

26. II 2013г. Диференциално и интегрално смятане
 II част
 Людмила Николова

Литература: ДИС - Сендов ; Леви - функции на много измерения

Приложение на интегралите
 Адитивна ф-я на интегралите

$$f: X \rightarrow Y \quad X = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \in [a, b]\} \quad Y: \mathbb{R}$$

$$f: J \quad J(\alpha, \beta) \\ J(\alpha, \beta) = J(\alpha, \gamma) + J(\gamma, \beta) \\ J(\alpha, \gamma) = J(\alpha, \beta) + J(\beta, \gamma)$$

$$\alpha <$$

Пример: $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx$

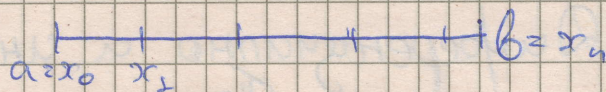
Теорема 1: Нека f е дефинирана в $[a, b]$ (интегруема). Нека за $(\alpha, \beta) \in [a, b]$ да е изпълнено

$$\inf_{(\alpha, \beta)} f(x) (\beta - \alpha) \leq J(\alpha, \beta) \leq \sup_{(\alpha, \beta)} f(x) (\beta - \alpha) \quad (*)$$

Тогава $J(a, b) = \int_a^b f(x) dx$

J-адитивна ф-я на интервала

Доказательство:



(α, β) от $(*)$ (x_{i-1}, x_i)

$$J(x_{i-1}, x_i) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) (x_i - x_{i-1})$$

$$\underbrace{\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{m_i} (x_i - x_{i-1}) \leq J(x_{i-1}, x_i) \leq \underbrace{\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)}_{M_i} (x_i - x_{i-1})$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1}) \leq J(x_0, x_1) + J(x_1, x_2) + \dots + J(x_{n-1}, x_n) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$s_\tau \leq J(a, b) \leq S_\tau \quad \forall \tau \quad \sup s_\tau \leq J(a, b) \leq \inf S_\tau$$

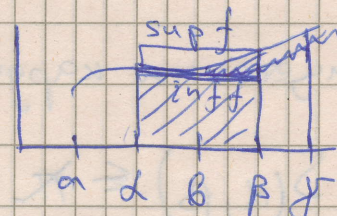
$$\underline{I} \leq J(a, b) \leq \overline{I}$$

суммы
по
парам

мыслим что $f(x)$ в $[a, b]$ непрерывна $\rightarrow \underline{I} = \overline{I} = \int_a^b f(x) dx$
 $\Rightarrow J(a, b) = \int_a^b f(x) dx$

Риманов
интеграл

Задача 1: $J(a, b)$

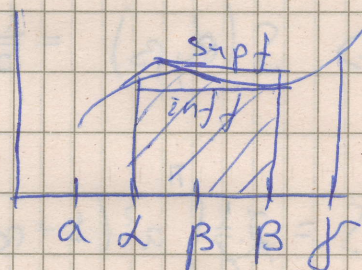


$J(a, b) = S_{[a, b]}$ - лицето на криволинейного трапеца с основа $[a, b]$

адитивна функция

$$\inf_{[a, b]} f(x)(b-a) \leq S_{[a, b]} \leq \sup_{[a, b]} f(x)(b-a)$$

$$\Rightarrow S_{[a, b]} = \int_a^b f(x) dx$$



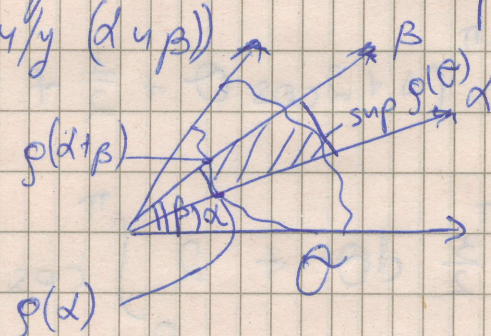
Задача 2: $J(a, b)$ лице на криволинейен сектор

θ - аргумент (ъгъл м/у x и y)

$\rho = \rho(\theta)$

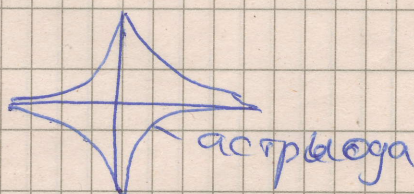
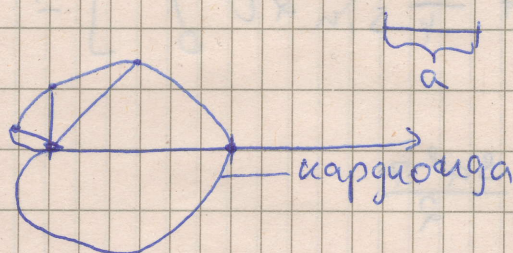
$$\rho = \rho(\theta)$$

$$\rho(\theta) = a(1 + \cos \theta)$$



$$a > 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\theta = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \pi$$

$$\rho = 2a$$

$$\rho = a(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\rho = a$$

$$\rho = a(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\rho = 0$$

Площето на кардиогата

$$S(d, \beta) \leq \pi \sup \rho^2(\theta) \frac{(\beta - d)}{2\pi}$$

~~$$S(d, \beta) \leq \sup \frac{\rho^2(\theta)}{2} (\beta - d)$$~~

$$\inf_{(d, \beta)} \frac{\rho^2(\theta)}{2} (\beta - d) \leq S(d, \beta) \leq \sup_{(d, \beta)} \frac{\rho^2(\theta)}{2} (\beta - d)$$

$$\Rightarrow S(d, \beta) = \frac{1}{2} \int_d^\beta \rho^2(\theta) d\theta$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi a^2 (1 + \cos \theta)^2 d\theta = a^2 \int_0^\pi (1 + 2\cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta =$$

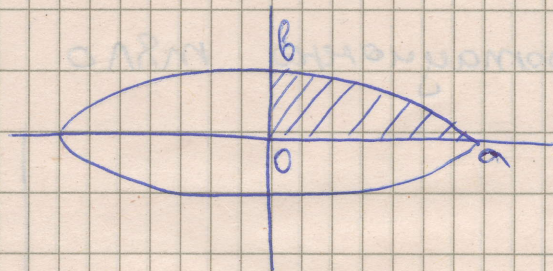
$$= a^2 \int_0^\pi \left(1 + 2\cos \theta + \frac{1}{2} + \frac{\cos^2 \theta}{2} \right) d\theta =$$

$$= a^2 \left[\int_0^\pi \frac{3}{2} d\theta + 2 \int_0^\pi \cos \theta d\theta + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2\theta d'2\theta \right] =$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2} \cdot \theta \Big|_0^\pi + 2 \sin \theta \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \sin 2\theta \Big|_0^\pi \right] =$$

$$= a^2 \left[\frac{3}{2} \pi - 0 - 0 - 0 - 0 \right] = \frac{3a^2 \pi}{2}$$

Bagara 3:



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$S = 4 \int_0^a f(x) dx$$

~~$$x^2 = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2$$

$$x^2 = \left(b^2 - y^2\right) \frac{a^2}{b^2}$$

$$x = \sqrt{\left(b^2 - y^2\right) \frac{a^2}{b^2}}$$~~

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$y = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

~~$$S = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$~~

non: $\frac{x^2}{a^2} = \sin^2 t$

~~$$S = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt$$~~

$$x = a \sin t$$

$$dx = (a \cos t) dt$$

$$b \cdot a \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt$$

$$\cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

$$ab 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$

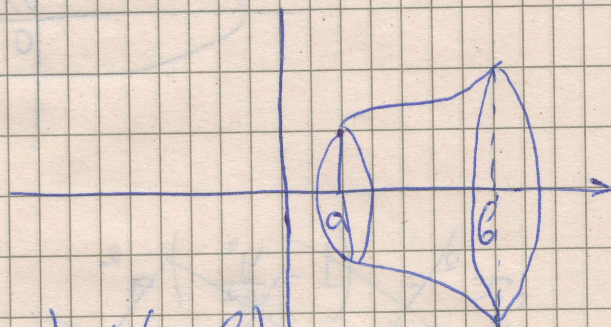
$$= ab 2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t d(2t) \right] =$$

$$= 2ab \left[t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] = 2ab \left[\frac{\pi}{2} - 0 + \frac{1}{2} \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 0 \right]$$

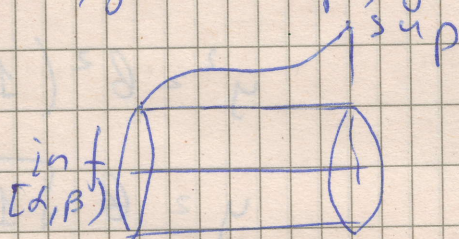
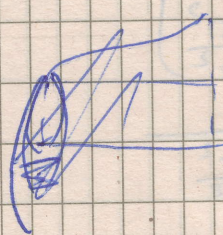
$$= \pi ab$$

$$a = b = r \quad \pi r^2$$

Обем на ротационно тяло



$$V(a, b) = V(d, r) + V(r, b) + V(r, a)$$



$$V = \pi R^2 h$$

$$\pi (\inf f(x))^2 (\beta - \alpha) \leq V(\alpha, \beta) \leq \pi (\sup f(x))^2 (\beta - \alpha)$$

$$V(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

Задача 1: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Обем на елипсоид
 $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$

$$V = 2 \int_0^a b^2 (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx =$$

$$= 2b^2 \left[\int_0^a (1 - \frac{x^2}{a^2}) dx \right] =$$

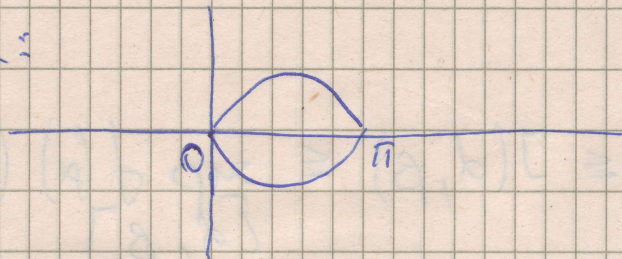
$$= 2b^2 \left[x \Big|_0^a - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^a \right] = 2b^2 \left[a - 0 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} + 0 \right] = \frac{4}{3} b^2 a$$

Където $\frac{4}{3} \pi R^3$



1.1.6

3agaza 2:



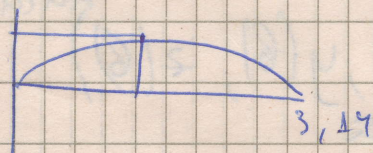
$$V = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \pi \left[\frac{1}{2} \pi - 0 - \frac{1}{4} \sin x \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi^2}{2}$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x dx \right] =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} \pi - 0 - \frac{1}{4} \sin x \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{\pi^2}{2}$$



$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi + \cos 0 = -(-1) + 1 = 2$$

