<u>10.04.2013г.</u>

среда

Упражнение

| За Контролно |: симетр. ~~полиноми~~ оператор
Числови сравнения от I степен
Ферма, Ойлер
зад. от групи

<u>зад.</u> G-група; $a, b \in G$, $ab = ba$
$|a| = r$
$|b| = s$

а) Док, че ако $(r,s) = 1 \Rightarrow |ab| = r.s$

$|ab| = t$

$\boxed{?\ t / rs \text{ и } rs / t \Rightarrow t = rs}$

$(ab)^{rs} = a^{rs} . b^{rs} = (a^r)^s . (b^s)^r = 1 \Rightarrow t / rs$

$1 = (ab)^t = a^t . b^t = a^{ts} . b^{ts}$
$\Rightarrow a^{ts} = 1$
r / ts, но $(r,s) = 1$
$\Rightarrow r / t$

Аналог., $a^{tr} . b^{tr} = 1$
$a^{tr} = 1$

$\Rightarrow b^{tr} = 1 \Rightarrow s / tr$, но $(r,s) = 1$
$\Rightarrow s / t$

s / t и $r / t \Rightarrow sr / t$

б) ? в G има елемент от ред $[r,s] \to$ НОК на r и s

$[r,s] = \dfrac{r.s}{(r,s) = d}$ $r = d . r_1$
$s = d . s_1$
$(r_1, s_1) = 1$

$(ab)^{rs} = 1$

$|ab| = t$, t / rs

$1 = (ab)^t = a^t b^t = a^{ts}$

r / ts
r_1 / ts_1

$1 = (ab)^t = a^t b^t = a^{tr}$

$s / tr \Rightarrow s_1 / tr_1 \Rightarrow r_1 s_1 / t$

$t / r_1 s_1 d^2$ $(r_1, s_1) = 1$

$r = p_1^{\alpha_1} \dots p_n^{\alpha_n}$
$s = p_1^{\beta_1} \dots p_n^{\beta_n}$
$[r,s] = p_1^{\gamma_1} \dots p_n^{\gamma_n}$

$\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$

$\exists k : |a^k| = p_i^{r_i}$ или $|b^k| = p_i^{\gamma_i}$, т.е.

$\exists\, c_i \in G$:

$|c_i| = p_i^{\gamma_i}$

Но $(p_i, p_j) = 1,\ i \neq j$

$\Rightarrow$ от а) $\Rightarrow \exists\, c$ в G:

$$c = \prod_{i=1}^{n} c_i$$

$$|c| = [r.s]$$

$$\boxed{\begin{aligned} * \quad |a| &= r \\ |a^k| &= \frac{r}{(k,r)} \end{aligned}}$$

<u>зад</u>. G-крайна група и $|G| = 2k$, $k \in \mathbb{N}$

ДСД, че в G има елемент g: $|g| = 2$

$\{a, a^{-1}\} \in G$; $1 \in G$ - правят нечетен брой елементи от $G \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, g^{\neq 1} \in G: g = g^{-1} \Rightarrow g^2 = 1$

<u>зад</u>. G-група $\exists!\, a \in G: |a| = 2$

Док., че a комутира с $\forall$ ел. на G

$? \ \forall g \in G \quad ag = ga$

! $* \quad \boxed{|a| = |g^{-1} \cdot a \cdot g|} \rightarrow$ за произволна група (от предна задача)

$2 = |a| = |g^{-1} \cdot a \cdot g|$

$a = g^{-1} \cdot a \cdot g$

$ga = ag$

<u>зад</u>. G-група, $\forall g \neq 1 \quad g \in G: |g| = 2$

ДСД, че G е абелева

$a, b \neq 1 \in G$

$|a| = 2$ и $|b| = 2 \qquad |ab| = 2$

$a = a^{-1} \qquad b = b^{-1} \Rightarrow (ab) = (ab)^{-1} = \underset{\substack{\| \\ b}}{b^{-1}} \cdot \underset{\substack{\| \\ a}}{a^{-1}}$

<u>зад</u>. Q_8, D_4 ? редовете на елементите на двете групи

$Q_8 = \{\pm 1; \pm i, \pm j, \pm k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$i \cdot j = -j \cdot i = k$

$j \cdot k = -k \cdot j = i$

$ki = -i \cdot k = j$

1-единичен ел.

