02. IV. 2013 г. 21. Неявни функции

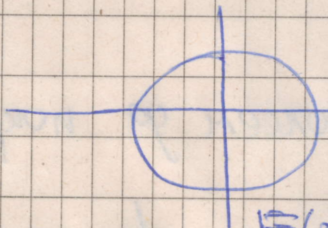
$F(x, y) = 0$ $\qquad$ $F(x, f(x)) = 0$

$y = f(x)$

y като неявна функция на x

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$



$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

$F(x, \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}) = 0$

$y - x - \varepsilon \sin y = 0$ $\quad \varepsilon \in (0; 1)$

уравнение на Кеплер от теоритичната астрономия

$y = f(x)$

$x = y - \varepsilon \sin y$

$x'_y = 1 - \varepsilon \cos y > 0$ $\quad \uparrow$ строго растяща

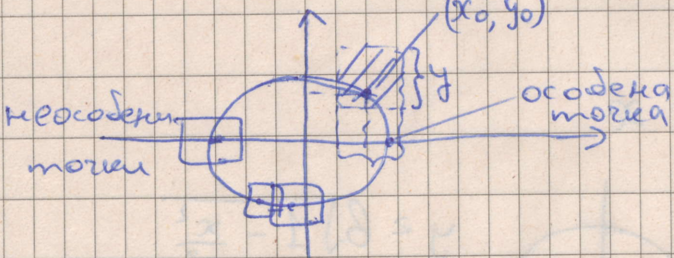
$\exists$ обратна $\quad y = y(x)$

Дефиниция: $F(x, y)$ е дефинирана в точка M. Казване че, уравнението $F(x, y) = 0$ определя y като неявна функция на x в едно множество D, ако $\exists$ $y = f(x)$ дефинирана в D.

1) $(x, f(x)) \in M$ за $\forall x \in D$
2) $F(x, f(x)) = 0$ за $\forall x \in D$

VI. 1. 71

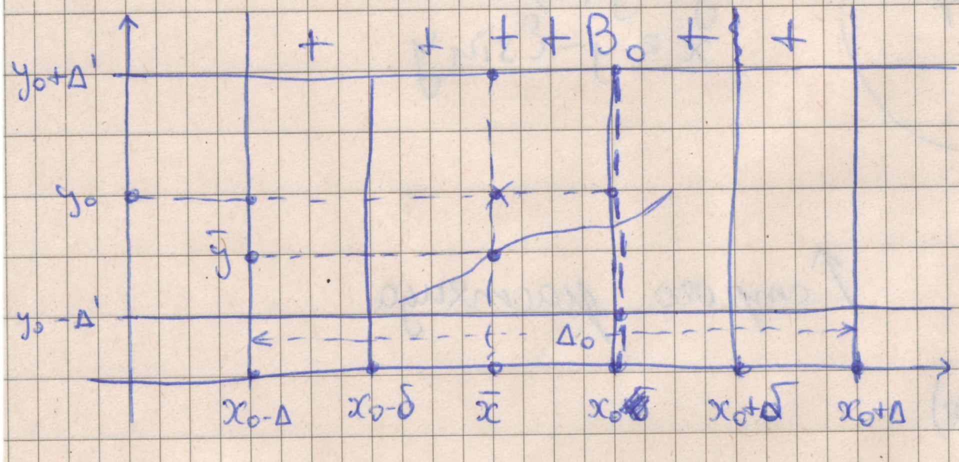
Разглеждаме (x_0, y_0) и търсим правоъгълник $[a,b]\times[c,d]$ около тази точка за $\forall x \in [a,b]$ да $\exists!\ y \in [c,d] : F(x,y)=0$



Т: Хайне - Борел - можем да покрием с правоъгълници

Теорема за неявна функция:

Нека 1) $F(x,y)$ е дефинирана в правоъгълника $D=[x_0-\Delta, x_0+\Delta]\times[y_0-\Delta', y_0+\Delta']$ и непрекъсната



2) $F(x_0,y_0)=0$! (минава през точка (x_0,y_0))

3) за $\forall$ фиксирано x: $F(x,y)$ да е строго монотонна относно y.

Тогава:

а) в околност на точка (x_0,y_0) y се определя като функция на x $y=f(x)$ - еднозначна

VI 172

б) $f(x_0) = y_0$
в) $f(x)$ е непрекъсната

Доказателство: Образуване $\varphi(y) = F(x_0, y)$
$\varphi(y_0) = 0$
$\varphi(y)$ - строго растяща
$\varphi(y)$ е положителна за $y > y_0$
$\varphi(y)$ е отрицателна за $y < y_0$

$\varphi(y_0 + \Delta') > 0$ $\qquad$ $\varphi(y_0 - \Delta') < 0$
$F(x_0, y_0 + \Delta) > 0$ $\qquad$ $F(B_0) > 0$

От условие 1:
$\Rightarrow F > 0$ в близост до точка B_0;
$F < 0$ в близост до точка A_0
$\Rightarrow \exists\, \delta$: за $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ по горната хоризонтала имаме $+$, а по долната имаме $-$.

Нека $\bar{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
Прекарвам вертикала:
$\psi(y) = F(\bar{x}, y)$
$F(\bar{x}, y_0 - \Delta') < 0$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\psi(y_0 - \Delta') < 0$
$F(\bar{x}, y_0 + \Delta') > 0$ $\qquad\quad$ $\psi(y_0 + \Delta') > 0$

Функцията $\psi(y)$ непрекъсната $\Rightarrow$ строго монотонна по теоремата на Ферма $\exists!\ \bar{y} : \psi(\bar{y}) = 0$

$F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ $\qquad$ $\bar{y} = f(\bar{x})$

в) непрекъснатост ~~в т. x_0~~

В т. x_0

$\forall \varepsilon\ \exists \delta_0$: ако $x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$, то $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$,

$y_0-\varepsilon < f(x) < y_0+\varepsilon$

$\Delta' \to \varepsilon$ търсим δ_0: да не излезем от правоъгълника

$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \times (y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon)$

За произволна точка $\bar{x}$, точката $(\bar{x}, \bar{y})$ е равноправна с точката (x_0, y_0), тъй като сме показали, че $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$

За тази точка намираме правоъгълник с център точката $(\bar{x}, \bar{y})$ и еднозначна функция. В частта, в която те се засичат.

Ако за $\bar{x}, \bar{y}$ построим съответната неявна функция, т.е. е непрекъсната в т. $(\bar{x}, \bar{y})$, но тя съвпада с функцията $f(x)$, построена първоначално, заради единствеността в общата част на правоъгълничетата.

09.IV.2013г.

Нека 1. $F(x,y)$ е непрекъсната в $D = [x_0-\Delta, x_0+\Delta] \times$
$\times [y_0-\Delta', y_0+\Delta']$

2. $F(x_0, y_0) = 0$

3. за $\forall$ фиксирано x: $F(x,y)$ – строго растяща $\nearrow$ относно

$\Rightarrow$ а) в околност на x_0: $y = f(x, f(x)) = 0$

б) $f(x_0) = y_0$

в) $f(x)$ – непрекъсната

VI. 1.74

09.IV.2013г. 22. Теорема за диференцуемост на неявна функция

Нека:
1. $F(x,y)$ непрекъсната в $D=[x_0-\Delta, x_0+\Delta]\times[y_0-\Delta', y_0+\Delta']$
2. F'_x и F'_y са непрекъснати в D
3. $F(x_0,y_0)=0$
4. $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

Тогава $\exists y=f(x)$, определена в околност на т. x_0 и тя е диференцуема

Доказателство: Тъй като $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ и F'_y е непрекъсната, то в близост до точка (x_0,y_0). $F'_y(x,y)\neq 0$ и можем да смятаме, че това е така за D. (иначе D ще вземем по-малко) $\Rightarrow \exists$ неявна функция $y=f(x)$: $F(x,f(x))=0$, $y_0=f(x_0)$ и $y=f(x)$ е непрекъсната.

