0.1 Математическа индукция

Напомняне на принципа на математическата индукция.

1. Докажете с помощта на математическа индукция:

а) $1 + 4 + 7 + \cdots + (3n + 2) = \frac{n(3n-1)}{2}$;

б) $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$;

в) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$;

г) $1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$;

д) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$;

е) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

ж) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$;

Дайте индуктивна дефиниция на $\sum_{i=1}^{n} a_i$:

$\sum_{i=1}^{1} a_i = a_1$, $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = (\sum_{i=1}^{n} a_i) + a_{n+1}$

з) $\sum_{i=1}^{n} i(i + 1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

и) $a^m.a^n = a^(m + n)$;

й) $(a.b)^n = a^n.b^n$;

к) $(a^m)^n = a^{m.n}$;

л)$(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9})\dots(1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}, n \geq 2$;

м) $n = 3k + 5m, k, n \in N, n \geq 8$

н) Ако $|A| = n$, то $|2^A| = 2^n$; (Тук 2^A е множеството от подмножествата на A)

Дайте дефиниция на $\binom{n}{k}$.

о) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$;

п) $n^2 > 2n + 1, n \geq 3$;

р) $2^n > n^2, n \geq 5$;

$0! = 1$, $(n + 1)! = n!(n + 1)$.

с) $n! > n^3, n \geq 6$;

т) $\frac{4^n}{n+1} < \frac{(2n)!}{(n!)^2}, n \geq 2$;

у) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\nu}} \geq \sqrt{n}, n \geq 1$;

ф) $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{n+\nu} \geq \frac{7}{12}, n \geq 2$;

х) $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu!} < 3$.

0.2 Множества и операции в тях

1. Докажете следните равенства и включвания:

Дайте дефиниция на $A \cup B$ и $A \cap B$.

а) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$;

б) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
в) $(A \cup B) \cup C = A \cup B(\cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap B(\cap C)$;
$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
г) $A \Delta B = B \Delta A$, $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;
д) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
е) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
ж) $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$;
з) $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;
и) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;
Дайте дефиниция на $\bigcup_{i=1}^n A_i$ и $\bigcap_{i=1}^n A_i$.
к) $(\bigcup_{i=1}^n A_i) \cap A = \bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A)$;
л) $(\bigcap_{i=1}^n A_i) \cup A = \bigcap_{i=1}^n (A_i \cup A)$;
м) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$;
н) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$;
о) $X \setminus \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus A_i)$;
п) $X \setminus \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcup_{i=1}^n (X \setminus A_i)$;
р) $|A| = n \Longrightarrow |2^A| = 2^n$;
с) $X \subseteq A \& X \subseteq B \Longleftrightarrow X \subseteq A \cap B$
т) $A \subseteq X \& B \subseteq X \Longleftrightarrow A \cup B \subseteq X$;
у) $A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B \Longleftrightarrow A \cap B = A$;
ф) $A \setminus B = A \Longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$
х) $A \setminus B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subseteq B$;
ц) $A \subseteq B \cup C \Longleftrightarrow A \setminus B \subseteq C$;
Дайте дефиниция на $A \times B$.
ч) $A \times B = \emptyset \Longleftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$;
ш) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
щ) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
ъ) $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

0.3 Релации на еквивалентност

Дайте дефиниция на релация на еквивалентност

1. Проверете кои от следните релации са релации на еквивалентност. В случай, че са релации на еквивалентност посочете кои са класовете на еквивалентност и индексът на релацията:

а) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \Longleftrightarrow a.b > 0$;
б) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \Longleftrightarrow a + b = 0$;
в) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \Longleftrightarrow a + b = 5$;

г) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \iff a + b$ е четно;

д) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \iff a + b$ е нечетно;

е) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \iff a + b$ е четно;

ж) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \iff \exists k \in \mathbb{N}(k \leq a, b < k + 1$;

з) $R(\varepsilon) \subseteq \mathbb{R}^2$, $aR(\varepsilon)b \iff |a - b| < \varepsilon$;

и) $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $aRb \iff a^2 = b^2$;

к) $R \subseteq (\mathbb{R}^2)^2$, $(a, b)R(c, d) \iff a.d = b.c$

л) $R \subseteq \mathbb{Z}^2$, $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ фиксирано $aRb(\mathrm{mod}\ m) \iff a - b$ се дели на m;

В следващите задачи A, B са подмножества на фиксирано множество X.

м) $ARB \iff |A| = |B|$, A и B са крайни множества и $|A|$ е броят на елементите на A;

н) $ARB \iff A \cap B \neq \emptyset$;

о) $ARB \iff A\Delta B$ е крайно множества;

п) Нека f е функция, $f : A \to B$. $aRb \iff f(a) = f(b)$;

Дайте дефиниция на $f(A)$.

р) Нека f е функция, $f : X \to Y$. $ARB \iff f(A) = f(B)$;

с) Нека a b са прави в равнината. $aRb \iff a, b$ се пресичат;

т) Нека a b са прави в равнината. $aRb \iff a \| b$;

2. Намерете всички различни релации на еквивалентност и всички разбивания на множество с:

а) 3 елемента;

б) 5 елемента.