$|-1| = 2$

2

$|\pm i|, |\pm j|, |\pm k| = 4$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_4 = \{A^i B^j \mid i = 1, \dots 4; j = 1, 2\} \\ B^{-1} \cdot A \cdot B = A^{-1} \end{array}}$$

$|A| = n = 4$

$|B| = 2$ $\quad |A^2 B| = 2 \quad |A^3 B| = 2$

$|AB| = 2$ $\quad |A^3| = 4$

$|A^2| = 2$

$\forall A$

$(AB)^2 = \underbrace{ABA}_{A^{-1}}B = E \quad , B = B^{-1}$

$\Rightarrow \underline{|AB| = 2}$

$A^3 B = A^{-1} B = B^{-1} A = B \cdot A$

$\Rightarrow |A^3 B| = 2$

$|A^2 B| = 2$

$$\boxed{* \; A^i B^j A^k B^l = A^{i + k(-1)^j} B^{j+l}}$$

Циклични групи

$\langle g \rangle = \{g^0, g^{\pm 1}, g^{\pm 2} \dots\}$ - Групата е цикл., ако $\forall$ са днa някоя степен

Зад. Дсд, че $\exists$ $\mathbb{Z}$ безкрайна циклична има точно 2 пораждащи елемента

| C_n $\mathbb{Z}_n$

$\mathbb{Z} = \langle 1, -1 \rangle$

$C_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}$

$\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad , k = 0, 1, \dots, n-1$

$\omega_1^k = \omega_k$

$\exists$ $\varphi(n)$ - бр. числа, $< n$, взл. прости с n

$|\omega_1| = n$, то от $\omega_k = \omega_1^k \Rightarrow$

ако $(k, n) = 1 \Rightarrow |\omega_k| = |\omega_1^k| = n$

$k < n$

Пример C_4

$\omega_2 = \cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4} \Rightarrow \omega_2^2 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

$\Rightarrow$ пор. елем. на C_n са $\varphi(n)$ на брой

зад. Да се опр. $\forall$ подгрупи на гр. G

а) $G = \mathbb{C}_8$

б) $G = \mathbb{C}_{12} = \{e, g, g^2, g^3, \dots, g^{11}\}$

$\boxed{\text{* подгрупа на циклична е циклична}}$

$\{E\}$, G - тривиалните подгр.

g, g^5, g^7, g^{11} - взаимнопрости с 12_0 $\Rightarrow$ не могат да участват в подгрупа (пораждат цялата)

$\rightarrow |g^2| = 6$

$\{e, g^2, g^4, g^6, g^{10}\}$ - поражд. се от $g^2 = \langle g^2, g^{10} \rangle$

е група и $= \mathbb{C}_6$

$\rightarrow$ $|g^3| = 4$

$\{e, g^3, g^6, g^9\} = \mathbb{C}_4 = \langle g^3, g^9 \rangle$

$\rightarrow |g^4| = 3$

$\{e, g^4, g^8\} = \mathbb{C}_3 = \langle g^4, g^8 \rangle$

$\rightarrow |g^6| = 2$

$\{e, g^6\} = \mathbb{C}_2 = \langle g^6 \rangle$

<u>Включванията:</u>

$$\begin{tikzcd}
 & G = \mathbb{C}_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
C_6 \arrow[d] \arrow[dr] & & C_4 \arrow[dl] \\
C_3 \arrow[dr] & C_2 \arrow[d] & \\
 & \{E\} &
\end{tikzcd}$$

<u>формула на графа</u>

в) $G = \mathbb{C}_n$

$C_d \leq \mathbb{C}_n \quad d / n$

$\varphi(n)$ - пораждащи

г) $G = \mathbb{Z}$

подгрупи: $n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$

$n_1\mathbb{Z} \leq n_2\mathbb{Z}$, n_2 / n_1

$6\mathbb{Z} \leq 3\mathbb{Z}$

зад. ? бр. на решенията на $x^d = 1$. бр. елем. от ред d в гр. $\mathbb{C}_n$?

а) $n = 12$, $d = 6$

$|\omega_2| = |\omega_{10}| = 6$

$x^6 = 1$ за $\mathbb{C}_{12}$ | $\mathbb{C}_6$ - $\forall$ елем. са реш. на $x^6 = 1$

$\omega_k^n = 1$

$(k, n) = 1 \Rightarrow |\omega_k| = n$

$(k,n) = d \neq 1 \Rightarrow |w_k| = \frac{n}{d}$

б) $n = 100;\ d = 20$
в) $n, d \in \mathbb{N}$, d / n

Симетрична група

$\Omega_n = \{1, 2, \dots, n\}$ - пермутации на числата от $1..n$

$|S_n| = n!$

→ композиция-операцията в групата

$i_1, i_2, \dots i_n$

$$\sigma \in S_n : \left.\begin{matrix} \sigma(i_1) = i_2 \\ \sigma(i_2) = i_2 \\ \vdots \\ \sigma(i_{k-1}) = i_k \\ \sigma(i_k) = i_1 \end{matrix}\right\} \text{ цикъл}$$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2\,3)$

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\,2)$

$\sigma = (i_1, \dots, i_k)$

$\rho \in S_n$

$\sigma = (i_1, \dots, i_k)$

$\rho = (j_1, \dots j_s)$

$\sigma\rho = \rho\sigma$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & \cancel{2}\,1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cancel{2}\,1 & 5 & 3 & \cancel{4}\,4 & 2 \end{pmatrix} = (2\,5)$?