Нека Δx е малко, $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$, $\Delta y=f(x+\Delta x)-y$
$\Rightarrow f(x+\Delta x)=y+\Delta y$, тъй като f удовлетворява $F(x,y)=0$
$F(x+\Delta x, f(x+\Delta x))=0$

$F(x+\Delta x, y+\Delta y)=0$

$\Delta F=F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y)=0-0=0$, тъй като F е диференцуема (следва от това, че F'_x и F'_y са непрекъснати).

Имаме $\Delta F=F'_x(x,y)\Delta x+F'_y(x,y)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=0$
α_1 и $\alpha_2\to 0$ при Δx и $\Delta y\to 0$

VI.1.75

Нека $\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \to 0$, тъй като f е непрекъсната (по първата теорема)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_x(x,y) + \alpha_1}{F'_y(x,y) + \alpha_2} \xrightarrow[(\Rightarrow \Delta y \to 0)]{\Delta x \to 0} -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \Rightarrow f'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

За контролното: Четвъртък 11. IV. 2013 г. 12^{00} - 14^{00} ч. ФМИ225

1. Приложение на определените интеграли
- теорема за адитивност
- да се извежда дължина на дъга
- другите формули само да се знаят

2. Несобствени интеграли
- дефиниция (сходящи, разходящи)
- критерии за сходимост $\int_1^\infty x^\lambda$

3. Метрика и норма в $\mathbb{R}^n$
- Евклидово пространство
- отворено и затворено множество (дефиниция)
- теорема: границите на редиците се съдържат в множеството

4. ! Лема на Бореал (няма да я има)

5. Частни производни
- достатъчно условие за диференцуемост (дефиниция)

6. Диференцуемост на съставна функция
7. ! Диференциал (няма да я има

VI.1.76

8. Градиент (с доказателство)

9. Теорема за равенства на смесени производни (с доказателство)

10. Локални екстремуми на функция на две променливи (с доказателство)

Нека 1. $F_k(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n)$ в непрекъсната околност на т. $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0)$ в $\mathbb{R}^{m+n}$, $k = \overline{1,n}$

2. ч-производна на F_k са непрекъснати в D.

3. $F(x_1^0, \dots, x_m^0, y_1^0, \dots, y_n^0) = 0$

4.
$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}(M_0) \neq 0$$

Тогава съществува околност U на точка $(x_1^0, \dots, x_m^0)$ и такива функции $f_k(x_1, x_2, \dots, x_m)$, $k = \overline{1,n}$

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_m, f_1(x_1, x_2, \dots, x_m), f_2(x_1, x_2, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)) = 0$$

$f_k(x_1^0, \dots, x_m^0) = y_k^0 \qquad k = \overline{1,n}$

f_k ~~са~~ непрекъснати и даже диференцуема (т.е. $\exists$ непрекъсната ч-производна на f_k по техните примитиви (~~по x-те~~ (по x-овете))

VI.1.77

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_m), y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, \ldots, x_m), y_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n(x_1, \ldots, x_m)) = 0 \end{cases}$$

където $y_k(x_1, \ldots, x_m) = f_k(x_1, \ldots, x_m)$

Диференциране по x_ℓ

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_\ell} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_\ell} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_\ell} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_\ell} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial F_n}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_\ell} + \frac{\partial F_n}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_\ell} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \cdot \frac{\partial y_n}{\partial x_\ell} = 0$$

Търсим например: $\frac{\partial y_2}{\partial x_\ell} = (f_2)'_{x_\ell}$

Означаваме: $\frac{D(F_1, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \ldots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0$

$$\boxed{\frac{\partial y_2}{\partial x_\ell} = - \frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, x_\ell, y_3, \ldots y_n)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}} \quad \text{Якобиан}}$$

VI 1.78

$$a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}z_3 + \dots + a_{1n}z_n = b_1 \qquad b_1 = -\frac{\partial F_1}{\partial x_\ell}$$

$$\dots \qquad \vdots$$

$$a_{n1}z_1 + a_{n2}z_2 + \dots + a_{nn}z_n = b_n \qquad b_n = -\frac{\partial F_n}{\partial x_\ell}$$

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & b & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \dots & & a_{nn} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial x_\ell} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_n} & -\frac{\partial F_n}{\partial x_\ell} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

11.IV.2013 г.

23. Приложение на теоремата за неявни функции. Множители на Лагранже.

$$F(x,u,v) \qquad \begin{cases} G_1(x,u,v) = 0 \\ G_2(x,u,v) = 0 \end{cases}$$

F, G_1, G_2 са дефинирани и имат непрекъснати ∂ производни в околност на точка (x_0, y_0, y_0).

$$(*)\begin{cases} G_1(x_0,u_0,y_0) = 0 \\ G_2(x_0,u_0,v_0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \\ \frac{\partial G_2}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(x_0,u_0,v_0)} \neq 0$$

$\Rightarrow \exists$ диференцуеми $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, заместващи u и v (теорема за неявните функции) $\varphi(x_0) = u_0$; $\psi(x_0) = v_0$

$$(*)\begin{cases} G_1(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \\ G_2(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \end{cases}$$

VI.1.79

Теорема: Разглеждаме функцията $g(x)=F(x,\varphi(x),\psi(x))$.
Нека $f(x)$ има лок. екстремум в т. x_0. Тогава $\exists \lambda_1 и \lambda_2$ (Множители на Лагранж), така че за $\boxed{\Phi = F-\lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2}$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0,u_0,v_0)=0 \; ; \; \frac{\partial \Phi}{\partial u}(x_0,u_0,v_0)=0 \; ; \; \frac{\partial \Phi}{\partial v}(x_0,u_0,v_0)=0$$

Доказателство: Търсим λ_1 и λ_2 : $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(M_0)=0$; $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(M_0)=0$,
където $M_0=(x_0,u_0,v_0)$

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial u} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial u} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial u} = 0 \text{ (в точка } M_0) \\ \frac{\partial F}{\partial v} - \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial v} - \lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial v} = 0 \text{ (в точка } M_0) \end{array} \right.$$

λ_1, λ_2 - неизвестни

Детерминанта на системата: $\begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial u} & \frac{\partial G_2}{\partial u} \\ \frac{\partial G_1}{\partial v} & \frac{\partial G_2}{\partial v} \end{vmatrix}_{(M_0)} \neq 0$

С така намерените λ_1 и λ_2 ще ~~намерим~~ покажем, че
$\underline{\frac{\partial \Phi}{\partial x}(M_0)=0}$

Тъй като $f(x)$ има локален екстремум в т. x_0, то $f'(x_0)=0$

$$(**) \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\varphi' + \frac{\partial F}{\partial v}\cdot\psi' = 0 \text{ (в точка } x_0)/(x_0,u_0,v_0)$$

VI. 1. 80

Диференцираме $(*)$:

$$\begin{cases} G_1(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \\ G_2(x, \varphi(x), \psi(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial G_1}{\partial x} + \dfrac{\partial G_1}{\partial u}\cdot\varphi' + \dfrac{\partial G_1}{\partial v}\cdot\psi' = 0 & /\cdot(-\lambda_1) \\ \dfrac{\partial G_2}{\partial x} + \dfrac{\partial G_2}{\partial u}\cdot\varphi' + \dfrac{\partial G_2}{\partial v}\cdot\psi' = 0 & /\cdot(-\lambda_2) \end{cases}\right. \quad (***)$$

и събираме $(**)$ и $(***)$ $/\cdot(-\lambda_1)+(-\lambda_2)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x} + \varphi'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial u} - \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial u}\right)}_{0} +$$

$$+ \psi'\underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial v} - \lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial v} - \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial v}\right)}_{0} = 0$$ (заради осигурения избор на λ_1 и λ_2)

$$\Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda_1\frac{\partial G_1}{\partial x} - \lambda_2\frac{\partial G_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{в т. } (x_0, u_0, v_0))$$

това е $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = 0$

16. IV. 2013г.

Общ случай:

$F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{cases} G_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \vdots \\ G_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

$M(a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)$

$$\frac{D(G_1, \dots, G_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}(M) \neq 0$$

$G_k(M) = 0 \qquad k = \overline{1, n}$

$y_1 = \varphi_1(x_1, \dots, x_m) \qquad \varphi_1(a_1, \dots, a_m) = b_1$

$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$

$y_n = \varphi_n(x_1, \dots, x_m) \qquad \varphi_n(a_1, \dots, a_m) = b_n$

$f(x_1, \dots, x_m) = F(x_1, \dots, x_m, \varphi_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_m))$ има локален екстремум в точка $(a_1, \dots, a_m)$, тогава съществува $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – const.

