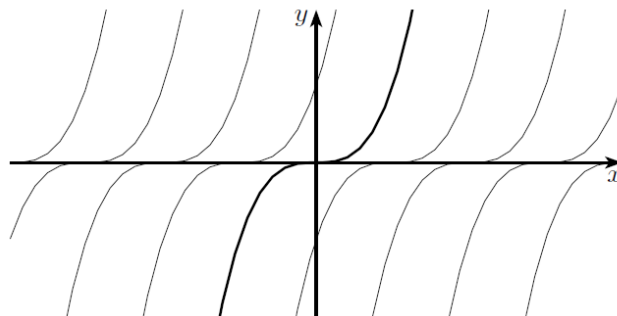
Оказва се, че функция от вида $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, където c_1 и c_2 са константи, задава всички решения на уравнението и това решение се нарича общо решение, докато решенията $y = \cos x$ и $y = \sin x$ се наричат частни решения. Частните решения се получават от общото решение при подходящ избор на константите. Например $y = \cos x$ се получава при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, а $y = \sin x$ – при $c_1 = 0$, $c_2 = 1$.

ПРИМЕР 2:

Уравнението $y' = 3y^{2/3}$ има частно решение $y = x^3$ и общо решение $y = (x - c)^3$. Наистина, $y' = 3(x - c)^2$ и като заместим в уравнението, получаваме твърдение: $3(x - c)^2 \equiv 3[(x - c)^3]^{2/3}$.

Уравнението има още едно решение $y \equiv 0$, което се нарича **особено решение** и което не се получава от общото решение при никаква стойност на c .

Интегралните криви на уравнението са кубични параболи и правата $y = 0$.



От примерите се забелязва, че дадено ОДУ има безброй много решения, като общото решение зависи от една или няколко константи.

Оказва се, че броят на тези константи съвпада с реда на уравнението – за уравненията от първи ред (1) константата е една, а за уравненията от втори ред (2) константите са две.

Задача на Коши

В диференциалните уравнения, обаче има и други разумни задачи. От физическата постановка следва, че е естествено да намерим едно специално решение – това, което се реализира в действителност. За да добием представа за тези думи нека разгледаме простия пример, когато скоростта е постоянна, $v = v_0$. В този случай ние наистина можем да намерим всички решения. Те се дават с формулата:

$$x(t) = v_0 t + x_0,$$

т.е. решенията се параметризират с константата x_0 , която има очевиден механичен смисъл – началното положение на тялото в момента $t = 0$.

С други думи задачата: да се намери пътят по скоростта - не е определена пълно; трябва да знаем още и началното положение.

Точно по същия начин, имайки предвид механичната интерпретация, че ако зададем началното положение, решението се определя еднозначно. Нека (t_0, x_0) е точка от дефиниционната област на функцията $v(t, x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: *Задача на Коши* ще наричаме уравнението

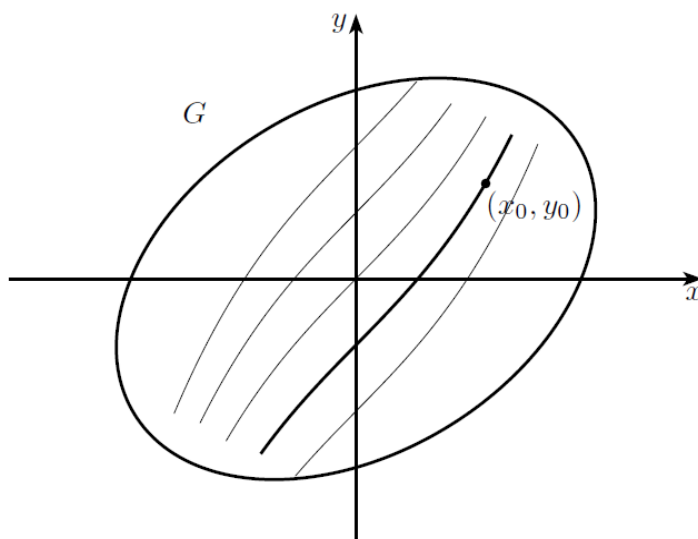
$$\dot{x} = v(t, x(t)) \quad \text{заедно с началното уравнение} \quad x(t_0) = x_0.$$

За ОДУ тази задачата на Коши може да се запише и във вида:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

където (x_0, y_0) е началната точка.

Решение на началната задача е това решение $y = y(x)$ на ОДУ, което удовлетворява началното условие $y(x_0) = y_0$. На практика с решаването на началната задача се намира тази интегрална крива, която минава през точката (x_0, y_0) .



Нека функцията $f(x, y)$ е определена в отвореното множество $G \subset R^2$.

Възниква въпросът, винаги ли началната задача (3) за началната точка $(x_0, y_0) \in G$ има решение и ако това решение съществува, дали то е единствено?

Отговор на този въпрос дава следната теорема за съществуване и единственост на решението на началната задача.

Теорема. Нека функцията f и нейната частна производна f_y са определени и непрекъснати в отвореното множество $D \subset R^2$ и $(x_0, y_0) \in D$.

Тогава съществува околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ на точката x_0 , в която началната задача на Коши има единствено решение.

Множеството $D \subseteq G \subset R^2$, във всяка точка (x_0, y_0) на което началната задача (3) има единствено решение, се нарича област на единственост за ОДУ (1), а точките от множеството D се наричат точки на единственост. Ако за всяка точка (x_0, y_0) на множеството $D \subset R^2$ са изпълнени условията на теоремата, то D е област на единственост за ОДУ (1).

ПРИМЕР 3:

Функцията $f(x, y) = 3y^{2/3}$ и нейната частна производна: $f'_y = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$

са определени и непрекъснати в равнината R^2 , с изключение на точките от оста $y = 0$.

Следователно $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$ е областта на единственост за уравнението $y' = 3y^{2/3}$.

ПРИМЕР 4:

Функцията $f(x, y) = \sqrt{1 - y^2}$ и нейната частна производна $f'_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}$ са определени и непрекъснати в точките (x, y) , за които $|y| < 1$. Следователно $D = \{(x, y) : |y| < 1\}$ е областта на единственост за уравнението $y' = \sqrt{1 - y^2}$.

ОДУ описват различни модели в естествените науки и изразяват закони в тези науки, които са връзки, между време, състояния, скорости, ускорения и други, за разглежданите процеси.

Ето някои примери за моделни уравнения, които се срещат в различни области на естествознанието:

- | | |
|--|--|
| 1. $y' = ay$ | екология, модел на Малтус; |
| 2. $y' = (a - by)y$ | екология, логистично уравнение; |
| 3. $y' + p(x)y = 0$ | линейно хомогенно ДУ от I ред; |
| 4. $y' + p(x)y = q(x)$ | линейно нехомогенно ДУ от I ред, електрични вериги, икономика; |
| 5. $y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ | геометрична оптика, профил на параболично огледало; |
| 6. $y'' + py' + qy = 0$ | линейно хомогенно ДУ от втори ред, непринудени трептения; |
| 7. $y'' + py' + qy = A \cos \omega x$ | линейно нехомогенно ДУ от втори ред, принудени трептения; |
| 8. $y'' + \sin y = 0$ | уравнение на махалото; |
| 9. $y^{IV} + py = 0$ | трептения на греди; |
| 10. $y^{IV} - py'' + y - y^3 = 0$ | уравнение на Фишер-Комогоров, фазови преходи. |