28.11.20132 $J(\alpha, \gamma) = J(\alpha, \beta) + J(\beta, \gamma)$

$$J(\alpha, \alpha) = J(\alpha, \alpha) + J(\alpha, \alpha)$$

$$J(\alpha, \alpha) = 0$$

$$J(\alpha, \alpha) = J(\alpha, \beta) + J(\beta - \alpha)$$

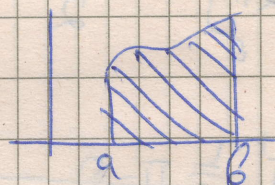
$$\gamma = \alpha$$

$$J(\beta, \alpha) = -J(\alpha, \beta)$$

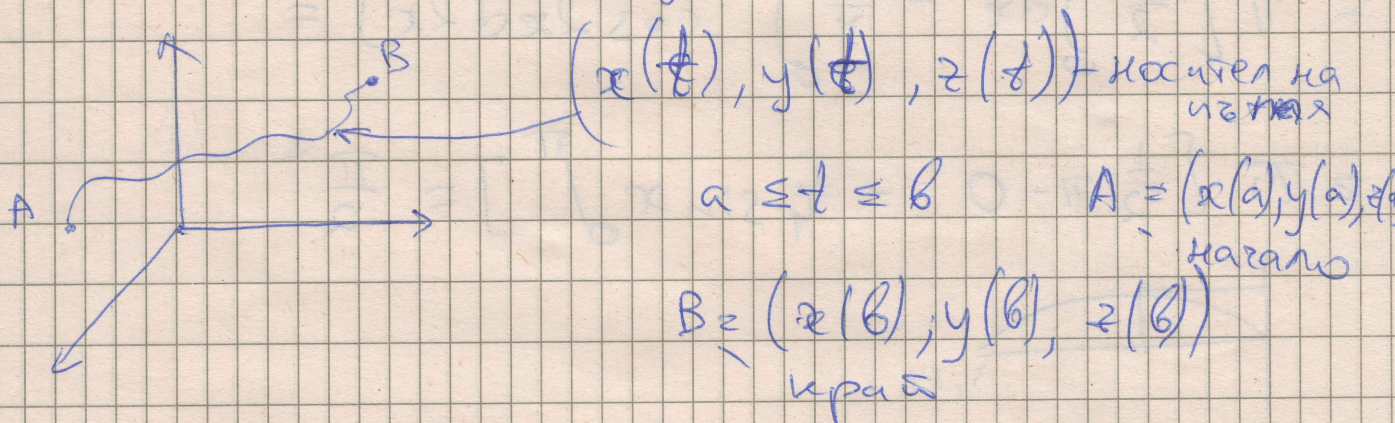
$$[a, b] \quad (a, b)$$

$$\inf_{[a, b]} f(x) (b-a) \leq J(a, b) \leq \sup_{[a, b]} f(x) (b-a)$$

$$\Rightarrow J(a, b) = \int_a^b f(x) dx$$



3. Дължина на гъза



$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ път
изображение

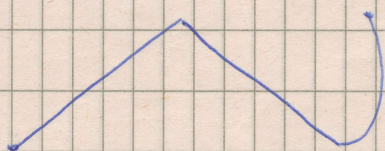
$A = B$ - затворен път
- прост път - е взаимно еднозначно
соответствие м/у $[a, b]$ и носителя.

параметрична крива

- гладък път - когато x, y, z имат произв.

водни

VI. 1.8



$l(\alpha, \beta)$ - дължината на дъгата е
~~разликата на $\beta - \alpha$ от α до β~~ - т.е. това е
 аритметична разлика на интервала

$$(x(t), y(t), z(t))$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2}$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}(t)| dt$$

$$\inf_{t \in [\alpha, \beta]} |\vec{v}(t)| (\beta - \alpha) \leq l(\alpha, \beta) \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |\vec{v}(t)| (\beta - \alpha)$$

$$\inf_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} (\beta - \alpha) \leq l(\alpha, \beta) \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} (\beta - \alpha)$$

$$l(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$x = R \cos t$$

$$y = R \sin t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$x'(t) = -R \sin t$$

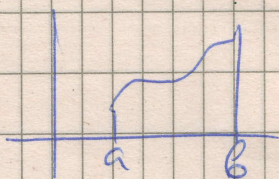
$$y'(t) = R \cos t$$

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sqrt{R^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} = R$$

$$l = \int_0^{2\pi} R dt = R t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

$$y = f(x)$$

$$a \leq x \leq b$$



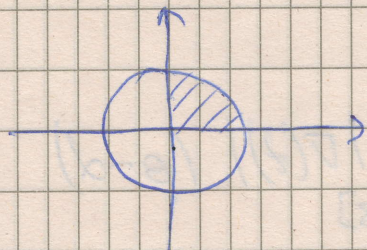
$$x = x(t) = t$$

$$y = f(t)$$

$$x'(t) = 1$$

$$y'(t) = f'(t)$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$1 + y'^2 = \frac{x^2}{1-x^2} + 1 = \frac{1}{1-x^2}$$

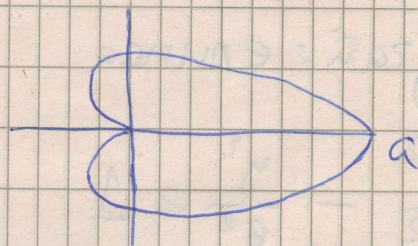
$$l = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{— интеграл от неограниченной ф-ии (несобственный интеграл)}$$

$$l = 6 \cdot \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 6 \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \right) = 2\pi$$

$$\rho = \rho(\theta)$$

$$\rho = a(1 + \cos \theta)$$

$$\theta \in [0, 2\pi)$$



Дължината на
кардиогата

$$x = \rho(\theta) \cos \theta$$

$$y = \rho(\theta) \sin \theta$$

$$x' = \rho' \cos \theta - \rho \sin \theta$$

$$y' = \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta$$

$$x'^2 + y'^2 = \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + 0 + \rho^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) =$$

$$= \boxed{\rho'^2 + \rho^2}$$

$$\rho' = 2a \sin \theta$$

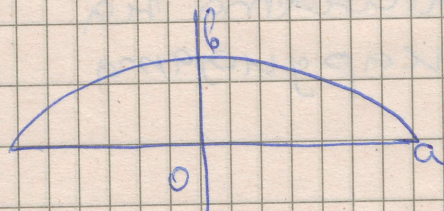
$$\rho'^2 + \rho^2 = a^2 [\sin^2 \theta + 1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta] =$$

$$= 2a^2 (1 + \cos \theta) = 4a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$l = 2 \int_0^\pi \sqrt{2a^2(1 + \cos \theta)} d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

Смужай: ехунса

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq a \\ y &\leq b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{b} &= \sin t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} &= \sin t & x' &= -a \sin t \\ & & y' &= b \cos t \end{aligned}$$

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} =$$

$$= a \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} \cos^2 t} = a \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2} (1 - \sin^2 t)}$$

$$= a \sqrt{\frac{b^2}{a^2} + \sin^2 t \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)} = b \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}$$

ompuay

$$t = \frac{\pi}{2} - u \quad \rightarrow \quad = a \sqrt{\cos^2 t + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t} = a \sqrt{1 + \left(-1\right) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 t}$$

$$= a \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$$

$$4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du = 4a E(k, \frac{\pi}{2})$$

Несобствени интеграл

- интеграл на огранич. ф-я

$\int_a^{\infty} f(x) dx$ Нека $f(x)$ е интегрируема във всеки
подинтервал $[a, A]$ на $[a, +\infty)$

Ако $\exists$ краен $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$, казваме че

несобствен интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ е $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$ и
неговата стойност = на $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx$

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(x) dx \quad (\text{сходящ})$$

- интеграл на неогранич. ф-я

Нека $f(x)$ е неогранич. ф-я на $[a, b]$, като на $\forall$ подинтервал $[a, b-\varepsilon]$ тя
е интегрируема.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx, \text{ ако този лим.}$$

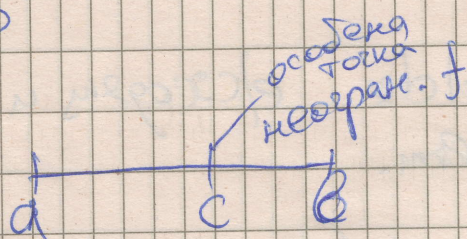
(сходящ)

$\exists$ и е краен

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{x} \quad \leftarrow \text{разходящия} \quad \text{и} \quad \int_3^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \text{сходящия}$$

$$\int_3^A \frac{dx}{x} = \ln|x| \Big|_3^A = \ln A - \ln 3 \xrightarrow{A \rightarrow \infty} \infty$$

$$\int_3^A \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_3^A = -\frac{1}{A} + \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$



$\int_a^b f(x) dx$ е сходящия само по дефиниция

$\int_a^c f(x) dx$ е сходящия и

$\int_c^b f(x) dx$ е сходящия.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda}$$

за кои λ интегралът е сходящ и за кои разходящ

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} = \frac{(x-a)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} = \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{\varepsilon^{1-\lambda}}{1-\lambda}$$

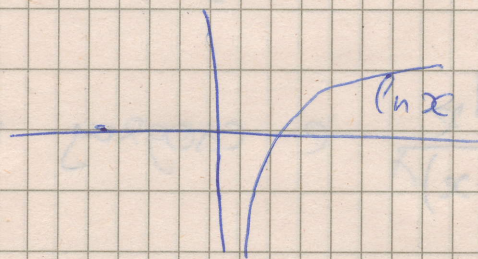
при $\lambda \neq 1$ $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\lambda} \rightarrow \frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Rightarrow$ интеграл е сходящ

VI. 1.14

При $\lambda \geq 1$ — расходится
 При $\lambda < 1$ $\int_a^b \ln|x-a| dx = \ln|b-a| - \ln|a| \rightarrow$

$$\ln \frac{1}{\varepsilon} = 0$$

$$\ln \varepsilon \neq \ln \frac{1}{\varepsilon} = 0 \quad +\infty = 0$$



При $\lambda \geq 1$ — расходится

При $\lambda < 1$ — интеграл $\in$ сходящийся

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$$

$$\int_0^y \frac{dx}{x^\lambda} \quad \begin{cases} \lambda < 1 \text{ с.} \\ \lambda \geq 1 \text{ раз.} \end{cases}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{x^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \Big|_1^\infty = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A x^{-\lambda} dx =$$

$$= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_1^A = \lim_{A \rightarrow \infty} \left(\frac{A^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1^{1-\lambda}}{1-\lambda} \right)$$

$1-\lambda < 0$ — сходящийся

$\lambda > 1$

$\lambda = 1$ — расходится

$\lambda < 1$ — расходится

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$$

$\lambda > 1$ с.с.
 $\lambda \leq 1$ раз.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^\lambda} \quad \text{расходится}$$

$$\int_0^2 \int_2^\infty$$

05. III. 2013г.

Несобственные интегралы

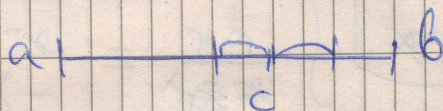
$\int_0^5 \frac{dx}{x^\lambda}$ е сходящ при $\lambda < 1$, разходящ при $\lambda \geq 1$

$\int_0^5 \frac{dx}{(5-x)^\lambda}$ е сходящ при $\lambda > 1$, разходящ при $\lambda \leq 1$

$\int_3^\infty \frac{dx}{x^\lambda}$ е сходящ при $\lambda > 1$, разходящ при $\lambda \leq 1$

$$\int_0^5 \frac{dx}{|3-x|^\lambda} = \int_0^3 \frac{dx}{(3-x)^\lambda} + \int_3^\infty \frac{dx}{(x-3)^\lambda} \quad \lambda < 1$$

$$a < c < b$$



$\int_a^b \frac{dx}{x-c}$ V.p. - главно значение

$$\int_a^c \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} (\ln |\varepsilon_1| - \ln |a-c|)$$

$$\int_c^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} = -\ln |\varepsilon_2| + \ln |b-c|$$

По дефиницията V.p.