$\Phi = F - \lambda_1 G_1 - \lambda_2 G_2 - \dots - \lambda_n G_n$, то

$$\left| \begin{array}{l} \Phi'_{x_1}(M) = 0 \\ \Phi'_{x_2}(M) = 0 \\ \dots \\ \Phi'_{x_m}(M) = 0 \\ \Phi'_{y_1}(M) = 0 \\ \dots \\ \Phi'_{y_n}(M) = 0 \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} G_1(M) = 0 \\ \dots \\ G_n(M) = 0 \end{array} \right.$$

$m + 2n$ – уравнения

$m + 2n$ – неизвестни

VI 1.82

$$\begin{cases} F(x,y) = x^2+y^2 = 1 \\ F(x,y) = x^2+y^2 = \frac{1}{2} \\ F(x,y) = y-x = 0 \end{cases}$$

$F(x,y,z) = x^2y^4z^6$

$x,y,z \geq 0 \quad x+2y+3z = 12$

$F'_x = 2xy^4z^6$

$F'_y = 4y^3x^2z^6$

$F'_z = 6z^5x^2y^4$

$F=0$ - min стойност

$\ln F = 2\ln x + 4\ln y + 6\ln z$

$x+2y+3z=12$

$\Phi = \ln F - \lambda(x+2y+3z-12)$

$\Phi'_x = \frac{2}{x} - \lambda$

$\Phi'_y = \frac{4}{y} - 2\lambda = 2\left(\frac{2}{y}-\lambda\right) = 0$

$\Phi'_z = \frac{6}{z} - 3\lambda = 3\left(\frac{2}{z}-\lambda\right) = 0$

$\frac{2}{x} = \frac{2}{y} = \frac{2}{z} \Rightarrow x=y=z$

$F(2,2,2) = 2^2 \cdot 2^4 \cdot 2^6 = 2^{12}$

$x+2x+3x+12$

$x=2 \quad y=2 \quad z=2$

24. Числови редове

$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n$

Дефиниция: Казваме че $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, ако $\exists$ крайна граница ~~и тя е сходяща~~ $\Longleftrightarrow$ ~~S_n е ограничена~~ $(\lim_{n\to\infty} S_n)$

Пример: $1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots$

VI.1.83

~~$S_n(x)$~~ Ако $a_n \geq 0$, то S_n е монотонно растяща редица и тя е сходяща $\Leftrightarrow$ S_n е ограничена.

$S_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x} \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ ако $|x| < 1$, т.е. редът е сходящ за $|x|<1$ и неговата сума $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ е равна на $\frac{1}{1-x}$

$x = 1$ $\quad S_n = n \to \infty$ – редът е разходящ

$x = -1$ $\quad S_{2n} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 = 0$

$\qquad\quad S_{2n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + 1 - 1 + 1 = 1$

S_n няма граница, тъй като подредиците трябва да клонят към едно и също число (ако имаме)

$|x| > 1$ $\;x^n$ е неограничено

НДУ на Коши за сходимост на ред:

Редът $\sum\limits_{n=1} a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu : n \geq 0$ и

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon \quad \longleftarrow \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$

(НДУ за сходимост на редици)

Пример: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ – хармоничен ред (разходящ)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$|S_{2n} - S_n| = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n} = \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ – най-малкото}} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$

VI.1.84

Свойство (вметки):
Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ и има сума A

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ за сума B

Тогава $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ е сходящ и има сума $\lambda A + \mu B$
(линейност)

25. Редове с неотрицателни членове

Твърдение 1: Нека $a_n \geq 0$, тогава $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ $\Leftrightarrow$
(парциалните суми) S_n са ограничени отгоре.

Доказателство: S_n е монотонно растяща и $\Rightarrow$ е сходяща
$\Leftrightarrow$ ограничена отгоре.

Теорема: Нека $a_n, b_n \geq 0$
с (A) означаваме $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
с (B) означаваме $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Нека $0 \leq a_n \leq b_n$

1. Ако редът (B) е сходящ, то реда (A) е също сходящ
2. Ако редът (A) е разходящ, то и реда (B) е разходящ

Доказателство:
1) (B) е сходящ $\Rightarrow S_n^B = \sum_{k=1}^{n} b_k$ е ограничена
(по Твърдение 1)

$$S_n^A = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = S_n^B \Rightarrow S_n^A \text{ е ограничена.}$$
$\Rightarrow$ редът (A) е ~~огран~~ сходящ.

VI. 1. 85

2) Ако (А) е разходящ, допускаме че В е сходящ
$\Rightarrow$ по 1) част и (А) е сходящ, което е противоречие

Теорема: Нека $a_n, b_n > 0$ $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} k$ $0<k<\infty$, тогава редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ са сходящи или разходящи едновременно.

Доказателство: По зададено ε намираме ν:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - k\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} - k < \varepsilon \Rightarrow k-\varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < k+\varepsilon$$

$$\underbrace{|k-\varepsilon|}_{>0} b_n < a_n < \overbrace{|k+\varepsilon|}^{>0} b_n$$

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, то е сходящ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} (k-\varepsilon) b_n = (k-\varepsilon) \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Ако редът $\sum_{n=1}^{\infty}$ е разходящ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |k-\varepsilon| b_n$ е разходящ

Пример: $\sum_{n=1}^{n} \frac{7^{-\sqrt[3]{3n}}}{\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}} = a_n$ $\quad \sum \frac{1}{n}$ е разходящ ред

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{7^{-\sqrt[3]{3n}}}{\sqrt[3]{3+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}} = \frac{\frac{1}{7}}{\sqrt[3]{3}}$$

$\sqrt[n]{n} \to 1$ $\quad$ число $\frac{1}{7}$

$\sqrt[3]{3} \to 1$

VI.1.86

26. Критерий на Даламбер
(пада се често на изпит)

Теорема: Нека $a_n > 0$

1. Ако $\exists q \in (0,1)$ $(0<q<1)$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, то редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

2. Ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ $(\forall n)$, то реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

Доказателство: $a_{n+1} \le q \quad a_n \le q \cdot q \cdot a_{n-1} \le \dots \le q^n a_1$

Тогава $S_n = a_1 + \dots + a_n \le a_1 + a_1 q + \dots + a_1 q^{n-1} =$
$= a_1(1+q+\dots+q^{n-1}) \le a_1 \frac{1}{1-q}$ S_n е ограничена отгоре
$\Rightarrow$ сходящ.

Директно: 1) $a_n \le a_1 q^{n-1}$, а реда е общ член $a_1 q^{n-1}$ (геометрична прогресия) е сходящ за $0<q<1$
Прилагане принципа за сравнение $\Rightarrow \sum a_n$ е сходящ

2) Ако $a_{n+1} \ge a_n$ $\quad a_n \ge a_{n-1} \ge \dots \ge a_1$
$a_n \ge a_1 \Rightarrow a_n \not\to 0$

Н.У за един ред да е сходящ е общият му член да клони към 0. Накратко $\boxed{a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow S - S = 0}$
$\Rightarrow \sum_{n=1} a_n$ е разходящ.

