Числови редове

$\{a_n\}_1^\infty$ - числова редица

$S = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - числов ред

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ - n-та частична сума

Критерии за сходимост на редове с неотрицателни членове:

Критерий на Даламбер	ако $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \begin{cases} q < 1 & \textit{сходящ} \\ q > 1 & \textit{разходящ} \\ q = 1 & \textit{не се знае} \end{cases}$
Критерий на Коши	ако $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q \begin{cases} q < 1 & \textit{сходящ} \\ q > 1 & \textit{разходящ} \\ q = 1 & \textit{не се знае} \end{cases}$
Критерий на Раабе-Дюамел:	ако $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha \begin{cases} \alpha > 1 & \textit{сходящ} \\ \alpha < 1 & \textit{разходящ} \\ \alpha = 1 & \textit{не се знае} \end{cases}$
Интегрален критерий на Коши:	Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и несобственият интеграл $\int_1^\infty a_n dn$ са едновременно сходящи или разходящи.

Сравняване на редове:

Ако $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A (A \neq 0)$ => редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са едновременно сходящи или разходящи.

Редове за сравняване:

1) геометричен ред $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} |q| < 1 & \textit{сходящ и } S = \frac{1}{1-q} \\ |q| \geq 1 & \textit{разходящ} \end{cases}$

2) хармоничен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ...$ разходящ

3) логаритмичен ред $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \begin{cases} s > 1 & \textit{редът е сходящ} \\ s \leq 1 & \textit{редът е разходящ} \end{cases}$

Знакопроменливи редове

Критерий на Лайбниц

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ - сходящ, ако $\begin{cases} 1)\ a_n \geq a_{n+1}\ (\textit{редицата е намаляваща}) \\ 2)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \end{cases}$

Абсолютно и условно сходящи редове:

1) Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ е сходящ, редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ се нар. абсолютно сходящ.

2) Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ е сходящ, но $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ е разходящ, редът $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ се нар. условно сходящ.

Степенни редове

$a_{0+}a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots.. = \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$

Радиус на сходимост:

$R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (по Даламбер) или $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ (по Коши)

Редът е:

Абсолютно сходящ за $x \in (-R; R)$;

Разходящ за $x < -R$ и $x > R$;

За $x = -R$ и $x = R$ се изследва допълнително.

Ако $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, редът е:

Абсолютно сходящ за $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$;

Разходящ за $x \in (-\infty; x_0 - R) \cup (x_0 + R; +\infty)$;

За $x = x_0 \pm R$ се изследва допълнително.