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right)$$

$$= -\ln |a-c| + \ln |\varepsilon| - \ln |\varepsilon| + \ln |b-c| = \ln \left| \frac{b-c}{a-c} \right|$$

$$\text{V. p. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{-A}^A f(x) dx$$

Условие на Коши: За да има $f(t)$ лѐва граница при $t \rightarrow b \Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ да се намери δ : $t', t'' \in (b - \delta, b)$ да е изволнено $|F(t') - F(t'')| < \varepsilon$

$F(t) \lim_{t \rightarrow b} + \infty \Leftrightarrow$ за $\forall \varepsilon > 0$ да $\exists M: t', t'' > M$

$$|F(t') - F(t'')| < \varepsilon$$

НДМ $\int_a^{\infty} f(x) dx$ да е сходяща за $\forall \varepsilon > 0$ да $\exists M$: ако A' и $A'' > M$, то $|\int_{A'}^{A''} f(x) dx| < \varepsilon$ (*)

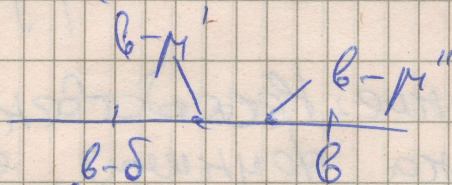
$$F(A) = \int_a^A f(x) dx \quad t' = A' \quad t'' = A''$$

$\int_a^b f(x) dx$ с особена точка b е сходяща $\Leftrightarrow$

за $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta$, такова е ако $0 < \mu', \mu'' < \delta$

$$|\int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x) dx| < \varepsilon$$

$$t' = b - \mu' \quad t'' = b - \mu''$$



Абсолютно сходящийся несобственный интеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ е сходящ}$$

$$\int_a^\infty |f(x)| dx \text{ е сходящ}$$

$$\left| \int_{A'}^{A''} f(x) dx \right| \leq \int_{A'}^{A''} |f(x)| dx - \text{известно (**)}$$

Пъвържение: Ако $\int_a^\infty f(x) dx$ е абсолютно сходящ
то той е просто сходящ.

Доказателството следва от (**) и от
еквивалентното условие (на Коши) за
Г граница (*).

Несобствени интеграл от неотрицателни функции

Пъвържение: Несобствен интеграл от неотри-
цателна функция, е сходящ $\Leftrightarrow$ множеството
от частичните му интеграл е ограничено

ако разгледаме $\int_a^b f(x) dx$ с основна точка в

$$\int_a^c f(x) dx \quad c < b$$

$$\int_a^\infty f(x) dx \quad \int_a^A dx - \text{защитен интеграл}$$

Доказателство: $F(A) = \int_a^A f(x) dx$

Нека $\int_a^\infty$ е сходящ $\Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) = \underbrace{\int_a^\infty f(x) dx}_{\text{крайно число}}$

~~$$F(A) = \int_a^A f(x) dx$$~~

$F(A)$ е монотонно растяща, тъй като ако $A_1 < A_2$ $F(A_2) - F(A_1) = \int_{A_1}^{A_2} f(x) dx \geq 0$

$\Rightarrow F(A)$ е ограничена функция (све стойността на несобствен интеграл)

Обратно, ако $F(A)$ е определена функция, и знаем че е монотонно растяща $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ има граница.

Теорема: Нека $0 \leq f(x) \leq g(x)$ в интервал $[a; +\infty)$

1. Ако $\int_a^\infty g(x) dx$ е сходящ, то $\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ.

2. Ако $\int_a^\infty f(x) dx$ е разходящ, то $\int_a^\infty g(x) dx$ е разходящ.

Условие 2. е следствие на 1.

Доказателство на 1: Образоваме $G(A) = \int_a^A g(x) dx$
и $F(A) = \int_a^A f(x) dx$ от условието, имаме

че $F(A) \leq G(A)$ (интегриране на неравенството).

Щом $\int_a^\infty g(x) dx$ е сходящ, то $G(A)$ е ограничена отгоре с число $M \Rightarrow F(A) \leq G(A) \leq M \Rightarrow$

$\Rightarrow F(A)$ е ограничена отгоре.

$\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ.

Следствие: Ако $f(x)$ и $g(x)$ са неотрицателни

в $[a; +\infty)$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k$

$$0 < k < \infty$$

Тогава $\int_a^\infty f(x) dx$ и $\int_a^\infty g(x) dx$ са сходящи

или разходящи $0 < k < \infty$ едновременно.

Доказателство: По ε избираме $P: x > P$ да е
изпълнено $\left| \frac{f(x)}{g(x)} - k \right| < \varepsilon \Leftrightarrow k - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < k + \varepsilon$

$\forall$
 0

$$(k-\varepsilon) \cdot g(x) < f(x) < (k+\varepsilon) \cdot g(x)$$

Ако $\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ $\Rightarrow \int_a^\infty (k-\varepsilon) g(x) dx$ е сходящ $\Leftrightarrow \int_a^\infty g(x) dx$ е сходящ.

Ако $\int_a^\infty g(x) dx$ е сходящ $\Rightarrow \int_a^\infty (k+\varepsilon) g(x) dx \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ.

Следствие 1: Нека $f(x)$ е неотрицателна функция
 $f(x) = \frac{\varphi(x)}{x^\lambda} \geq 0$, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} K$ $0 < K < \infty$

Ако $\lambda > 1$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ е сходящ. Ако

$\lambda \leq 1$, то $\int_a^\infty f(x) dx$ е разходящ. ~~Следствие~~

Следствие 2: Нека $f(x) = \frac{\varphi(x)}{(b-x)^\lambda}$, $\varphi(x) \xrightarrow[x < b]{x \rightarrow b} K$

$0 < K < \infty$. Ако $\lambda < 1$, то $\int_a^b f(x) dx$ е сходящ,

ако $\lambda \geq 1$, то $\int_a^b f(x) dx$ е разходящ.

Доказателство 2): $g(x) = \frac{1}{(b-x)^\lambda}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \varphi(x) \xrightarrow[x < b]{x \rightarrow b} K$$

~~По~~ По следствието $\int_a^b f(x) dx$ е сходящ
едновременно с $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$, т.е. ако $\lambda < 1$.

Ако $\lambda \geq 1$ — интегралите са разходящи

Примери:

1. $\int_0^1 \frac{x^3}{(\arctan x)^{\frac{10}{3}}} dx$ — сходящ

$$\int_a^b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

$$\arctan x \sim x \quad \frac{x^3 \cdot x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{10}{3}} (\arctan x)^{\frac{10}{3}}} = \left(\frac{x}{\arctan x} \right)^{\frac{10}{3}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{1}{3} < 1 \rightarrow \text{сходящ}$$

2. $\int_0^1 \left(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} \right)^{-\frac{3}{2}} dx = \int_0^1 \left(\frac{1+x - 1-x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \right)^{-\frac{3}{2}} dx$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}} dx \sim \int_1^0 \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi(x) \rightarrow 1 \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{3}{2} > 1 \rightarrow \text{разходящ}$$

$$3. \int_0^{\pi} \operatorname{tg}^{103} x (x^{101} + 1) \sin^7 x \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^{103} x (x^{101} + 1) \sin^7 x \, dx$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\sin x \cdot (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x) (\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{\varphi(x)}{(\frac{\pi}{2} - x)}$$

$$\varphi(x) \xrightarrow[x < \frac{\pi}{2}]{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi(x) \, dx}{(\frac{\pi}{2} - x)^{103}}$$

$$\varphi_1(x) \xrightarrow[x \rightarrow \frac{\pi}{2}]{x < \frac{\pi}{2}} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^{103} + 1 \right)$$

Несобственные интегралы от
знакопримечлив функции
Критерий на Абел и Дирхле

Критерий на Абел

1. Если $\int_a^{\infty} f(x) \, dx$ е сходящ

2. Если $g(x)$ е монотонна и ограничена

$\Rightarrow \int_a^{\infty} f(x)g(x) \, dx$ е сходящ.

II Критерий на Дирихле

1. Нека $f(x)$ е интегрируема във всеки интервал $[a, A]$ и $\odot$ на съотнесения интеграл на $F(A)$ е ограничен. $F(A) = \int_a^A f(x) dx$

2. Нека $f(x)$ е монотонна и нека

$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. Тогава $\int_a^\infty f(x)g(x) dx$ е сходящ.

От Дирихле $\Rightarrow$ Абел

Наместванка от Абел 2. $\Rightarrow \int g(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$

$g(x) - g(\infty) \rightarrow 0$ и е монотонна

$$\int_a^\infty f(x)g(x) dx = \underbrace{\int_a^\infty f(x)[g(x) - g(\infty)] dx}_{\text{удовлетворява условията на Дирихле}} +$$

$$+ g(\infty) \int_a^\infty f(x) dx$$

от Абел 1 е сходящ

, тъй като $F(A) \rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$

01.11.2013г.

$$\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^A f(x) dx \quad \text{парцелните интеграл да са ограничени}$$

↑
Дирхле

$g(x)$ монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Критерий на Дирхле = Частичните интеграл $\int_a^\infty f(x) dx$ са ограничени и е изпълнено $g(x)$ -монотонна, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$

Нека $f(x)$ е непрекъснатата, $g'(x)$ - непрекъснатата
Ще докажем, че $\int_a^\infty f(x) g(x) dx$ е сходяща

Доказателство: По ε -търсим $M: A', A'' > M$, то
 $\left| \int_{A'}^{A''} f(x) g(x) dx \right| < \varepsilon$

Теорема на Лайбниц - Нютон $\Rightarrow F'(x) = f(x)$

$$\int_{A'}^{A''} f(x) g(x) dx = \int_{A'}^{A''} g(x) \cdot F'(x) dx =$$

$$= \int_{A'}^{A''} g(x) dF(x) = g(x) F(x) \Big|_{A'}^{A''} - \int_{A'}^{A''} F(x) \underbrace{g'(x) dx}_{dg(x)}$$

първото събираемо може да бъде произволно
малко при A' и A'' - доста големи, защото
 $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow g(A'') - \underbrace{F(A'')}_{\text{ограничено по условие}} - g(A') \underbrace{F(A')}_{\text{ограничено по условие}}$

↓
0

ограничено по условие

↓
0

ограничено по условие

(частичните интегралы за f са ограничени)

второто събразуемо:

$$\int_{A'}^{A''} F(x) g'(x) dx =$$

не сменя знака си, тъй като $g(x)$ е

монотонна.

$$= F(\xi) \cdot \int_{A'}^{A''} g'(x) dx = \underbrace{F(\xi)}_{\text{ограничена}} \cdot \left[g(A'') - g(A') \right] \xrightarrow{A', A'' \rightarrow \infty} 0$$

от теорема за средните стойности

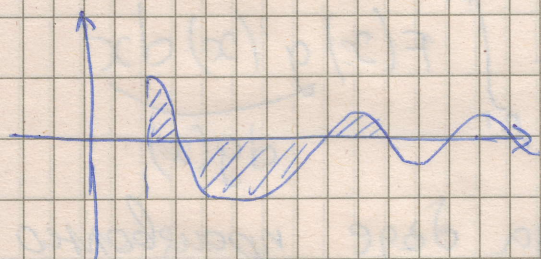
Пример: 1) $f(x) = \sin x$
 $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$

$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ е абсолютно сходящо при $\lambda \geq 1$,

така че ~~мака че~~ така че

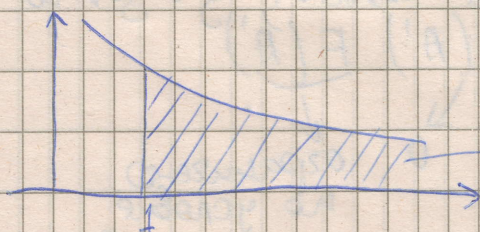
$$\int_1^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x^\lambda} \right| dx \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$$

$$\leq \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\lambda} dx$$



$$\frac{\sin x}{x}$$

ще док, че това е
линейно е крайно.



безкрайно лице, тъй като първият
е разходящо.

$$P(A) = \int_1^A \sin x dx = -\cos 1 - \cos A \rightarrow \text{отрицателен}$$

$$g(x) \downarrow \quad \lambda > 0 \quad g(x) = \frac{\lambda}{x^\lambda}$$

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\lambda} dx$ е сходящ за $\lambda > 0$ и абсолютно

сходящ за $\lambda > 1$.

$$2) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad \text{Коэффициент на Фурье}$$

Критерий на Абел - следва от критерия на Дирихле

$$3) \int_1^\infty \underbrace{\sin x}_{f(x)} \underbrace{\arctan x}_{g(x)} dx$$

изследване за критерий на Абел $\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \pi \\ g(x) \end{array} \right.$ е ограничена и монотонна

$\int_1^\infty f(x) dx = ?$ е сходящ? (за да използваме Абел)

$$= \int_1^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \quad \text{е сходящ (доказано)}$$

За изпитане: Ако има $\sin x$ и $\cos x$, проверяваме Абел или Дирихле.