27. Гранична форма на критерия на Даламбер.

Нека $a_n > 0$.

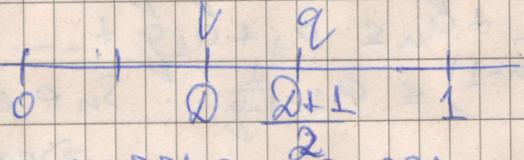
1) Ако $\frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} D$, $D<1$, то реда е сходящ.

2) Ако $D>1$, редът е разходящ

3) Ако $D=1$, не се знае с изключение на случая, когато $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ със стойност ≥ 1, той е разходящ.

Доказателство:

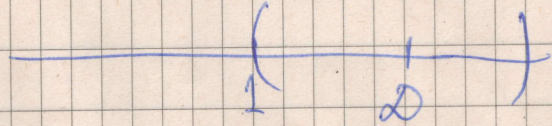
1) $D<1$



За n достатъчно големи a_n се намира в околност V с център в D и радиус $\frac{1-D}{2}$

$\Rightarrow a_n < \frac{D+1}{2} = q \Rightarrow$ по ~~първа~~ 1 част на критерия на Даламбер

2) $D>1$



$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow D \Rightarrow$ за достатъчно големи n

и $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ (в околност на D с радиус $\frac{D-1}{2}$)

по 2 част на критерия на Даламбер $\Rightarrow$ редът е разходящ.

3) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$ редът е разходящ по критерия на Даламбер.

$\boxed{\text{VI}}$.1.88

Примери:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \Rightarrow$

$\to \frac{1}{e} < 1$ редът е сходящ

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} = \frac{(2n+1)!!\,(2n)!!}{(2n-1)!!\,(2n+2)!!} = \frac{\cancel{1.3.5\ldots(2n-1)}(2n+1).\cancel{2.4.6\ldots 2n}}{\cancel{1.3.5\ldots(2n-1)}.\cancel{2.4.6\ldots 2n}.(2n+2)}$

$= \frac{2n+1}{2n+2}$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2n+1}{2n+2} \to 1$!!! Не ни дава отговор и затова ни трябва друг критерий.

28. Критерий на Коши

Теорема: Нека $a_n > 0$

1) Ако $\exists q \in (0,1)$ $\quad (0 < q_n < 1)$: $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, то реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

2) Ако $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ $(\forall n)$, то реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ.

Доказателство:

1) $a_n \leq q^n \Rightarrow a_n$ се мажорира (по-малко е) от общия член на сходяща геометрична прогресия $(\sum q^n) \Rightarrow \sum_{n=1} a_n$ е сходящ.

2) $a_n \geq 1 \to a_n \not\to 0 \Rightarrow$ редът е разходящ

29. Гранична форма на критерия на Коши.

Нека $a_n > 0$ и $\sqrt[n]{a_n} \to C$

1) Ако $C < 1$ – редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ

2) Ако $C > 1$ – редът $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ е разходящ

3) Ако $C = 1$ нищо не може да се каже с изключение на случая $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ със стойности ≥ 1 (тогава редът е разходящ).

Пример: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n+1}{3n-2} \to \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ сходящ.

30. Критерий на Раабе – Дюамел

1. Нека $a_n > 0$ и $\exists \mu > 1$:

$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq \mu$ за $\forall n$ (или за $n \geq k_0$)

Тогава редът е сходящ.

2. Нека $a_n > 0$ $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$, тогава редът е разходящ.

VI.1.90

Доказателство:

1) $n(a_n - a_{n+1}) \geq \mu a_{n+1}$

$n a_n - n a_{n+1} \geq \mu a_{n+1} \quad / . (-a_{n+1})$

$n a_n - (n+1) a_{n+1} \geq (\mu - 1) a_{n+1}$

$$+\left|\begin{array}{l} a_1 - 2a_2 \geq (\mu-1) a_2 \\ 2a_2 - 3a_3 \geq (\mu-1) a_3 \\ 3a_3 - 4a_4 \geq (\mu-1) a_4 \\ \vdots \\ (n-1) a_{n-1} - n a_n \geq (\mu-1) a_n \end{array}\right.$$

$\qquad\qquad\qquad\; ? 0$

$a_1 - n . a_n \geq (\mu - 1)[\underbrace{a_2 + a_3 + \ldots + a_n}_{S_n - a_1}]$

$S_n - a_n \leq \frac{a_n - n . a_1}{\mu - 1} \leq \frac{a_1}{\mu - 1}$

2) $n a_n - n . a_{n+1} \leq a_{n+1}$

$n a_n \leq (n+1) a_{n+1}$

$n a_n \geq (n+1) a_{n-1} \geq (n-2) a_{n-2} \geq \ldots \geq 2a_2 \geq a_1$

$a_n \geq a_1 \frac{1}{n}$

Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 . \frac{1}{n}$ е разходящ $= a_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ n-тия ред е разходящ

VI.1.91

31. Гранична форма на Раабе-~~Даламбер~~ Дюамел

$\exists\ n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \to r$

Тогава 1. Ако $r > 1 \Rightarrow$ редът е сходящ

2. Ако $r < 1 \Rightarrow$ редът е разходящ.

Задача от преди:

$\sum \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ $\qquad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+2}$. $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right)$

18. IV. 2013г.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(3n)!}{27^n(n!)^3}}_{a_n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(3n+3)!}{27^{n+1}((n+1)!)^3}}{\frac{(3n)!}{27^n(n!)^3}} = \frac{(3n+3)!\ 27^n}{(3n)!\,(27)^{n+1}}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^3 =$$

$$= \frac{1}{27} \cdot \frac{(3n+1)(3n+2)\cancel{(3n+3)}}{\cancel{27}_{9}(n+1)^3} = \frac{1}{9}\ \frac{(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$\Rightarrow$ Даламбер не дава отговор

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{9n^2+18n+9}{9n^2+9n+2} - 1\right) = n\left(\frac{\cancel{9n^2}+18n+9-\cancel{9n^2}-9n-2}{9n^2+9n+2}\right) =$$

$$= \frac{9n^2-7n}{9n^2+9n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Rightarrow \text{Дюамел} \to \text{не}$$

VI 1.92

32. Критерий на Гаус

Нека $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^{1+\varepsilon}}$, където $|\gamma_n| \le C$

Тогава:

1) ако $\alpha > 1$, редът е сходящ; $\alpha < 1$ - разходящ
2) $\alpha = 1$, $\beta > 1$ - сходящ; $\alpha = 1$, $\beta < 1$ - разходящ
3) $\alpha = 1$, $\beta = 1$ - разходящ

Доказателство:

1) $\alpha > 1$ $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \frac{1}{\alpha} < 1$ - сходящ по Даламбер

$\alpha < 1$ $\quad \frac{1}{\alpha} > 1$ - разходящ по Даламбер

2) $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\varepsilon}} \longrightarrow \beta$: $\beta > 1$ - сходящ по Раабе-Дюамел

$\beta < 1$ - разходящ по Раабе-Дюамел

33. Критерий на Кумер
(не влиза в изпита)

Нека $c_n > 0$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ е разходящ. Образуваме ~~$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}}$~~

$K_n = c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}$.

Ако $\exists \delta > 0 : K_n \ge \delta$, редът е сходящ. Ако $K_n \le 0$, редът е разходящ.

