Б. Таблица на основните интеграли

1. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1},\alpha\neq 1$
2. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C,x\neq 0$
3. $\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a},a>0$
4. $\int e^{x}dx=e^{x}+C$
5. $\int\sin xdx=-\cos x+C$
6. $\int\cos xdx=\sin x+C$
7. $\int\frac{dx}{\cos^{2}x}=tgx+C,x\neq\frac{\pi}{2}(2k-1)$
8. $\int\frac{dx}{\sin^{2}x}=-\cot gx+C,x\neq k\pi.$
9. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}=\arcsin x+C=-\arccos x+C,|x|<1$
10. $\int\frac{dx}{1+x^{2}}=arctgx+C=-arc\cot gx+C$
11. $\int shxdx=chx+C$
12. $\int chxdx=shx+C$ (1.2)
13. $\int\frac{dx}{chx^{2}x}=thx+C$
14. $\int\frac{dx}{sh^{2}x}=cthx+C,x\neq 0$
15. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}}=\ln\left|x+\sqrt{x^{2}\pm a^{2}}\right|+C,|x|>|a|$

Пример 1.7. Решете интегралите, като приложите свойства **4** и **5**:

а) $\int\left(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n\right)dx$; б) $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$; в) $\int\left(3-x^{2}\right)^{3}dx$;

г) $\int\frac{x^{2}dx}{x^{2}+1}$; д) $\int\frac{x+1}{\sqrt{x}dx}$; е) $\int\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx.$

Решение. а) Като приложим посочените свойства, за дадения интеграл получаваме:

$$I=a_0\int x^{n}dx+a_1\int x^{n-1}dx+\ldots+a_n\int dx=\frac{a_0}{n+1}x^{n+1}+\frac{a_1}{n}x^{n}+\ldots+a_nx+C\ ;$$

б) Извършваме действията в подинтегралната функция и отново прилагаме свойства 4 и 5:

$$I=\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx=\int\left(1-6x+11x^{2}-6x^{3}\right)dx=\int dx-6\int xdx+11\int x^{2}dx-6\int x^{3}dx=$$

$$x-\frac{6}{2}x^{2}+\frac{11}{3}x^{3}-\frac{6}{4}x^{4}+C=x-3x^{2}+\frac{11}{3}x^{3}-\frac{3}{2}x^{4}+C\ ;$$

в) $I=\int\left(3-x^{2}\right)^{3}dx=\int\left(27-27x^{2}+9x^{4}-x^{6}\right)dx=27\int dx-27\int x^{2}dx+9\int x^{4}dx-\int x^{6}dx=$

$$27x-9x^{3}+\frac{9}{5}x^{5}-\frac{1}{7}x^{7}+C\ ;$$

г) Прилагаме свойство 5 след предварително преобразуване:

$$I=\int\frac{x^{2}}{x^{2}+1}dx=\int\frac{x^{2}+1-1}{x^{2}+1}dx=\int\frac{x^{2}+1}{x^{2}+1}dx-\int\frac{dx}{x^{2}+1}=\int dx-\int\frac{dx}{x^{2}+1}=x-arctgx+C\ ;$$

д) $I=\int\frac{x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(\frac{x}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=\int x^{1/2}dx+\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^{1/2}}{1/2}=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C\ ;$

е) $I=\int\left(1-\frac{1}{x^{2}}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}dx=\int\left(1-x^{-2}\right)x^{3/4}dx=\int\left(x^{3/4}-x^{-5/4}\right)dx=\frac{x^{7/4}}{7/4}-\frac{x^{3/4}}{3/4}+C=\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^{3}}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^{3}}+C.$

Пример 1.8. Като използвате свойства **4**, **5** и **7**, решете интегралите:

а) $\int\frac{e^{3x}+1}{e^{x}+1}dx$; б) $\int\frac{\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1-x^{2}}}{\sqrt{1-x^{4}}}dx$; в) $\int\frac{\sqrt{x^{2}+1}-\sqrt{x^{2}-1}}{\sqrt{x^{4}-1}}dx$; г) $\int\frac{dx}{\sqrt{a^{2}-x^{2}}}$; д) $\int\frac{dx}{a^{2}+x^{2}}$.

Решение. а) $I=\int\frac{\left(e^{x}\right)^{3}+1}{e^{x}+1}dx=\int\frac{\left(e^{x}+1\right)\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)}{e^{x}+1}dx=\int\left(e^{2x}-e^{x}+1\right)dx=\frac{1}{2}\int e^{2x}d(2x)-\int e^{x}dx+\int dx=$

$$\frac{1}{2}e^{2x}-e^{x}+x+C\ ;$$

б) $I=\int\frac{\sqrt{1+x^{2}}+\sqrt{1-x^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}.\sqrt{1+x^{2}}}dx=\int\frac{\sqrt{1+x^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}.\sqrt{1+x^{2}}}dx+\int\frac{\sqrt{1-x^{2}}}{\sqrt{1-x^{2}}.\sqrt{1+x^{2}}}dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}+\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^{2}}}=$