Матрица и норма в $\mathbb{R}^n$. Отворени и затворени множества в $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^m = \{ (x_1, \dots, x_m) \}$$

$x \in \mathbb{R}^m$
 $y \in \mathbb{R}^m$

Дефиниция: ρ -разстояние между x и y .
$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_m - y_m)^2}$$

в Евклидово пространство

Свойства: 1) $\rho(x, y) \geq 0$ и $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ - неравенство на триъгълника

Доказателство: 3):
Или на Мажоровски

$$\left(\sum_{i=1}^m (a_i + b_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^m b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

(по принципа $2 \rightarrow p$ $\forall p \in [1, \infty)$)

$$x_i - y_i = \underbrace{x_i - z_i}_{a_i} - \underbrace{z_i - y_i}_{b_i}$$

$$\left(\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^m (x_i - z_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^m (z_i - y_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(x, y)$$

$$\rho(x, z)$$

$$\rho(z, y)$$

3) е извлечено

$\rho(x, y) \leq 1$ - еднaкoкo излбo в $\mathbb{R}^3$
 еднaкoкeт крзe в $\mathbb{R}^2$.

$$\rho_E = \rho_1$$

$$\rho_1(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_{m-1} - y_{m-1}| + |x_m - y_m| = \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|$$

$$\rho_p(x, y) = (|x_1 - y_1|^p + \dots + |x_m - y_m|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad p \geq 2 \Rightarrow \rho_E$$

$$\rho_\infty(x, y) = \max(|x_1 - y_1|, \dots, |x_m - y_m|) = \max_{i=1, \dots, m} |x_i - y_i| \quad - \text{сумнoрмa}$$

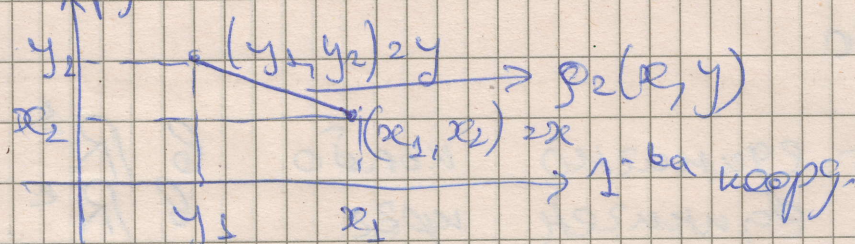
условие 3) за ρ_∞ : $\max_{i=1, \dots, m} |x_i - y_i| =$

$$= \max_{i=1, \dots, m} |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \max_{i=1, \dots, m} (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|)$$

$$\leq \max_{i=1, \dots, m} |x_i - z_i| + \max_{i=1, \dots, m} |z_i - y_i| \text{ и е извлечено}$$

2-ра коорд.

2-ра координата



и Пифагорова теорема $\Rightarrow \rho_2(x, y)$

$$\rho_\infty = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|)$$

ρ_1 е сумата на 2-та координата

$$\text{Повръщане: } \rho_\infty(x, y) \leq \rho_2(x, y) \leq \rho_1(x, y) \leq$$

$$\leq m \cdot \rho_\infty(x, y) \quad \text{размерността в } \mathbb{R}^n$$

Доказателство: $\max_{i=1, \dots, m} |x_i - y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^m |x_i - y_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$$\leq \sum_{i=1}^m |x_i - y_i| \leq m \cdot \max_{i=1, \dots, m} |x_i - y_i|$$

$$\rightarrow \sum a_i^2 \leq (\sum a_i)^2$$

Дефиниция: Норма $\|x\|$, x е елемент на мн. пр-стр. $(\mathbb{R}^m)$

1. Неотрицателна функция $\|x\| \geq 0$ и $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ $\alpha \in \mathbb{R}$ - скалар
3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ неравенство на Δ -ко

Пример: Норма в $\mathbb{R}^m$
 $x = (x_1, \dots, x_m)$
 $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Дано е, че $\|x\| = \rho(x, 0)$

Ако иначе разстоянието $\rho(x, 0) = \|x\|$
 Ако иначе норма $\rho(x, y) = \|x - y\|$

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_{\infty}$$

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|$$

Примери: 1) $C[a; b]$ - лн. пр-стр. на всяка непрекъсната функция

$$\|f\| = \max_{[a, b]} |f(x)|$$

2) Разглеждаме $|f(x)|$ $\int_a^b |f(x)| dx \in L_1[a; b]$ (всяка интегрируема функция)

$\left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \in L_p[a; b]$ - Лебегово ~~пространство~~ пространство

Топология и сходимость в $\mathbb{R}^n$

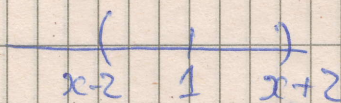
Круговая окрестность или открытое кольцо с центром x и радиус ε .

$$B(x, \varepsilon) = \{ y = (y_1, \dots, y_n) : \|x - y\| < \varepsilon \}$$

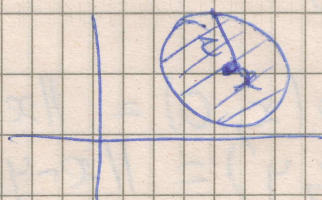


$$\rho(x, y) < \varepsilon$$

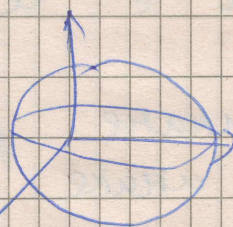
В $\mathbb{R}^1$



В $\mathbb{R}^2$

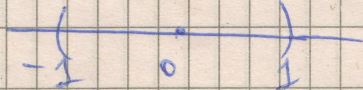


В $\mathbb{R}^3$

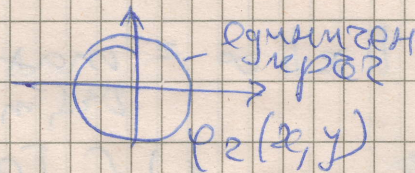


Дефиниция: Единично кольцо: $B(0, 1)$

В $\mathbb{R}^1$



В $\mathbb{R}^2$

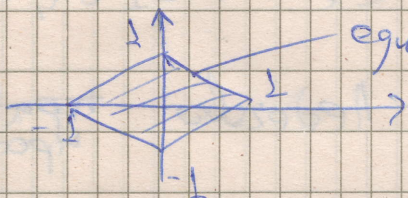


Пример. 1) $\rho_\infty(x, y)$



единично кольцо в метрика ρ_∞

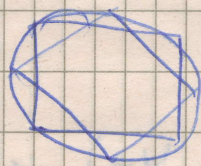
2) $\rho_1(x, y)$ $|x_1| + |x_2| < 1$



единично кольцо в метрика ρ_1

$$\text{В } \mathbb{R}^m: \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty$$

В $\mathbb{R}^m$ не е възможно няма околност и камер



12. III 2013₂

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\rho(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

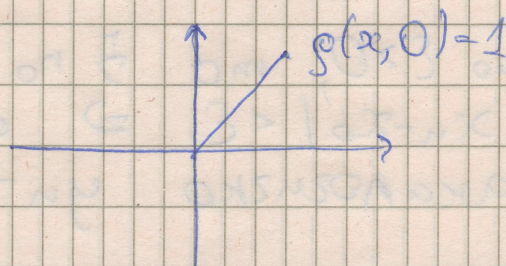
$$\mathbb{R}^2 \quad P = (x_1, y_1) \\ Q = (x_2, y_2)$$

$$\textcircled{1} \rho(P, Q) = \max(|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|)$$

$$1) \rho(x, y) \geq 0$$

$$2) \rho(x, y) = \rho(y, x)$$

$$3) \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$



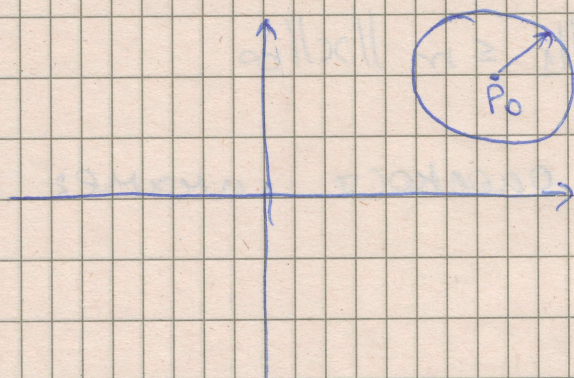
Неравенство на Коши-Буняковски

$$(\sum a_i b_i)^2 \leq \sum a_i^2 \sum b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^n (a_i, b_i)^2 = 0$$

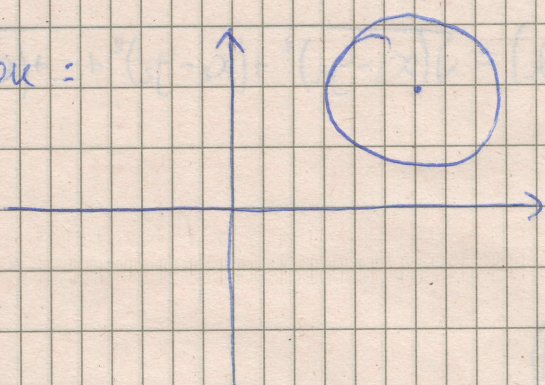
ρ - разстояние

$P_n \rightarrow P_0$ ако за $\forall \varepsilon > 0$, а може да се намери
 n_0 за $\forall n > n_0$ $\rho(P_n, P_0) < \varepsilon$
 $\rho(P_n, P_0) = |x_n - x_0|$



Теорема: Да се докаже $P_n(x_n, y_n)$ клони кон $P_0(x_0, y_0) \Leftrightarrow x_n \rightarrow x_0 \quad y_n \rightarrow y_0$

Дока:



$\Rightarrow \varepsilon > 0$ то $n > n_0$

$\rho(P_n, P_0) < \varepsilon$

$$\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \varepsilon$$

$$|y_n - y_0| = \sqrt{(y_n - y_0)^2} \leq$$

$$|x_n - x_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2} \leq$$

ако $\varepsilon > 0$, то $\exists n_0$: за $n > n_0$ е в или
 $|x_n - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$ от дефиницијата $\Rightarrow x_n \rightarrow x_0$
 аналогично $y_n \rightarrow y_0$

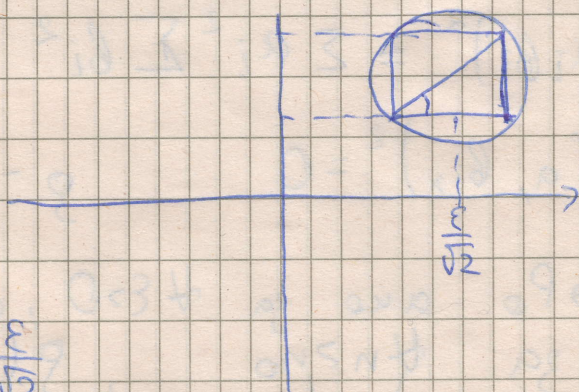


$x_n \rightarrow x_0$
 $y_n \rightarrow y_0$

ε -произволно > 0

$$\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

има $n_1: n > n_1$
 $|x_n - x_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$



но ни е дадено и, че
 $y_n \rightarrow y_0 \Rightarrow \exists n_2: |y_n - y_0| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$

$n_0 - \max(n_1, n_2) \Rightarrow n > n_0$ се верни неравенствата

VI.1.34

тогава $\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$

покажем, че редицата x_n и редицата y_n се намират в квадрата ~~и~~ и квадрата е в окръжността $\Rightarrow$ са в окръжността

Казваме че една редица е ограничена, ако $\exists A$: разстоянието, от всяка точка, от редицата P_n до началото на коорд. система, е по-малко от A . или $\rho(P_n, O) \leq A$.

От всяка ограничена ~~не~~ редица, може да се избере сходяща подредица.