VI. 193

Ще докажем частта за разходимост:

$K_n \leq 0$

$C_n \frac{a_n}{a_{n+1}} \leq C_{n+1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{C_n}{C_{n+1}}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \geq \frac{C_n}{C_{n+1}} \cdot \frac{C_{n-1}}{C_n} \cdots \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_{n+1}}$

$\boxed{a_n \geq a_1 \cdot C_1 \frac{1}{C_n}}$ $\Rightarrow$ редът със сума a_n е разходящ, защото $\sum \frac{1}{C_n}$ е разходяща.

Ако $C_n = 1 \rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \delta$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{1+\delta} \Rightarrow$ критерий на Даламбер

$a_n = n \rightarrow$ Раабе – Дюамел

$C_n = \frac{1}{n \ln n} \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ – разходящ

34. Критерий на Бертран за разходимост:

$K_n = n \ln n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln(n+1)$

$B_n = \ln n \cdot n \left[\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right] \rightarrow 0$

IV. 1. 94

$K_n - n \ln n + \ln n + \ln n - \ln n = \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) -$

$- (n+1)(\ln(n+1) - \ln n) = B_n - (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = B_n - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} \to$

$\to B_n - 1$

$K_n = B_n - 1$

$K_n \geq 0$, $B_n \leq 1$ - разходящ

$K_n \leq 0$, $B_n \geq 1 + \delta$ - сходящ

$B_n = \ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \to 0$

Ако $B_n \geq 1 + \delta$ - сходящ

$B_n \leq 1$ - разходящ

3) $\frac{B_n}{n \ln n} = \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 - \frac{1}{n} \to B_n = \frac{\ln n}{n \cdot \varepsilon} \gamma^{-n} \to 0$

$\shortparallel$ ограничена

$\frac{k \gamma^n}{n^2 + \varepsilon}$

$\Rightarrow B_n \to 0$ $B_n \leq 1$, т.е. редът е разходящ

> ! За изпита: Само формулировка на критерия на Гаус.

VII 1.95

⇒ продължение на задача 1:

$$\frac{9n^2-7n}{9n^2+9n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{9n+7}{(3n+1)(3n+2)} = 1 + \frac{9n+6}{(3n+1)(3n+2)} + \underbrace{\frac{1}{(3n+1)(3n+2)}}_{\text{малко число}} =$$

$$= 1 + \frac{3}{3n+1} + \text{малкото число} = 1 + \frac{3}{3n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \text{малкото число}$$

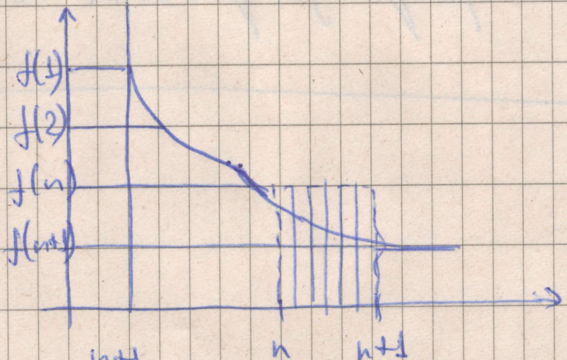
$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{3n-3n-1}{n(3n+1)} + \text{малкото число} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{C}{n^2} \to$$

→ разходящ по Гаус

35. Интегрален критерий на Коши (K!)

Теорема: Нека $f(x)$ е неотрицателна, монотонно намаляваща $[1, +\infty)$, тогава реда $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ е сходящ или разходящ едновременно с $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Доказателство:



$$f(n+1)(n+1-n) \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le f(n)(n+1-n)$$

VI 1 96

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \le \int_1^N f(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{N-1} f(n) = f(1)+f(2)+\dots+f(N-1)$$

$$\underbrace{f(1)+f(2)+\dots+f(N-1)}_{=S_{N-1}}$$

суми по $n=\overline{1,N-1}$

$$f(2)+f(3)+\dots+f(N) = S_N - f(1)$$

$$\boxed{S_N - f(1) \le \int_1^N f(x)\,dx \le S_{N-1}}$$

$\Rightarrow$ Нека редът е сходящ $\Rightarrow$ Парциалните суми са ограничени с L $\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx \le L$.

Означаваме с $F(A) = \int_1^A f(x)\,dx$

$\Rightarrow F(A) \le F(N) \le L \Rightarrow$ функцията $F(A)$ е монотонно растяща и ограничена отгоре $\Rightarrow \exists \lim\limits_{A\to\infty} F(A)$, т.е. $\int_1^\infty f(x)\,dx$ е сходящ.

$\Leftarrow$ Нека $\int_1^\infty f(x)\,dx$ е сходящ $\Rightarrow \int_1^N f(x)\,dx$ е ограничен

$\Rightarrow S_n \le f(1) + \int_1^N f(x)\,dx$ е ограничена $\Rightarrow$ редът е сходящ.

VI.1.97

36. Приложение на теоремата:

1. Обобщен хармоничен ред:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad f(n)$$

$$f(x) = \frac{1}{x^s} \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s}$$

$s > 1$ - сходящ

$s \leq 1$ - разходящ

• $C_n = \frac{1}{n \ln n}$ $\qquad \sum C_n$ е разходящ

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln x}$$

$$\int_2^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln \left|\ln(x)\right| \Big|_2^A = \ln(\ln A) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[A \to \infty]{} \infty$$

разходящ

• $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} \qquad \int_2^{A} \frac{d \ln x}{\ln^p x} = \quad , p \neq 1$$

$$= \frac{(\ln x)^{1-p}}{1-p} \Big|_2^A = \frac{(\ln A)^{1-p}}{1-p} - C$$

за $p > 1$, ∞ отрицателни степени $\to$ сходящ

$p < 1$, ∞ положителни степени $\to$ разходящ

Валидно е, ако $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$, е монотонно намаляваща

$$f'(x) = \frac{-(\ln^p x + x \cdot p \cdot \ln^{p-1} x \cdot \frac{1}{x})}{x^2 \ln^{2p} x} = \frac{-\ln^{p-1} x(\ln x + p)}{(\ln x + p)^2}$$

VI.1.98 ⊛ $\sum a_n$ е сходяща $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ - другият критерий на Коши

23.IV.2013г.

Лема: Нека $a_n > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r > 0$, тогава $a_n \to 0$

Доказателство: $r > 0 \Rightarrow \exists$ естествено число $rk > 1$ $\left(k > \frac{1}{r}\right)$
разглеждаме редицата $\sum\limits_{n=1} a_n^k$

Прилагаме критерия на Раабе - Дюамел към този ре

$$n\left(\frac{a_n^k}{a_{n+1}^k} - 1\right) - n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)\left(\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{k+1} + \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{k+2} + \dots + 1\right)$$

$\to r$

$$p^k - q^k = (p-q)(p^{k-1} + p^{k-2}q + \dots)$$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > 0$ от някакво място нататък $\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$

$a_n > a_{n+1}$ a_n е монотонно намаляваща

(и е ограничена отдолу) с 0, то тя е сходяща)

$\Rightarrow$ тъй като $> 1 \Rightarrow \sum a_n^x$ е сходящ $\Rightarrow a_n^x \to 0$ и a_n

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}$ $a_n = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-1)!!\,(2n+2)!!}{(2n)!!\,(2n+1)!!} = \frac{2n+2}{2n+1} \to 1 > 0$$

$\sum (-1)^n a_n$ $a_n \searrow 0$ - сходящ по Лайбниц

37. Абсолютно и условно сходящи редове

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ е сходящ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$ е разходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ, а $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е разходящ $\Rightarrow$ условно сходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ е сходящ, тъй като

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ е сходящ $\Rightarrow$ абсолютно сходящ, тъй като

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$ е сходящ

Твърдение: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то той е сходящ.

Доказателство: НДУ на Коши

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| \leq ||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \dots + |a_{n+p}||$, тъй като $\sum |a_n|$ е сходящ, то последното може да бъде направен $< \varepsilon$

$\Rightarrow A < \varepsilon$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е сходящ.