в) 7 елемента.

0.4 Частични наредби

Дайте дефиниция на частична наредба

1. Проверете кои от следните релации са частични наредби:

а) $aRb \iff a$ е баща на b;

б) $aRb \iff a$ и b имат общ родител;

в) $aRb \iff a$ е предшественик на b (родител или прародител);

г) $aRb \iff a, b \in \mathbb{N}$ и ($a = b$ или $a + 1 = b$);

д) $aRb \iff a, b \in \mathbb{N}$ и съществува $c \in \mathbb{N}(a + c = b)$;

е) Нека $\leq_1$ е частична наредба върху A и $\leq_2$ е частична наредба върху B. $(a, b)R(c, d) \iff a \leq_1 c$ и $b \leq_2 d$;

ж) Нека $\leq_1$ е частична наредба върху A и $\leq_2$ е частична наредба върху B. $(a, b)R(c, d) \Longleftrightarrow a \leq_1 c$ или $b \leq_2 d$;

Дайте дефиниция на азбука и думи в дадена азбука, начало и край на дума в дадена азбука.

з) $\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \alpha$ е начало на β;

и) $\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \alpha$ е край на β;

й) Нека X е произволно множество и 2^X е множеството на всички подмножества на X. $A \subseteq B \Longleftrightarrow A$ е подмножество на B;

к) Нека разгледаме множеството $\{0,1\}^n$. За всеки два елемента $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ на $\{0,1\}^n$, $(a_1, \ldots, a_n)R(b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 \leq b_1 \& \ldots \& a_n \leq b_n$;

л) Нека разгледаме множеството $\{0,1\}^n$. За всеки два елемента $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n)$ на $\{0,1\}^n$, $(a_1, \ldots, a_n)R(b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 = b_1 \& \ldots a_{i-1} = b_{i-1} \& a_i \leq b_i$;

м) $\alpha \prec \beta \Longleftrightarrow \alpha$ е начало на β или (съществува дума α_1 и букви a, b така, че $\alpha_1 a$ е начало на α, а $\alpha_1 b$ е начало на β);

н) Нека X е произволно множество и 2^X е множеството на всички подмножества на X, а C е фиксирано подмножество на X. $ARB \Longleftrightarrow A \cup C$ е подмножество на $B \cup C$;

2. Постройте всички неизоморфни частични наредби в множество с три елемента.

3. Постройте всички частични наредби в множеството $\{a, b, c, d\}$ за които:

а) a е единствен минимален елемент и d е единствен максимален елемент;

б) a едновременно минимален и максимален елемент;

в) a и b са несравними;

г) не са изоморфни.

0.5 Рекурентни съотношения

1. Намерете явната дефиниция на рекурентните редици:

а) $a_{n+1} = 7a_n$, $a_0 = 2$;
б) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
в) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - 4a_{n-1})$, $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{2}$;
г) $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
д) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}a_{n-1}$, $a_0 = \frac{1}{3}$, $a_1 = \frac{2}{3}$;
е) $a_{n+1} = 7a_n - 16a_{n-1} + 12a_{n-2}$,
ж) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1} + n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
з) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1} + 7.2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

и) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1} + 3\frac{1}{2}^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
й) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1} + 4\frac{1}{2}^n + 11\frac{1}{3}^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
к) $a_{n+1} = \frac{5}{6}a_n - \frac{1}{6}a_{n-1} + 4\frac{1}{2}^n + 11\frac{1}{3}^n + 2n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;
л) $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} + 5.2^n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

0.6 Основни комбинаторни конфигурации

1. Колко различни думи могат да се получат от разместването на думите:
а) АЛАБАЛАНИЦА;
б) ПЕРМУТАЦИЯ;
в) КОМБИНАЦИЯ:
д) НЕПРОТИВОКОНСТИТУЦИОНСТВУВАТЕЛСТВУВАЙТЕ.

2. По колко различни начина могат да седнат на една пейка:
а) $n(n \geq 2)$ човека;
б) n мъже и n жени, $n > 2$, като две лица от един и същи пол не седят едно до друго.

3. Две сядания около една кръгла маса не са различни, ако всеки от седналите има едни и същи съседи. По колко различни начина могат да седнат около една кръгла маса:
а) $n(n \geq 2)$ човека;
б) n мъже и n жени, $n > 2$, като две лица от един и същи пол не седят едно до друго.

4. Колко решения в естествени числа имат следните уравнения:
а) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$;
б) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_2 \geq 3$;
в) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_2 \leq 3$;
г) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$;
д) $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 3$, $x_3 \leq 8$.

5. Колко цели числа има от 0 до 1000, съдържащи:
а) точно 1 цифра 5;
б) поне 1 цифра 5;
в) най-много 1 цифра 5.

6. Колко цели числа има от 0 до 1001, които
а) се делят на 3 или на 5;
б) се делят на 2 или на 3 или на 5;
в) се делят на 2 или на 3 или на 5 или на 6.

7. Колко неотрицателни цели числа $< 100\ 000$, които:
а) съдържат цифрите 3, 6 и 9;

б) съдържат цифрите 3, 6 и не съдържат 9.