Разгледаме редицата $P_n(x_n, y_n)$, за която z_n че е ограничена (т.е. имам кръг с радиус A , в който те се намират всички точки)

$$P_n(x_n, y_n) \quad \rho(P_n, O) \leq A \Rightarrow |x_n| \leq A \quad |y_n| \leq A$$

x_n

$$x_{n_k} \rightarrow x_0$$

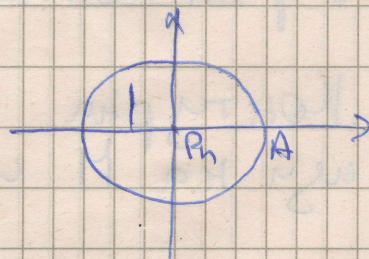
$|y_{n_k}| \leq A$ избираме подредица от y_{n_k}

$$y_{n_{k_m}} \rightarrow y_0$$

$$x_{n_{k_m}} \rightarrow x_0$$

$$(x_{n_{k_m}}, y_{n_{k_m}}) \rightarrow (x_0, y_0)$$

x_n, y_n, z_n



Притомняне на теорема на Кантор

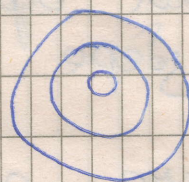
$$\varphi(P_n, P_0) = |x_n, x_0|$$

$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ако $b_n - a_n \rightarrow 0$, то
точката е единствена.

Теорема за вписаните кръгове (теорема на Кантор в равнината)

$$\varphi(P, P_0) \leq R$$

P_{n1}, P_{n2}



Дефиниция:

Вътрешна точка:

M -множество, казваме го P_0 е
вътрешна за M , ако може да се
намери кръг с център P_0 ,
което е изцяло в M .



Външна точка:

Външна точка за едно множество M се нарича
такава точка, в която ако е център на
окръжност ~~няма~~ няма нито една точка в M .

Контурни точки - кръга има точки принадлежащи
към M и точки не принадлежащи на M .

Дефиниция: Едно множество се нарича отворено, ако всичките му точки са вътрешни.

Едно множество се нарича затворено, ако се съдържа ~~и~~ си всички контурни точки.

Теорема: Едно множество F е затворено $\Leftrightarrow$ съдържа границите на всички сходни редици от точки на едно множество

Ако $P_n \in F$ и $P_n \rightarrow P_0$, то $P_0 \in F$

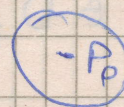
Нека F е затворено множество, нека $P_n \rightarrow P_0$ и $P_n \in F$ да се док. че $P_0 \in F$, допускате противното $P_0 \notin F$.

P_0 - външна $\Rightarrow$ съгласно дефиницията, можем да се намерим кръг с център P_0 , в който няма точки от F , но $P_n \in F$.

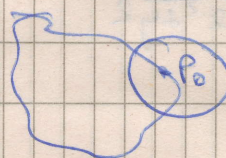
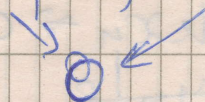
Обратно

$P_n \rightarrow P_0$

$P_n \in F$ да се док. че множеството е затворено



Взимаме кръг с $r = \frac{1}{n}$, но P_0 е контурна $\Rightarrow$ каквато и кръг да се вземе в него ще има точки $\notin F$, т.е. точките са такива че $\rho(P_n, P_0) < \frac{1}{n} \Rightarrow$ пакенсе $P_n \rightarrow P_0 \Rightarrow P_0 \in F$



Компактно множество (от теорема на Вагнер-Вайс) - едно множество се нарича компактно, ако то е ограничено и затворено.

Или едно множество е компактно $\Leftrightarrow$ ако от всяка $P_n \in K$, можем да изберем сходяща подпоследователност и графиката на всички сходящи подпоследователности $\in$ на множеството.

Графиките на функциите на прамки в 3 мерно пространство са равнини в 3 мерно пространство.

График на функция: дадено е множество D в равнината и на всяко D е дадена $z = f(x, y)$

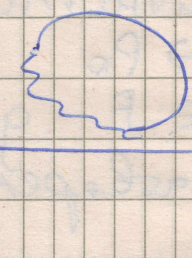
Казваме че $f(P)$ има граница, в т. P_0 , ако за всяка редица от т. $P_n \rightarrow P_0$, $P_0 \in D$, и $P_n \neq P_0$, съответната редица $f(P_n) \rightarrow A$.

Пример: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$

ако $x_n \rightarrow 0$ $y_n \rightarrow 0$
 $f(x_n, 0)$

$$f(x_n, 0) = \frac{0}{x_n^2} \rightarrow 0$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$


 $P_n \rightarrow 0$ редица
 от точки
 $P_n \rightarrow 0$
 $x_n \rightarrow 0$
 $y_n = kx_n \rightarrow 0$
 ~~$f(x_n, y_n) = \frac{kx_n^2}{x_n^2 + k^2x_n^2} = \frac{k}{1+k^2}$~~

$$|x y| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2)$$

$$f(x_n, y_n) = \frac{k x_n^2}{x_n^2 + k^2 x_n^2} =$$

$$x_n \rightarrow 0 \quad y_n \rightarrow 0$$

$$= \frac{k}{1+k^2} \Rightarrow \frac{k}{1+k^2}$$

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n| (x_n^2 + y_n^2)}{2 (x_n^2 + y_n^2)}$$

$$\rightarrow 0$$

както и да избираме x_n, y_n означава дефиницията f има граница 0.

Дефиниция: Една точка P_0 е непрекъснатостта в P_0 ако P_0 е деф. в P_0 и/или граница съвпадаща с $f(P_0)$.

14.11.2013г.

$\mathbb{R}^m$ всяка ограничена и затворена $\mathcal{D}1$

$\mathcal{D}2$: От всяка редица може да се избере сходяща подредица и границата $a \in \mathbb{R}$ $\odot$ -то.

Еквивалентност: $\mathcal{D}1 \Rightarrow \mathcal{D}2$

за def: За всяка ^(огранич.) редица $P_n \in \mathbb{R}^2$ $\exists$ подредица

$P_{n_k} \rightarrow P_0$ (от теоремата на Болцак-Вайерштраас за $\mathbb{R}^2$)

M е ограничена, тъй като M е затворено, то

$P_0 \in M$.

$D2 \Rightarrow D1$ 1) ограниченост - Да допуснем че $\emptyset \neq M$ не е оград. За всяко $n \in \mathbb{N}$ $\exists P_n: \rho(P_n, O) > n$.

$P_n \in N$ от $D2$ за компактност на $M \Rightarrow \exists P_{n_k} \rightarrow P_0$

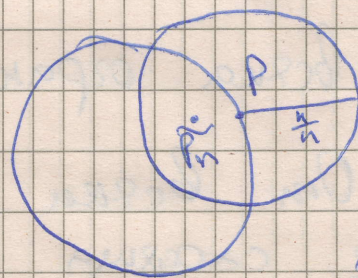
$\rho(P_{n_k}, O) > n_k \quad \rho(P_{n_k}, O) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$, а

трябва да клони към $\rho(P_0, O) !!!$

2) затвореност. Нека $p \in \partial(M)$ - контура на M .

Покача във всяка околност на P има точки от M . В околността $\rho(P, O) < \frac{1}{n}$ озн. точката с P_n .

$\rho(P_n, O) < \frac{1}{n} \Rightarrow P_n \rightarrow P_0$



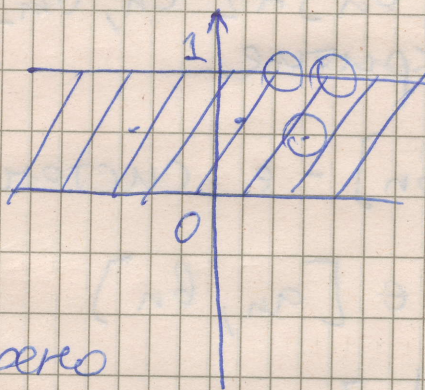
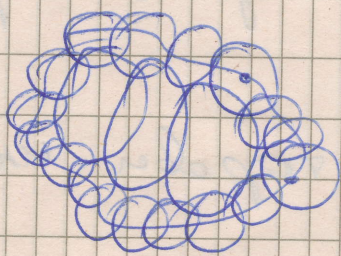
Разглеждане на всяка подредица $P_{n_k} \rightarrow P_0$, тъй като границата на сход. подредица $P_{n_k} \in M$ от $D2$, то $P_0 \in M$. ~~Контурът на~~

Допускаме, че $\partial(M) \subset M$, т.е. M е затворено

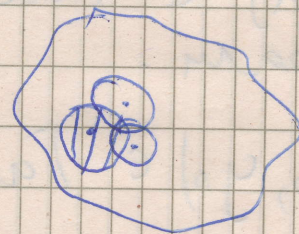
Лема на Хайне - Борел - Лебег

Дефиниция, казваме че $\mathcal{U}_\alpha, \alpha \in I$ е отворено покритие за едно $\odot M$.

Ако за $\forall x \in M \exists U_{\alpha_x} : U_{\alpha_x} \ni x$

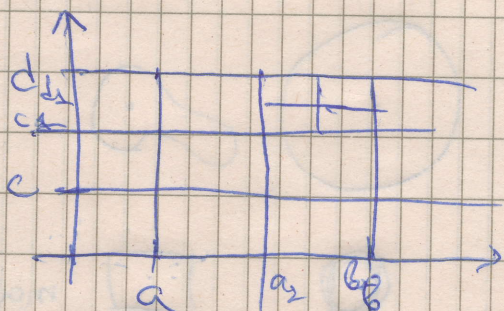


~~Лема~~ Лемата: От всяко отворено покритие на компакното множество M , може да се избере крайно подпокритие.



$\mathbb{R}^m$ Доказателство:

1) M - правоъгълен паралелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_m, b_m]$



$[a, b] \times [c, d]$

Доказателство: с допускане на противното

Допускаме, че има отворено покритие $\mathcal{U}$, от което не може да се избере крайно подпокритие.

$([a_1, b_1] \times [c_1, d_1])$ ще означава правоъгълник (с един връх в центъра на M), който не може да се покрие с крайно подпокриване

$M \cap [a_n, b_n] \times [c_n, d_n]$ не се покрива с крайно подпокриване.

$[a_n, b_n]$ - е система от канторови интервали

$$\exists x_0 \in [a_n, b_n]$$

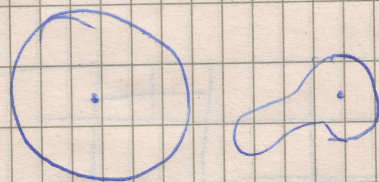
$[c_n, d_n]$ е система от затворени канторови интервали.

$$\Rightarrow (x_0, y_0) \in [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] \subset M$$

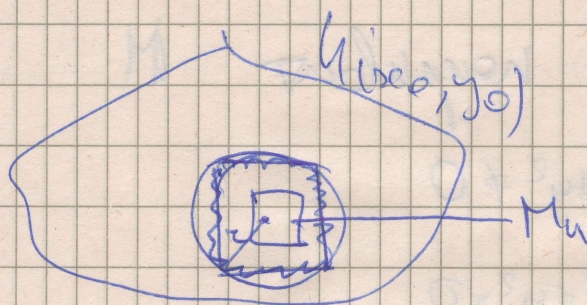
$\Rightarrow \exists \bigcup_{(x_0, y_0) \in \text{отв.}}$ (затворено множество), което покрива $T(x_0, y_0)$

$$\Rightarrow \exists \bigcup_{(x_0, y_0)} \ni (x_0, y_0)$$

$\Rightarrow \exists$ квадратна околност



$\max(x_1)$



$$b_n - a_n \rightarrow 0$$

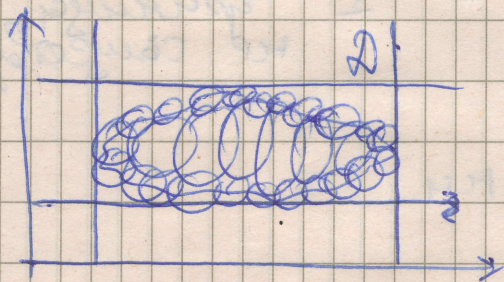
$$c_n - d_n \rightarrow 0$$

Достатъчно е $b_n - a_n < \varepsilon$
 $c_n - d_n < \varepsilon$

M_n е покрито с 1 $\odot$ от отворените т.е. с $U(x_0, y_0)$,

а M_n е построено, ^{така} че да не може да се ~~напр~~ ^{бъде} покрито с краен брой $\odot$!