Твърдение 2: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, то той може да се представи като разлика на два сходящи реда с неотрицателни членове.

Вярно е и обратното, ако $a_n = p_n - q_n$ и $p_n, q_n \geq 0$ $\sum p_n$ и $\sum q_n$ са сходящи, то и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ.

VI. 1,900

Доказателство: Нека $\sum a_n$ е абсолютно сходящ, т.е. $\sum\limits_{n=1} |a_n|$ е сходящ. По твърдение 1 сходящ е и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Образуваме $p_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) \geq 0$

$a_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) \geq 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ – сходящ

$\sum a_n$ – също е сходящ

Обратно, нека $a_n = p_n - q_n$, където $p_n, q_n \geq 0$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$ са сходящи.

$|a_n| = |p_n - q_n| \leq |p_n| + |q_n| = p_n + q_n \Rightarrow \sum |a_n|$ е сходящ, тъй като от сходящ ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |p_n + q_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} p_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} q_n$

Забележка: Представянето на a_n, като разлика на два неотрицателни сходящи реда не е различно
$a_n = p_n - q_n$

$p_n \to p_n + \frac{1}{n^2}$ $\quad a_n = \left(p_n + \frac{1}{n^2}\right) - \left(q_n + \frac{1}{n^2}\right)$

Теорема: Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, тогава $\forall$ ред получен чрез разместване на членовете, също сходящ и сумата му ~~става му~~ остава същата.

Доказателство: I случай: Нека $a_n > 0$ S_n - $n^{\text{ти}}$ парциални суми за $\sum a_n$

S'_n - $n^{\text{ти}}$ парциални суми за $\sum a'_n$

$S'_n = a_{k_1} + a_{k_2} + \dots + a_{k_n}$

$(S'_4 = a_4 + a_5 + a_1 + a_{20})$ $\quad S'_4 \le S_{20}$

$S'_n \le S_e$, тъй като $a_n > 0$, то S_e само расте и $S_e \xrightarrow[e\to\infty]{} S \Rightarrow S'_n \le S$

S'_n също монотонно растяща $\Rightarrow S'_n$ е сходящ

Означаваме границите ѝ с S'.

$S' \le S$

$\sum a_{k_n} = \sum p_{k_n} - \sum q_{k_n} = \sum p_n - \sum q_n = \sum a_n$

Теорема на Риман: Ако реда е неабсолютно сходящ, то реда може да се пренареди по такъв начин, че или да се получи разходящ ред или произволно число.

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k} = \frac{1}{2} \ell_{n2}$

VI. 1.1.02

$p=2,\ q=1 \qquad 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots=\frac{3}{2}\ln 2$

$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}-\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{5}+\dots=0$

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ има сума A

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ има сума B

$\sum_{i,k=1}^{\infty} a_i b_k$

$$\begin{matrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \dots \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \dots \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \dots \end{matrix}$$

Теорема на Коши: Нека редовете $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(редовете (A) и (B) са абсолютно сходящи и имат за сума съответно числата A и B. Тогава редът $\sum_{\substack{i=1\\k=1}}^{\infty} a_i b_k$ е сходящ и сумата му е равна на AB.

Доказателство: S_k ...

Теорема на Мертенс: Нека $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е абсолютно сходящ, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходящ, тогава редът получен като произведение (симетрия по диагонали)

$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_3b_1+a_2b_2+a_1b_3)+\dots+\dots$ е сходящ и сумата е $A.B$

Теорема на Абел:
Нека $\{a_n\}$ е монотонна и ограничена, а $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ е сходяща, тогава $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходящ.

Теорема на Дирихле:
$\exists$ a_n е монотонна и $a_n \to 0$. Нека B_n принадлежи на реда $\sum b_n$ са ограничени.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ е сходяща.

Доказателство: (не се изисква за изпита)
$b_n = \sin nx$
$b_n = \cos nx$ $\quad B_n$ – ограничена

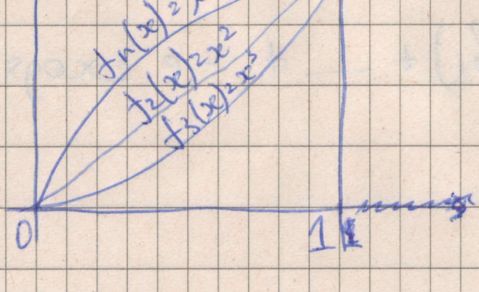
$b_n = (-1)^{n-1}$
$B_n = 0$ или 1 $\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ е сходящ.

38. Функционални редици и редове

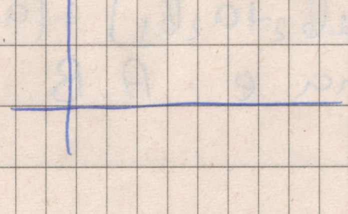
$f_n(x)$ $\quad , x \in M$

Примери: 1) $f_n(x) = x^n$ в точка $M = [0, 1]$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ – гранична функция



$x^n \to 0$
$0 < x < 1$



VI.1.104

$x^n \to 0$ / $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{за } x \in [0, 1) \\ 1 & \text{за } x \in 1 \end{cases}$

2) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ $M = [0; 1]$

$f_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$f_n(1) = \frac{1}{1+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ за $\forall x > 0$ $\frac{1}{1+nx} \sim \frac{1}{\infty} = 0$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{за } x = 0 \\ 0 & \text{за } x \in (0; 1] \end{cases}$

3) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$

$f_n(0) = \frac{0}{1} = 0 \to 0$ $f_n(1) = \frac{n}{1+n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\frac{\cancel{n}x}{n^{\cancel{2}}\left(\frac{1}{n^2x^2}+1\right)} \sim \frac{x}{\infty} = 0$ $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$

$f_n(x) \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

25. IV. 2013 г

1. $f_n(x) = x^n \quad [0, 1] \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

2. $f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & 0 < x \le 1 \end{cases}$

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \qquad f(x) \equiv 0$

4. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n} \qquad f(x) \equiv 0$

Ако x – фиксирано, по ε намираме $\nu = \nu(x) : |f_n(x) - f(x)| <$ и $> \nu(x)$

Дефиниция: Казваме, че редицата $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ клони равномерно към $f(x)$ в множеството M, ако за $\forall \varepsilon >$ $\exists \nu : n > \nu \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ (едновременно за всички $x \in$

$|f_n(x) - f(x)|$

2) $\left|\frac{1}{1+nx} - 0\right| < \varepsilon \qquad 0 < x \le 1 \qquad \frac{1}{1+nx} < \varepsilon, \ (nx+1)\varepsilon > 1$

$nx + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$\left|\frac{1}{1+n.1} - 1\right| \qquad x = 1 \qquad \Rightarrow n > \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = \nu(x)$

$\Rightarrow$ сходимостта не е равномерна

4) $\left|\frac{\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \frac{|\sin nx|}{n} < \varepsilon$

Достатъчно е $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $n > \frac{1}{\varepsilon} = \nu \Rightarrow$ сходимостта е равномерна.

VI 1.106

Дефиниция: Казваме че $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е равномерно сходящ в M, ако редицата $S_n(x)$ от парциалните суми клони към $S(x)$ - сумата.

39. НДУ за равномерна сходимост:

$f_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} f(x) \Longleftrightarrow$ ⊛ $f_n(x)$ клони равномерно към $f(x)$ в

точка M: $f_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} \cancel{g(x)}\ f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|\right)}_{a_n} = 0$$

Доказателство:

$\Rightarrow$ $f_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} f(x) \Rightarrow$ по ε намираме $\nu: n > \nu$

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ за всички x от M едновременно.