7. Колко прости числа има от:

а) 1 до 100; б) от 101 до 500; в) от 501 до 1000.

8. Колко цели числа от 1 до 10 000 не се делят нито на 2, нито на 3 нито на 5.

9. Колко цели числа от 1 до 10 000 не се делят нито на 4, нито на 3 нито на 5 нито на 7 нито на 6.

10. Намерете коефициентите пред:

а) $x^2y^4z^3$ в разлагането на $(x+y+z)^9$;

б) $x^2y^3z^5$ в разлагането на $(x+2y+3z)^{10}$;

в) $w^3x^2y^3z^4$в разлагането на $(w+x+2y+z)^{11}$.

11. От колода с 52 карти се избират се избират 11. По колко различни начина могат да се изберат извадки, в които се срещат:

а) точно 1 ас;

б) поне 2 валета;

в) точно 4 пики;

г) най-много 5 кари:

д) поне 7 купи:

е) между 3 и 10 трефи;

ж) точно 2 аса и 4 трефи;

з) точно 2 аса и най-много 5 пики;

и) точно 2 аса и поне 4 купи;

й) поне 7 карти от един цвят;

к) точно 7 карти от един цвят;

л) най-много 7 карти от един цвят;

м) каре от 5 карти;

н) 1 двойка и една тройка от 5 карти(фул);

о) 5 последователни карти от 5 карти;

п) 5 последователни карти от един цвят от 5 карти.

12. Разстояние (на Хеминг) между два n-мерни двоични вектора е броят на разликите на компонентите. Намерете броя на n-мерните двоични вектори:

а) които са на равно разстояние от два зададени вектора;

б) за които сумата от разстоянията до два зададени вектора е $k(1 \leq k \leq n)$.

13. Множеството от всички двоични вектори от $\{0,1\}^n$, които във фиксирани $n-k$ позиции имат равни значения, $0 \leq k \leq n$, наричаме k-равнини.

а) Колко различни вектора има в една k-равнина?

б) Колко различни k-равнини има в $\{0, 1\}^n$?

в) Колко различни k-равнини съдържа даден фиксиран вектор?

г) Колко различн k-равнини съдържа дадена k-равнина, $0 \leq l < k$?

14. На колко различни части разделят:

а) евклидовата равнина n пресичащи се две по две прави, които минават през една точка?

б) евклидовата равнина n пресичащи се две по две прави, никои 3 от които не минават през една точка?

в) тримерното евклидово пространство n равнини никои 4 от които не минават през една точка?

15. Намерете броя на пермутациите на n елемента, които:

а) които не оставят на място нито един елемент;

б) които оставят на място точно един елемент;

в) които оставят на място поне един елемент;

г) които оставят на място точно k елемента, $0 \leq k \leq n$;

д) които оставят на място поне k елемента, $0 \leq k \leq n$;

е) които оставят на място най-много k елемента, $0 \leq k \leq n$.

16. Колко различни числа по-малки от 10 000 има, такива, че сумата от цифрите им е 12?

17. Колко различни колекции от 10 монети могат да се съберат от монети от 1, 2, 5, 10 и 20 стотинки?

18. Да се намерят броя на k-буквените думи от дадена азбука с n букви, които:

а) са симетрични;

б) имат две последователни еднакви букви;

в) нямат две последователни еднакви букви;

г) една буква се повтаря поне два пъти;

д) една буква се повтаря най-много два пъти;

е) една буква се повтаря точно два пъти.

19. По колко различни начина могат да се поставят:

а) n различими предмета в k различими кутии?

б) n неразличими предмета в k различими кутии?

в) n неразличими предмета в k неразличими кутии?

0.7 Теория на графите

1. Докажете, че:

а) във всеки граф броят на върховете с нечетна степен е четен;

б) всеки регулярен граф с нечетна степен има четен брой върхове;

в) всеки граф с n върха и повече от $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ребра е свързан.

2. Ако считаме, че познанството между двама души е симетрична релация, докажете, че в произволна група от хора има двама души с равен брой познати.

3. Докажете, че при $n > 0$, n-мерният двоичен куб е свързан граф. Кога той е Ойлеров? В случай, че е Ойлеров, посочете алгоритъм за намирането на Ойлеров цикъл.

4. Намерете хомоморфизъм на n-мерният двоичен куб в k-мерния двоичен куб при $n > k > 0$.

5. Постройте всички неизоморфни ориентирани графи с 4 върха. Постройте всички неизоморфни графи с 4 и 5 върха. Кои от тях са свързани или слабо свързани? Кои от тях са Ойлерови, Хамилтонови и в кои има Ойлеров или Хамилтонов път?

6. Намерете броя на ребрата на граф без цикли с n върха и k компоненти на свързаност.

7. Постройте минимални покриващи дървета по схемата "обхождане в дълбочина "обхождане в ширина с помощта на алготитмите на Прим, Крускал и Дейкстра за даден граф(и), например графа от Пример 3.20.

8. Постройте алгоритъм за намиране на всички цикли в даден свързан граф.