2) M -компактно (ограничено и затворено)



~~Възв~~ Нека U е отворено покритие на M , към множествата от U , приредихме отвореното $\odot R^n \setminus M$

$$\tilde{U} = U \cup \{R^n \setminus M\}$$

$\tilde{U}$ покрива D -правозъленник съдържащ M .

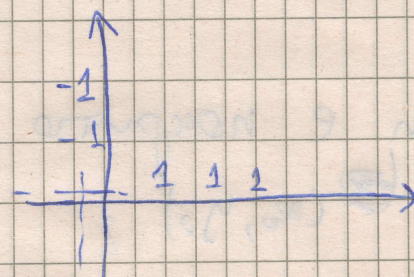
От $\tilde{U}$ по първата част се намира крайно подпокритие

$U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, \dots, U_{\alpha_k}, R^n \setminus M$ покрива D

$\Rightarrow U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ непрерывны на M

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} (\lim_{y \rightarrow 0} (f(x, y))) = \lim_{x \rightarrow 0} (1) = 1$$

повторная граница

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)) = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

ветки граница не существует

Частичные производные

$$z = f(x, y)$$



(x_0, y_0) - внутренняя точка M .

$$z = f(x, y)$$

$$y = y_0$$

$$f(x, y_0) = \varphi(x)$$

$$\varphi'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

частичная производная по x

III. 1.44

$$\Psi(y) = f(x_0, y)$$

$$\Psi'(y_0) = f'_x(x_0, y_0); \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0); z'_x(x_0, y_0)$$

$$\cancel{z'_x(x_0, y_0)}$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k} \quad \text{за съставка произв. по } y$$

$$z = f(x, y) = \sin(x^2 + y^3)$$

$$z'_x = f'_x = \cos(x^2 + y^3) \cdot (2x + 0) = 2x \cos(x^2 + y^3)$$

$$z'_y = f'_y = \cos(x^2 + y^3) \cdot (0 + 3y^2) = 3y^2 \cos(x^2 + y^3)$$

$$z''_{xy} f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\cancel{f'_x} f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

Наличието на частни производни не дава непрекъснатост.

Диференцируемост не може да е по-голяма от частни производни, така че от диференцируемост

да следва непрекъснатост.

19. III 2013.

$$M(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Delta x_1, \dots, \Delta x_n$$

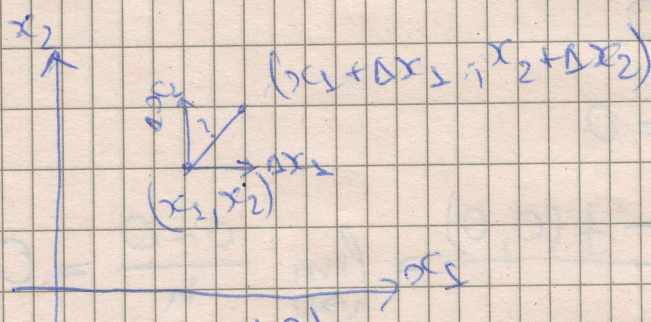
явно
нарастване

$$\Delta f = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \dots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

Дефиниция: казваме че $u = f(x_1, \dots, x_n)$ е диференцируема в т. $M(x_1, \dots, x_n)$ ако

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad \Delta x_i \rightarrow 0, \quad \rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2} \rightarrow 0$$

o : са нули ако $\Delta x_i \rightarrow 0$



$$\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}$$

Различаване: $|B|$ неравенство на триъгълника

$$\begin{aligned} & |A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n| \leq \\ & \leq \rho \left(\frac{|A_1|}{\rho} \Delta x_1 + \dots + \frac{|A_n|}{\rho} \Delta x_n \right) \\ & \leq \rho (|A_1| + \dots + |A_n|) \end{aligned}$$

(The fractions $\frac{|A_i|}{\rho} \Delta x_i$ are circled and labeled ≤ 1)

$$\frac{|B|}{\rho} \leq |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$$

Короче $\rho \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta x_i \rightarrow 0$ $\delta = \sqrt[n]{\rho} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha_k \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0 \quad \Rightarrow \frac{|B|}{\rho} \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0 \quad |B| = o(\rho)$$

т.е. ако имаме (*) ще имаме)

$$\Delta f = A_1 \Delta x_1 + \dots + A_n \Delta x_n + o(\rho) \quad (**)$$

Обратно, нека имаме (**)

$$o(\rho) = \underbrace{\frac{o(\rho)}{\rho}}_{\rightarrow 0} \cdot \frac{\rho^2}{\rho} = \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \dots + \Delta x_n^2}{\rho} =$$

$$= \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_1}{\rho} \Delta x_1 + \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_2}{\rho} \Delta x_2 + \dots +$$

$$+ \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_n}{\rho} \Delta x_n$$

$$\alpha_k := \frac{o(\rho)}{\rho} \cdot \frac{\Delta x_k}{\rho} \quad \frac{|\Delta x_k|}{\rho} \leq 1$$

$$\Rightarrow \alpha_k \xrightarrow[\rho \rightarrow 0]{} 0 \Leftrightarrow \alpha_k \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}]{} 0 \quad o(\rho) = \alpha_1 \Delta x_1 + \dots +$$

$$+ \alpha_n \Delta x_n, \quad \alpha_k \xrightarrow[\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \vdots \\ \Delta x_n \rightarrow 0}]{} 0 \quad (**)$$

Поборение: Если f дифференцируема в M . Тогда $A_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(M)$

Доказательство: Пусть $\Delta x_1 \geq 0, \dots, \Delta x_{k-1} = 0, \Delta x_k \neq 0, \dots, \Delta x_n \geq 0$

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_k + \Delta x_k, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}{\Delta x_k} = \frac{A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \dots + A_k \Delta x_k + 0 + 0 A_n + \dots + 0 \Delta x_n}{\Delta x_k}$$

$$\xrightarrow[\Delta x_k \rightarrow 0]{\Delta x_j \rightarrow 0} A_k \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(M) = A_k$$

$$(*) \quad \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}(M) \Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(M) \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(M) \Delta x_n + \alpha \Delta x_1 + \dots + \alpha_n \Delta x_n$$

$$(**) \quad \dots \parallel \dots + o(\rho)$$

Замечание: В $(*)$ или $(**)$ представим A_i еднократно и определено.

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \Delta x_n + o(\rho)$$

Следствие: Ако f е диференцируема в M ~~тогава~~ то M е кривиземата в M .
 Аналогично, ако $\Delta x_1 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \Delta u \rightarrow 0 \quad f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n + \Delta x_n) \rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

Достатъчно условие (DY) за ~~диференцируемост~~ диференцируемост в M е че $f(x, y)$ и 2 прости

Като f'_x и f'_y съществуват и са непрекъснати в τ . $M = (x_0, y_0) \Rightarrow$ тогава $f(x, y)$ е

диференцируема в τ . (x_0, y_0)

Доказателство: $\Delta u = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) =$
 $= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \underbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}_A +$
 $\underbrace{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0)}_B$

$$p(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$$

$$A = p(x_0 + \Delta x) - p(x_0) = p'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x =$$

$$\begin{array}{c} x_0 + \theta \Delta x \\ | \quad \quad \quad | \\ x_0 \quad \quad \quad x_0 + \Delta x \end{array}$$

$$p(b) - p(a) = p'(\xi)(b-a)$$

$$= \underbrace{f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x - f'_x(x_0, y_0) \Delta x}_{\alpha_1 \Delta x} +$$

$$\underbrace{f'_y(x_0, y_0) \Delta y}_{\alpha_2 \Delta y}$$

Мы покажем, что при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$

$$\alpha_1 = f'_x(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0, y_0) \rightarrow 0$$

так как f'_x — непрерывная ф.т. (по утв. 1.50)

$$A = f'_x(x_0, y_0) \Delta x + \alpha_1 \Delta x$$

$$B = f'_y(x_0, y_0) \Delta y + \alpha_2 \Delta y$$

$$\varphi(y) = f(x_0, y)$$

$$z = f(x, y)$$

$$p(x) = f(x, y_0 + \Delta y)$$

$$A = p(x_0 + \Delta x) - p(x_0) = p'(x_0 + \theta \Delta x) \Delta x$$

Утв. 1.50

$$\left. \begin{aligned} z'_y &= \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y \\ z'_x &= \frac{\partial f}{\partial x} = f'_x \end{aligned} \right\} \text{Функции на 2 параметри } x \text{ и } y$$

$$(z'_x)'_x = z''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = f''_{xx}$$

$$(z'_x)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}$$

$$(z'_y)'_x = z''_{yx} = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$(z'_y)'_y = z''_{yy} = f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

Теорема: Нека f''_{xy} и f''_{yx} са непрекъснати в т. (x_0, y_0) . Тогава те са равни в тази точка, т.е. $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$

$$\begin{aligned} \Delta x &= h \\ \Delta y &= k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= f(x_0 + h, y) = f(x_0, y) \\ \psi(x) &= f(x, y_0 + k) = f(x, y_0) \end{aligned}$$

Разглеждане на неравенството на φ по y и ψ по x

$$A = \varphi(y_0 + k) - \varphi(y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) + f(x_0, y_0)$$

$$B = \psi(x_0 + h) - \psi(x_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

$$A = B$$

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b - a) \varphi'(\xi)$$

$$A = \varphi'(y_0 + \theta_1 k) k \quad \left. \begin{array}{l} \text{теорема за крайните} \\ \text{прираствания} \\ \text{по } \varphi \text{ и } \psi \end{array} \right\}$$

$$B = \psi'(x_0 + \theta_2 h) h$$

$$A = B \quad [f'_y(x_0 + h, y_0 + \theta_1 k) - f'_y(x_0, y_0 + \theta_1 k)] k$$

$$= [f'_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + k) - f'_x(x_0 + \theta_2 h, y_0)] h$$

$$p(x) = f'_y(x, y_0 + \theta_1 k)$$

$$[] p(x_0 + h) - p(x_0) = p'(x_0 + \theta_3 h) \cdot h$$

~~$$p(x) = f'_y(x, y_0 + \theta_1 k)$$~~

$$k [] = k f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k) \cdot h = k h f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_1 k)$$

$$g(y) = f'_x(x_0 + \theta_2 h, y)$$

$$hk f''_{xy}(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_4 k) = kh f''_{yx}(x_0 + \theta_3 h, y_0 + \theta_4 k)$$

$$= hk \quad \text{и} \quad \text{нека} \quad h, k \rightarrow 0$$

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0)$$

21.11.2013г.

$$u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

$$f^{(k)}_{x_1, x_2, x_4, x_7} = f^{(k)}_{x_2, x_1, x_2, x_4}$$

Нека всички частни производни до $(k-1)$ -ви ред + смесените ~~частни производни~~ ^{производни} до k -ти ред са непрекъснати. Тогава док при смесените k -ти производни не зависи от реда на диференциране.