$\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ за $n > \nu$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$

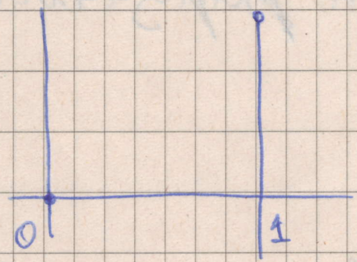
$\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow$ по ε може да се намери $\nu: n > \nu$

$0 < a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$

Щом $0 < \sup < \varepsilon \Rightarrow$ за $\forall x$ е изпълнено $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ за всички x от M едновременно.

VI.1.107

Пример: 1) $f_n(x) = x^n$ в $[0;1] = M$



$$|f_n(x) - f(x)| \le |x^n - 0| = x^n$$

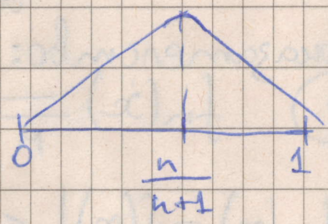
$\sup\limits_{x\in[0;1]} x^n = 1^n = 1 \not\to 0 \Rightarrow$ сходимостта е неравномерна

$$f_n'(x) = nx^{n-1}$$

5.) $f_n(x) = x^n(1-x) = x^n - x^{n+1}$ в $[0;1]$

$$f(x) \equiv 0$$

$$\sup_{x\in[0,1]} |x^n - x^{n+1}| = \sup_{x\in[0;1]} (\underbrace{x^n - x^{n+1}}_{g(x)})$$



$$g'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n+1)\left[\frac{n}{n+1} - x\right]$$

$$\sup g(x) = g\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^n}\left(1-\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \to 0$$

3) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $[0;1)$

$$\sup\left|\underbrace{\frac{nx}{1+n^2x^2}}_{g(x)} - 0\right| \qquad g'(x) = \frac{n(1+n^2x^2) - 2n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} =$$

$$= \frac{n - n^3x^3}{(1+n^2x^2)^2} = n(1-(nx)^2)$$

$\sup(g(x)) = g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+\frac{n^2}{n^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ сходимостта не е равномерна

VI.1.108

40. Критерий на Коши за равномерна сходимост
(за изпита без доказателство)

Твърдение: $f_n(x)$ е равномерно сходяща в $M \Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu$ = $n > \nu$ и решение с $\underbrace{|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon}_{\text{НДУ на Коши}}$ за $\forall x$ от M едновременно

30. IV. 2013 г. 41. Теореми на функции

Теорема 1: Нека $f_n(x)$ са непрекъснати в M и $f_n(x) \underset{M}{\rightrightarrows} f(x)$, тогава $f(x)$ е непрекъсната.

Забележка: Това условие е достатъчно условие (ДУ), но не е и необходимо (НДУ)

Доказателство: фиксирано $x_0 \in M$
Разглеждане (*) $|f(x) - f(x_0)| \leq \underset{(1)}{|f(x) - f_n(x)|} +$

$+ \underset{(2)}{|f_n(x) + f_n(x_0)|} + \underset{(3)}{|f_n(x_0) - f(x_0)|}$

$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow$ по ε може да намерим ν:

$n > \nu \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ за $\forall x \in M$

Взимане такова $\underline{n}$ и го фиксираме.

VI 1.109

В (*) за това n (1) и (3) са по-малки от $\frac{\varepsilon}{3}$

За (2) n е фиксирано, тъй като $f_n(x)$ е непрекъсната (в x_0), то $\exists \delta$: за $\underset{x \in M}{|x-x_0|} < \delta$ е изпълнено

$|f_n(x) - f_n(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow$ за $x \in M$ и $|x-x_0| < \delta$ имаме

$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Теорема 2: Граничен преход под знака на интеграла.

Нека $f_n(x) \underset{[a;b]}{\rightrightarrows} f(x)$ (равномерно в $[a,b]$), тогава

$$\int_a^b f_n(x)dx \longrightarrow \int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Това е ДУ, но не е НДУ, т.е. условието за равномерната ~~непре~~ сходимост може да бъде заменено с друго.

Пример: $f_n(x) = x^n$ в $[0;1]$ $\quad f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0 & [0,1) \\ 1 & \text{за } x=1 \end{cases}$

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0 = \int_0^1 f(x)dx$$

$$f_n(x) \not\rightrightarrows f(x)$$

По ε намираме ν: $n > \nu$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad \forall x \in [a,b]$$

VI. 1 110

$$|A| \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \frac{\varepsilon}{b-a}\,x\Big|_a^b = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$$

Теорема 3: Почленно диференциране

Нека $f_n(x) \xrightarrow[{[a,b]}]{} f(x)$

Нека $\exists\, f_n'(x)$ - непрекъснати и $f_n'(x) \underset{[a,b]}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ (равномерно непрекъсната в $[a,b]$), тогава граничната функция $f(x)$ е диференцуема и нейната производна $f'(x)=\varphi(x)$.

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim f_n(x)\right)'\right)$$

Доказателство: Тъй като $f_n'(x)$ са непрекъснати в $[a,b]$ и $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ в $[a,b]$, то по теорема 1 $\varphi(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$.

По теорема 2: $\int_a^b f_n'(x)\,dx \to \int_a^b \varphi(x)\,dx$

$f_n(b)-f_n(a)$, но ние вместо $b \to x$, $x \to t$

$$\int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

$$\|$$

$$f_n(x)-f_n(a) \Rightarrow f(x)-f(a) = \int_a^x \varphi(t)\,dt$$

$$\downarrow n\to\infty$$

$$f(x)-f(a)$$

$\varphi(t)$ е непрекъсната и прилагаме към дясната част Лайбниц-Нютон ~~При~~ $\Rightarrow$ ~~$\exists u = \varphi(x)$~~ $\Rightarrow$ съществува и е равна на производната на лявата част и съществува $f'(x)=\varphi(x)$

Същите теореми, но за редове. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

42. Теореми за редове

Теорема 1: Ако $U_n(x)$ са непрекъснати в точка M и редът е равномерно сходящ (клони към $S(x)$, то $S(x)$ е непрекъсната)

Теорема 2: Ако $\sum u_n(x)$ е равномерно сходящ в $[a,b]$, то $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n dx$

Теорема 3: Ако $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ е сходящ в $[a,b]$, а

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ е равномерно сходящ към $\varphi(x)$, то

$$\sum u'_n(x) = \left(\sum u_n(x)\right)'$$

43. Степенни редове

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$, тъй като

x, за които $\sum a_n x^n$ е сходящ, наричаме област на сходимост.

$0 \in$ областта на сходимост за $\forall$ ред.

разходящ | сходящ | разходящ

$-R \quad 0 \quad R$

Разглеждаме: $\sqrt[n]{|a_n|}$

1) $\sqrt[n]{|a_n|}$ е неограничена
2) $\sqrt[n]{|a_n|}$ има точка на сгъстяване

$\exists L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ - най-голямата точка на сгъстяване

VI.1.112

Теорема на Коши – Адемар

Ако $\sqrt[n]{|a_n|}$ е неограничена, то $\sum\limits_{n=0} a_n x^n$ е сходящ само за $x=0$.

Ако $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ и $L>0$, то редът е сходящ за $|x| < \frac{1}{L}$ и разходящ за $|x| > \frac{1}{L}$

Ако $L=0$, то реда е сходящ за $\forall x$ (сходимостта е абсолютна)

$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$

Доказателство: I част) при L неограничена

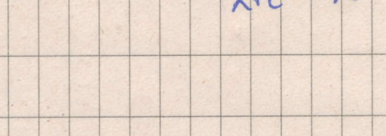
$\sqrt[n]{|a_n|}$ е неограничена, взимаме $x \neq 0$, тогава
$\sqrt[n]{|a_n|}\,x$ е неограничена $\Rightarrow \exists\, \nu : n>\nu \ \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x| > 1$

$\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1 \qquad |a_n x^n| > 1 \Rightarrow a_n x^n \not\to 0$

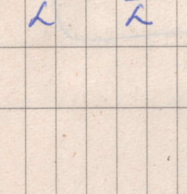
⇒ не е изпълнено необходимото условие за сходимост на редици, общия член да клони към 0.
⇒ $\sum a_n x^n$ е разходящ.