Диференциране на съставна функция

Теорема: ~~Нека~~ Нека $F(x, y)$ е диференцируема в т. (x_0, y_0) .
Нека $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ са диференцируеми в т. t_0 ,
 $\varphi(t_0) = x_0$, $\psi(t_0) = y_0$

Тогава $u(t) = F(\varphi(t), \psi(t))$ е диференцируема в т. t_0 и $u'(t_0) = F'_x(x_0, y_0) \varphi'(t_0) + F'_y(x_0, y_0) \psi'(t_0)$

Доказателство: $\Delta F = F'_x \Delta x + F'_y \Delta y + d_1 \Delta x + d_2 \Delta y$ (1)

Δx и Δy - промяната на x и y в м. (x_0, y_0)

$x = \varphi(t) \quad y = \psi(t) \quad t \rightarrow \Delta t$

$\Delta x = \varphi'(t) \Delta t + o(\Delta t) \quad (2) \quad o(\Delta t) = o(t)$

$\Delta y = \psi'(t) \Delta t + o(\Delta t)$

Искаме (3)

$\Delta u(t) = F'_x \varphi'(t) \Delta t + F'_y \psi'(t) \Delta t + o(\Delta t)$

$\Delta F = \Delta u(t) = F'_x (\varphi'(t) \Delta t + o(\Delta t)) + F'_y (\psi'(t) \Delta t + o(\Delta t))$
 $+ d_1 (\varphi'(t) \Delta t + o(\Delta t)) + d_2 (\psi'(t) \Delta t + o(\Delta t))$

$\Delta u(t) = [F'_x \varphi'(t) + F'_y \psi'(t)] \Delta t + o(\Delta t) [F'_x + F'_y + d_1 + d_2]$
 $+ d_1 \varphi'(t) \Delta t + d_2 \psi'(t) \Delta t$

$\frac{\Delta F}{\Delta t} = d_1 \varphi'(t) + d_2 \psi'(t) \Rightarrow 0$ Ако $\Delta t \rightarrow 0$, то тъй като

Ако $\Delta t \rightarrow 0$, то тъй като $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$

φ и ψ са диференцируеми $\Rightarrow$ непрекъснати, то $\Delta x = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ клонят към 0.
 $\Delta y = \psi(t + \Delta t) - \psi(t)$

$$u = F(x, y) \quad x = \varphi(t, s) \quad y = \psi(t, s)$$

$$u = u(t, s)$$

$$\begin{aligned} u'_t &= F'_x x'_t + F'_y y'_t \\ u'_s &= F'_x x'_s + F'_y y'_s \end{aligned}$$

$$u'_t = F'_x x'_t + F'_y y'_t =$$

$$u'_s = F'_x x'_s + F'_y y'_s =$$

$$u'_t = F'_x \varphi'_t + F'_y \psi'_t$$

$$z = z(x, y) \quad x = a + ht \quad y = b + kt$$

$$z = z(a + ht, b + kt)$$

$$u'_s = F'_x \varphi'_s + F'_y \psi'_s$$

$$\begin{aligned} z'(t) &= z'_x x'_t + z'_y y'_t = \\ &= h z'_x + k z'_y \end{aligned}$$

$$z''(t) = h \left(z''_{xx} x' + z''_{xy} y' \right) + k \left(z''_{yx} x' + z''_{yy} y' \right) =$$

$$= h^2 z''_{xx} + 2 z''_{xy} h k + z''_{yy} k^2$$

$$z'''(t) = h^2 \left(z'''_{xxx} x' + z'''_{xxy} y' \right) + 2 h k \left(z'''_{xyx} x' + z'''_{xyy} y' \right) +$$

$$+ k^2 \left(z'''_{yyx} x' + z'''_{yyy} y' \right) = h^3 z'''_{xxx} + h^2 k z'''_{xxy} +$$

$$+ 2 h^2 k z'''_{xyx} + 2 h k^2 z'''_{xyy} + k^2 h z'''_{yyx} + k^3 z'''_{yyy} =$$

$$= h^3 z'''_{xxx} + 3 h^2 k z'''_{xxy} + 3 h k^2 z'''_{xyy} + k^3 z'''_{yyy}$$

$$\boxed{z' = \frac{\partial z}{\partial x} h + \frac{\partial z}{\partial y} k} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) z$$

$$\boxed{z'' = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} k^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 z$$

уточно означено

$$z''' = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} h^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} h^2 k + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} h k^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} k^3 =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^3 z$$

$$z^{(n)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n z$$

Инвариантность на формата на първия дифференциал

$$u = f(x_1, \dots, x_m)$$

$$M(A_1, \dots, A_m)$$

$$\Delta u = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1} \Delta x_1 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \Delta x_m}_{du \text{ (дифференциал)}} + d_1 \Delta x_1 + d_2 \Delta x_2 + \dots + d_m \Delta x_m$$

пълното
карактване
на диференцируема
функция

d -частка производна
 d -дифференциал

$$u = x_i$$

$$du = dx_i = 0 + \dots + 0 + 1 \cdot \Delta x_i + 0 + \dots + 0$$

$$dx_i = \Delta x_i$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m$$

$$x_i = x_i(t_1, \dots, t_k)$$

$$u = \text{функция на } t_1, \dots, t_k$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k$$

$$\begin{aligned}
 du &= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_1} \right) dt_1 + \\
 &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_2} \right) dt_2 + \\
 &+ \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial t_k} \right) dt_k \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_1}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_1}{\partial t_k} dt_k \right) + \dots + \\
 &+ \frac{\partial u}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_m}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial x_m}{\partial t_2} dt_2 + \dots + \frac{\partial x_m}{\partial t_k} dt_k \right) = \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_m} dx_m
 \end{aligned}$$

(Boucmlba: 1) $d(cu) = c \frac{du}{du} du$
 2) $d(u \pm v) = du \pm dv$
 3) $d(uv) = u dv + v du$
 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

$$w = u \cdot v$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$$

$$dw = v du + u dv$$

Загара: $d \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2} \right) = \frac{-(x^2+y^2+z^2)dx - x d(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$

$$= \frac{(x^2+y^2+z^2)dx - 2x^2dx - 2xydy - 2xzdz}{(x^2+y^2+z^2)^2} =$$

$$= \frac{dx}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2xy dy}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \frac{2xz dz}{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

26.11.2013г. Производна по посока. Градиент

$$M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$M(x, y, z)$$

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$l = |M_0 M|$$

$$\overrightarrow{M_0 M} = (l \cos \alpha, l \cos \beta, l \cos \gamma)$$

$$\overrightarrow{M_0 M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cos \alpha \\ y = y_0 + l \cos \beta \\ z = z_0 + l \cos \gamma \end{cases}$$

$u = f(x, y, z)$ разглеждаме на $M_0 M$

Дефиниция: Производна на функцията

$$u = f(x, y, z) = f(x_0 + l \cos \alpha, y_0 + l \cos \beta, z_0 + l \cos \gamma)$$

по посока определена от вектора $\vec{e}(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$
 наредена производна на $u = f(x_0 + l \cos \alpha, y_0 + l \cos \beta, z_0 + l \cos \gamma)$
 по променливата l , пресметната в т. $l = 0$

VI.1.58

M_0

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0) \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(M_0) \cos \gamma$$

Дефиниция: Градиент на ф-та $u = f(x, y, z)$ в т. M_0 нарича вектора $\text{grad}(u) \equiv \left(\frac{\partial u}{\partial x}(M_0), \frac{\partial u}{\partial y}(M_0), \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) \right)$

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\vec{e}, \text{grad}(u))$$

Твърдение 1: Производната на $u = f(x, y, z)$ в т. M_0 по посока, зададена от вектора $\text{grad}(u)$ е максимална в сравнение с производната по всяка друга посока.

Твърдение 2: Стойността на производната по посока $\text{grad}(u)$, е равна на $|\text{grad}(u)|$ (в т. M_0 тази точка).

Доказателство: $\frac{\partial u}{\partial l} = (\vec{e}, \text{grad}(u)) = |\vec{e}| \cdot |\text{grad}(u)| \cdot \cos \varphi$

Това е тогаваш, когато $\varphi = 0^\circ$ (Твърд. 1) $\Rightarrow$

(Твърд. 2) $|\cos \varphi| = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial l} = |\text{grad}(u)|$

Геометричен смисъл на
диференцируемост на функцията
 $u = f(x, y)$

$$u_0 = f(x_0, y_0)$$

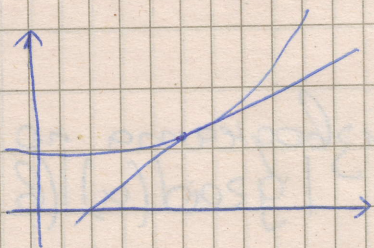
$$\alpha(x-x_0) + \beta(y-y_0), \quad \alpha, \beta \rightarrow 0 \text{ дефиниция}$$

$$u - u_0 = \frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0) + o(\rho)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(y-y_0) - (u - u_0) = 0$$

уравнение на равнина е нормален вектор

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1 \right)$$



$$y = f'(x) + b$$



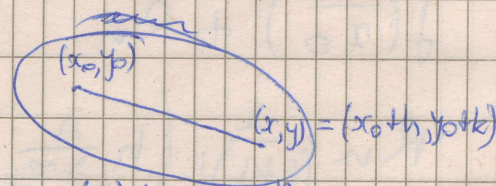
Формула на Тейлор във форма на Лагранж
за две променливи

$z = f(x, y)$ $(n+1)$ -ви ред - непрекъснати частници
до $(n+1)$ -ви ред
в околност (x_0, y_0)

$$\varphi(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad h, k \rightarrow 0 \text{ малки}$$

$$\varphi(0) = f(x_0, y_0)$$

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k)$$



$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot t + \frac{\varphi''(0)}{2!} \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \frac{t^n}{n!} +$$

$$+ \underbrace{\frac{\varphi^{(n+1)}(\theta t)}{(n+1)!} t^{n+1}}_{\text{остатъкът на Тейлор}}$$

$$0 < \theta < 1$$

$$0 < \theta t < t$$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

$$\varphi'(t) = f'_x h + f'_y k = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f$$

$$\varphi''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} k^2$$

$$\varphi^{(n)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f$$

за $t=0$ f се пресмята в т. (x_0, y_0)

$$\varphi(1) = f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right)^n f(x_0, y_0) +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k \right) f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \varphi(t) = f(x_1 + th_1, x_2 + th_2, \dots, x_n + th_n)$$

$$\overline{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$$

$$\overline{h} = (h_1, \dots, h_m)$$

$$f(\overline{x}_0 + \overline{h}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^k$$

$$f(\overline{x}_0) + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + h_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{n+1} f(\overline{x}_0 + \theta \overline{h})$$

$$= O(\|\overline{h}\|^n)$$

Достаточное условие: Если $f(x, y)$ некрая
и производна от втори ред.

$$\text{Если } \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Озн. } \Delta = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{xy} & f''_{yy} \end{vmatrix} = f''_{xx} \cdot f''_{yy} - f''_{xy}^2$$

Ако $\Delta \neq 0$ f има лок. екстремум и тогд е
лок. мин ако $f''_{xx} > 0$ (1)
лок. макс ако $f''_{xx} < 0$ (2)

(Забележка: f''_{xx}, f''_{yy} имат еднакъв знак,
иначе $\Delta < 0$)

Доказательство: $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$
 $= \underbrace{f'_x(x_0, y_0) \cdot h + f'_y(x_0, y_0) \cdot k}_{\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} k\right) f(x_0, y_0)} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} h + \frac{\partial^2}{\partial y^2} k \right)^2 f(x_0+\theta h, y_0+\theta k)$

Далее го $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$

$$A_2 f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} \left(f''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) h^2 + 2 f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) h k + f''_{yy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) k^2 \right)$$

$\downarrow 0 \text{ (при } h, k \rightarrow 0 \text{ ману)}$

$$A_2 = f''_{xx}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) \cdot f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k) - \underbrace{f''_{xy}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)}_{b^2} > 0 \quad (\text{за } h, k \rightarrow 0 \text{ ману})$$

$$ac - b^2 > 0, a > 0$$

$$A = \frac{1}{2} [a h^2 + 2 h k b + k^2 c] = \frac{1}{2a} [a^2 h^2 + 2 a h k b + k^2 b^2 - k^2 b^2 + a k^2 c] = \frac{1}{2a} [(a h + k b)^2 + k^2 (ac - b^2)] > 0$$

$A > 0 \Rightarrow$ б м. $f(x_0, y_0)$ у мане пок. min

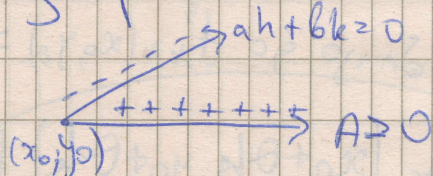
Ано $f''_{xx} < 0$ б м. $(x_0, y_0) \Rightarrow a < 0 \Rightarrow A < 0$ - пок. max

Разгледиме случај $\Delta < 0$. Ако

$$A = \frac{1}{2a} [(ah+bk)^2 + k^2 \Delta_1] < 0$$

избране
 $ah+bk=0$
 извесни

Ако изберем $k=0$ $A \geq 0$



При $\Delta < 0$ нема екстремум

28. II. 2013.

$$\Delta = 0$$

$$z = x^4 + y^4$$

$$z'_x = 4x^3$$

$$z'_y = 4y^3$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$z''_{xx} = 12x^2$$

$$z''_{xy} = 0$$

$$z''_{yy} = 12y^2$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 \quad M(0,0)$$

$\Delta(M) = 0$ имаме локален min в т. $(0,0)$

$$z = x^3 + y^3$$

$$z'_x = 3x^2$$

$$z'_y = 3y^2$$

$$z''_{xy} = 0$$

$$z''_{xx} = 6x$$

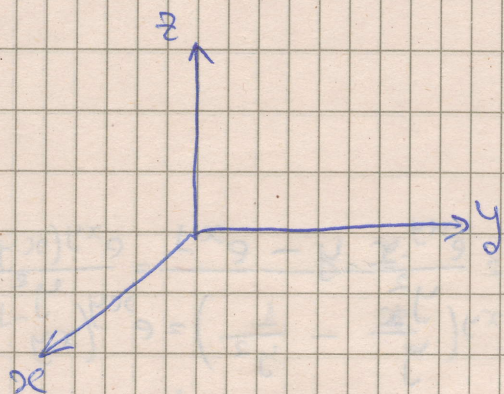
$$z''_{yy} = 6y$$

$$M(0,0)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

$$\Delta(M) = 0$$

VI. 164



$$z(-, -) < 0$$

$$z(+, +) > 0$$

- няма лок. екстремум
 $z(0, 0) = 0$

Критерий на Силвестър

$$z = z(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$A_1 = z''_{x_1 x_1}$$

$$A_2 =$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} z''_{x_1 x_1} & z''_{x_1 x_2} \\ z''_{x_2 x_1} & z''_{x_2 x_2} \end{vmatrix}$$

Контролно по лист
 (задача)
 сътворен от 12 до 14
 ФМИ 229

$$A_n = \begin{vmatrix} z''_{x_1 x_1} & z''_{x_1 x_2} & \dots & z''_{x_1 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z''_{x_n x_1} & z''_{x_n x_2} & \dots & z''_{x_n x_n} \end{vmatrix}$$

III Върджие: Ако $A_1 > 0, A_2 > 0, \dots, A_n > 0$

в стационарната точка $M(x_1^0, \dots, x_n^0)$ определена от условията $z'_{x_1} = 0, \dots, z'_{x_n} = 0$, то функцията z има лок. екстремум и той е локален минимум.

Ако $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0, \dots, (-1)^n A_n > 0$, то z има лок. екстремум в т. M и той е локален максимум.

$$\textcircled{1} z = \frac{e^{xy}}{y} \quad z''_{xx}(-2, -1) = ?$$

$$z''_{yy}(-2, -1) = ?$$

$$z'_x = \frac{1}{y} e^{xy} \cdot y = e^{xy}$$

$$z''_{xx} = e^{xy} \cdot y$$

$$z''_{xx}(-2, -1) = -e^2$$

$$z'_y = \frac{e^{xy} \cdot x - e^{xy}}{y^2} = \frac{e^{xy}(xy - 1)}{y^2}$$

$$= e^{xy} \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \right) = e^{xy} (xy - 1) \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$z''_{yy} = e^{xy} \cdot x \left(\frac{x}{y} - \frac{1}{y^2} \right) + e^{xy} \left(\frac{x(-1)}{y^2} - (-2)y^{-3} \right)$$

$$+ e^{xy} \left(\frac{x(-1)}{y^2} - (-2)y^{-3} \right)$$

$$z''_{yy}(-2, -1) = e^2(-2) \left(\frac{-2}{-1} - \frac{1}{-1} \right) + e^2 \left(\frac{2}{1} - 2 \right) = 0 - 2e^2 = -2e^2$$

$$\textcircled{2} z = e^{-2x^2y} \cdot \sin(3xy^2 - 2y + x) - 4 \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{y}$$

$$z'_y = ?$$

$$z'_y = e^{-2x^2y} \cdot (-2x^2) \cdot \sin(3xy^2 - 2y + x) - \sin(6xy - 2) -$$

$$- 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \operatorname{arctg}^2 \left(\frac{x}{y} \right) - x \cdot (-1)y^{-2}$$

$$\textcircled{3} \text{ поск. экстремума}$$

$$z = x^3 - 3x - 2y^3 + 6y + 1$$

$$z'_x = 3x^2 - 3$$

$$z'_y = -6y^2 + 6$$

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

$$y^2 - 1 = 0$$

$$y = \pm 1$$

$$M_1(1, 1)$$

$$M_2(1, -1)$$

$$M_3(-1, 1)$$

$$M_4(-1, -1)$$

$$z''_{xx} = 6x$$

$$z''_{xy} = 0$$

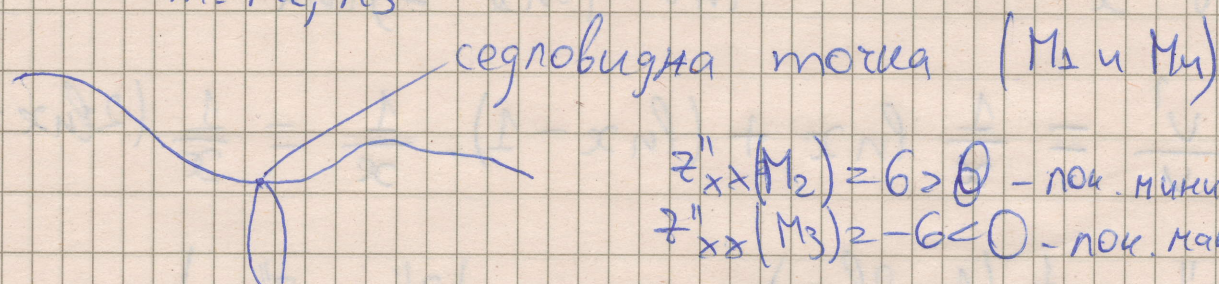
$$z''_{yy} = -12y$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -12y \end{vmatrix} = -72xy$$

$$\Delta > 0$$

VI. 1.66

$$\Delta > 0 \quad \text{в т. } M_2, M_3$$



$$z''_{xx}(M_2) = 6 > 0 - \text{пок. минимум}$$

$$z''_{xx}(M_3) = -6 < 0 - \text{пок. максимум}$$

~~$$\Delta(M_2) = 72 > 0 - \text{пок. минимум}$$~~

~~$$\Delta(M_3) = 72 > 0 - \text{пок. максимум}$$~~

$$(4) \quad z = \int_{\ln x}^{\ln y} (e^{t^2} - e^t) dt$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$e^t = u \quad t = \ln u$$

$$e^{t^2} = e^{(\ln u)^2} = (e^t)^t = u^{\ln u}$$

$$dt = \frac{1}{u} du$$

$$z = \int_x^y (u^{\ln u} - u) \frac{du}{u} = \int_x^y (u^{\ln u - 1} - 1) du =$$

$$= + \int_y^x (1 - u^{\ln u - 1}) du$$

$$z'_x = (1 - x^{\ln x - 1})$$

$$z'_y = y^{\ln y - 1} - 1$$

$$x^{\ln x - 1} = 1$$

$$x = 1 \quad \ln x - 1 = 0 \quad x = e$$

~~$$\ln x - 1$$~~

$$z'_y = 0$$

$$y = 1 \quad y = e$$

$$M_1(1, 1), M_2(1, e), M_3(e, 1), M_4(e, e)$$

$$v = x^{\ln x - 1}$$

$$\ln v = (\ln x - 1) \ln x$$

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{x} \ln x + (\ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} (2 \ln x - 1)$$

$$z''_{xx} = \frac{1}{x^2} (1 - 2 \ln x)$$

$$z''_{xx} = \frac{1}{x^2} (1 - 2 \ln x)$$

$$z''_{xy} = 0$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{xy} & z''_{yy} \end{vmatrix} = z''_{xx} z''_{yy} =$$

$$= \frac{1}{xy} (1 - 2 \ln x) (2 \ln y - 1)$$

$$z''_{xy} = \frac{1}{y} (2 \ln y - 1)$$

$$\Delta(M_1) = \frac{1}{1} \cdot 1(-1) < 0$$

$$\Delta(M_1) = \frac{1}{e^2} \cdot (1-2)(2-1) < 0$$

M_1 и M_4 са седловидни точки.

$$\Delta(M_2) = \frac{1}{e} (1)(2-1) > 0 \text{ има екстремум}$$

$$z''_{xx}(M_2) = \frac{1}{1} (1-0) > 0 \text{ - локал. минимум}$$

$$\Delta(M_3) = \frac{1}{e} (1-2)(-1) > 0 \text{ - има екстремум}$$

$$z''_{xx}(M_3) = \frac{1}{e} (1-2) < 0 \text{ - локал. максимум}$$

$$⑤ \quad z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad x, y > 0$$

$$z'_x = y - \frac{50}{x^2} \quad z'_y = x - \frac{20}{y^2}$$

$$y = \frac{50}{x^2} \quad x - \frac{20x^4}{2500} = 0$$

$$x \left(1 - \frac{x^3}{125} \right) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^3 = 125$$

$$M(5, 2)$$

$$x_2 = 5$$

$$y = 250$$

$$y = \frac{50}{25} = 2$$

$$z''_{xx} = + \frac{100}{x^3}$$

$$z''_{xy} = 1$$

$$z''_{yy} = \frac{40}{y^3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{100}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{40}{y^3} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{4000}{x^3 y^3} - 1$$

$$\Delta(5, 2) = \frac{4000}{125 \cdot 8} - 1 = 3 > 0 \quad - \text{максимум}$$

$$z''_{xx} \big|_{(5, 2)} = \frac{1000}{125} > 0 \quad \text{по минимуму}$$

⑥ НТС и НМС - абсолютные макс и мин

$$E = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$$

в квадратах $|x| \leq 3$
 $|y| \leq 3$

$$x^2 + y^2 \geq 2xy$$

$$x^2 + x^2 - xy + y^2$$

$$z'_x = 4x - y + 7$$

$$z'_y = -x + 2y$$

$$x = 2y$$

$$7y + 7 = 0$$

$$y = -1$$

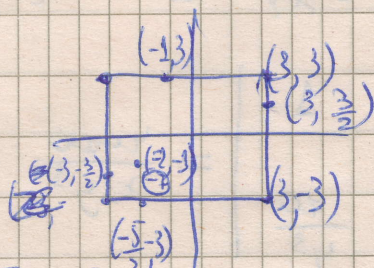
$$x = -2$$

$$z''_{xx} = 4 \quad z''_{xy} = -1 \quad z''_{yy} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$$

в т. (-2, -1) > 0 — ^{ч. макс} ~~по~~ ^{по} ~~м~~ ^{минимум}

$$z(-2, -1) = -7$$



ако $x = 3$

$$z = 18 - 3y + y^2 + 21 = 39 - 3y + y^2$$

$$-3 \leq y \leq 3$$

$$f(y) = y^2 - 3y + 39$$

$$f'(y) = 2y - 3$$

$$y = \frac{3}{2} - \min$$

$$z(-3, 3) = \boxed{-7}$$

$$z(3, 3) = \boxed{57}$$