II част) Нека $\sqrt[n]{|a_n|}$ е ограничена $L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

1) Образуваме $\frac{1}{L} > 0$. Нека $|x| < \frac{1}{L}$ (1)



$\exists\, \varepsilon > 0$

(, ако $x \in [\frac{1}{L}; \frac{1}{L}]$)

L е най-голямата от точките на сгъстяване за $\sqrt[n]{|a_n|}$

$$L-\varepsilon \qquad L+\varepsilon$$

Няма безброй много $\sqrt[n]{|a_n|}$ по-големи от $L+\frac{\varepsilon}{2}$ (иначе по Болцано-Вайерщрас бихме намерили ~~така наречените~~ точките на сгъстяване $> L+\frac{\varepsilon}{2}$, а L е най-голямата)

$\Rightarrow$ за достатъчно големи n: $\sqrt[n]{|a_n|} < L+\frac{\varepsilon}{2}$ (2)

От (1) и (2) $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x| < \frac{L+\frac{\varepsilon}{2}}{L+\varepsilon} < 1$

По критерия на Коши, тъй като $\sqrt[n]{|a_n x_n|} \le q < 1$ реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ е сходящ.

III част) $|x| > \frac{1}{L}$

$$-\frac{1}{L} \qquad 0 \qquad \frac{1}{L} \qquad |x|$$

$\frac{1}{1-\varepsilon}$ за достатъчно големи k:

$$L-\varepsilon < \sqrt[n_k]{a_{n_k}} < L+\varepsilon$$

$|x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$

$L = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$

$\Rightarrow \exists n_k \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$

$\Rightarrow \exists n_k \ \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$

$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\,|x| > (L-\varepsilon)\frac{1}{L-\varepsilon} = 1$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n x^n|} \not\to 0$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е разходящ.

VI.1.114

II случ) $L = 0$, тъй като $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 0$, то точката на сгъстяване $\geq 0 \Rightarrow L = 0$ е единствена точка на сгъстяване $\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$$

(за достатъчно големи n: $\sqrt[n]{|a_n||x^n|} < \frac{1}{2}$) по критерия на Коши реда е сходящ.

Теорема на Коши–Адамар:
За всяка степенен ред $\exists$ число $R \geq 0$: за $x > R$, редът е разходящ, за $|x| < R$ редът е сходящ.

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad R = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \to 1 \quad R = 1$ разходящ, сходящ, разходящ (-1, 1)

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \quad x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ разходящ хармоничен ред

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \sqrt[n]{|a_n|} \quad \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} \to 1 \quad x = 1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to 0$

$\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ сходящ по Лайбниц $\quad a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n^2} \searrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$

$x = -1$ – сходящ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходящ, т.е. $\frac{1}{n^2} > 1 \quad [-1; 1]$

VI.1.115

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+n+1} \qquad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2}{\sqrt[n]{n^2+n+1}} \sim \frac{2}{\sqrt[n]{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 2 \quad R=2$$

разходящ, сходящ, разходящ $\quad -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \qquad x = \frac{1}{2}$

$$\sum \frac{2^n (\frac{1}{2})^n}{n^2+n+1} = \sum \frac{1}{n^2+n+1} \sim \sum \frac{1}{n^2} \text{ - сходящ}$$

$$x = -\frac{1}{2} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{n^2+n+1}$$

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{\frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{(n+1)^2+n+1+1}}{\frac{2^n |x|^n}{n^2+n+1}} = \frac{2|x|(n^2+n+1)}{(n+1)^2+n+2} \to 2|x|$$

n^2+3n+3

$2|x| < 1$ - сходящ по Даламбер

$|x| < \frac{1}{2}$ - сходящ по Даламбер

$|x| > \frac{1}{2}$ - разходящ по Даламбер

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{4^n(3n+2)} \qquad u_n(x) \qquad \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|x|^{n+1} 4^n (3n+2)}{4^{n+1}(3n+5)|x|^n} =$$

$$= \frac{|x|}{4} \cdot \frac{3n+2}{3n+5} \to \frac{|x|}{4} \qquad R = 4$$

$-4 \quad 4$

разх. сходящ разх.

$$x=4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \quad (-1)^n a_n = \frac{1}{3n+2} \searrow 0$$

$$x=-4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-4)^n}{(3n+2)\,4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \sim \sum \frac{1}{n}$$

разходящ

$$\sum \frac{(-3)^n x^n}{2n^2+1}$$

VI.1.116

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \frac{|(-3)^{n+1}|\,|x|^{n+1}\,(2n^2+1)}{(2(n+1)^2+1)\,|(-3)^n|\,|x^n|} = 3|x|\,\frac{2n^2+1}{2n^2+4n+3} \to 3|x|$$

$R = \frac{1}{3}$ $\quad |x| < \frac{1}{3}$ е сходящ

$\sum \frac{(-3)^n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2n^2+1} = \sum \frac{(-1)^n}{2n^2+1}$ – Лайбницов сходящ ред

$x = -\frac{1}{3}$ $\qquad \sum \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{2n^2+1} \sim \sum \frac{1}{2n^2+1} \sim \sum \frac{1}{n^2}$ $\quad \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

Лема: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$

$\limsup b_n \quad \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$

$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n = BC$

$b-\varepsilon \quad b \quad b+\varepsilon$

$\exists\, b_{n_k} \longrightarrow B$

1) $b_n > B+\varepsilon$ е изпълнено само за краен брой n.

$c_{n_k} b_{n_k} \Rightarrow CB$ е точка на сгъстяване, тъй като

$C-\varepsilon < c_n < C+\varepsilon \qquad c_n \to C$

$b_n c_n < (C+\varepsilon)(B+\varepsilon)$ за $\forall\, c$ с изключение на краен брой

$BC \qquad (B+\varepsilon)(C+\varepsilon)$

VI.1.117

44. Непрекъснатост на сумата на степенен ред

Теорема 1: $r < R$ – радиус на сходимост на $\sum a_n x^n$, тогава $\sum a_n x^n$ е равномерно сходящ в $[-r, r]$

Доказателство:

$$-R \quad -r \quad 0 \quad r \quad R$$

$$|x| \le r \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n$$

степенен ред (ФР) — ~~ред~~ сходящ числов ред

Пример за критерия на Вайерщрас $\Rightarrow$ редът е равномерно сходящ в $[-r; r]$

Следствие: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е непрекъснат във вътрешността на интервала на сходимост.

45. Диференциране на $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Твърдение: Редът $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ имат един и същ R (радиус на сходимост)

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n$$

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n| n}} \overset{\text{Лема}}{=} \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}} \cdot \frac{1}{\lim \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|a_n|}}$$

VI.1.118

аналогично: редът получен с ~~почлено~~ почленно интегриране има същият радиус на сходимост

$$\sum \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} = x \sum \frac{a_n x^n}{n+1}$$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n+1}}$$

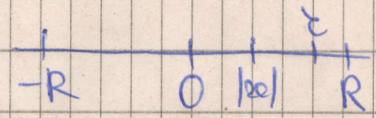
Теорема: Сумата $f(x)$ на реда

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots$ е диференцуема функция и

$$f'(x) = a_1 + 2a_1x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots$$

$x \in (-R; R)$ $\quad\quad R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Доказателство: взимаме $x \in [-R; R]$



В интервала $[-r; r]$ и двата степенни редове са равномерно сходящи, заради критерия на Вайерщрас, както в доказателството за непрекъснатост на сумата в степенния ред.