зад: ДСД, че $\forall$ перм. в S_n
$\forall \sigma \in S_n$, $!\,\sigma = \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_k$
$\sigma_i \cap \sigma_j = \{\emptyset\}$

Нека k е най-голямото ест. число, за което
$\sigma_1, \sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots \sigma(i_{k-1}) = i_k$
$\sigma(i_k) = i_j \quad j \neq 1$
$\Rightarrow \sigma(i_k) = \sigma(i_{j-1}) - \dot{x} \Rightarrow \sigma(i_k) = i_1$

$\sigma = \sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_k = \sigma_1' \dots \sigma_s'$
$i_1 \in \sigma_1$
$\in \sigma_i' \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_i'$

Зад. ДСД, че в гр. S_n:

а) редът на цикъл = дължината му

$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_n)$

$i_1, \dots, i_n$

$\sigma \; i_2, i_3, \dots i_1$

$\sigma^2 \; i_3\, i_4 \dots i_2$

$\vdots$

$\sigma^n \; i_1, i_2, \dots, i_n$

$(i_1)(i_2)\dots(i_n) = (1)$

пр.: $(12)^2 = (1)$ $\quad (123)\; 123$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad (123)\; 231$

$(123)\; 312$

123

б) $\rho \in S_n \quad \rho = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$

$|\rho| = [r_1, r_2, \dots, r_n]$, ако $|\sigma_i| = r_i$

$|\rho| = t$

$(1) = \rho^t = \sigma_1^t \sigma_2^t \dots \sigma_n^t$

$\Rightarrow r_i \mid t \quad i = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$:))

Зад. $\sigma, \rho \in S_n$ ДСД:

а) $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$

$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(i_1)\, \rho(i_2) \dots \rho(i_k))$

$\rho(i_1)\, \rho(i_2) \dots \rho(i_k)$

$\rho^{-1} \mid i_1 \; i_2 \dots i_k$

$\sigma \mid i_2 \; i_3 \dots i_1$

$\sigma\rho \mid \rho(i_2) \dots \rho(i_1)$

б) $\sigma\, (i_1, \dots, i_k) \dots (j_1 \dots j_s)$

$\rho \sigma \rho^{-1} = (\rho(i_1) \dots \rho(i_k) \dots \rho(j_1) \dots \rho(j_s))$

$\rho \sigma \rho^{-1} = \rho (i_1, \dots, i_k) \dots (j_1 \dots j_s) \rho^{-1} =$

$= \rho (i_1, \dots, i_k) \rho^{-1} \rho (\dots) \rho^{-1} \rho (\dots) \dots \rho (j_1 \dots j_s) \rho^{-1}$

Зад. ДСД, че в гр. S_n 2 пермут. ρ и $\tilde{\imath}$ са спрегнати $\Leftrightarrow$ $\boxed{i = \rho \tilde{\imath} \rho^{-1}}$, $\rho \in S_n$

Пример: $\sigma = (123)$

$\rho = (13)$

$\rho \sigma \rho^{-1} = ? \quad (\rho(1)\rho(2)\rho(3)) = (321)$

6

II н. (123) 123

$$\left.\begin{array}{ll} \rho^{-1} = (13) & 321 \\ \sigma = (123) & 132 \\ \rho = (13) & 312 \end{array}\right] = (132)$$

$\cancel{(321)(123) = (}$

$\cancel{\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\ & & \end{pmatrix}}$

<u>зад.</u> ДСД, че в гр. S_4:

а) $\forall$ перм. се разлага в произв. на непр. незав. транспозиции (цикъл с дължина 2)

$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k)$

$\sigma(i_1) = i_2, \dots \sigma(i_k) = i_1$

$$\left.\begin{array}{ll} & i_1 \dots i_k \\ (i_1, i_2) & i_2 i_1 \dots i_k \\ (i_1, i_3) & i_2 i_3 i_1 \dots i_k \\ \vdots & \\ (i_1, i_k) & i_2 i_3 \dots i_1 \end{array}\right] \begin{array}{l} (i_1, i_2, \dots i_k) = \\ = (i_1 i_k)(i_1 i_{k-1}) \dots (i_1 i_2) \end{array}$$

б) ? бр. множ. $\overline{\text{в едно разлаг. на транспоз.}}$ е четност = четността на пермутацията

<u>Пример:</u>

$$\left.\begin{array}{l} 1\ 2 \dots i \dots j \dots n \\ 1\ 2 \dots j \dots i \dots n \end{array}\right\} \longrightarrow$$

бр. на инв. е $2(i-j-1)+1$ – нечетно

в) цикъл е четна (нечетна) пермут., точно когато дълж. му е нечетно (четно) число

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{A}_n \text{ – множ. от четни пермут.} \\ \text{(алтернативна група)}\end{array}}$$

<u>зад.</u> ДСД, че $A_n \leq S_n$ и $|A_n| = \frac{1}{2} n!$, $n \geq 2$

$\sigma, \rho \in A_n$

$\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_k) \dots (j_1 \dots j_s) =$

$= \underbrace{(i_1, i_k) \dots (i_1, i_2) \dots (j_1 j_s) \dots (j_1 j_2)}_{2t}$

$\rho = \dots = 2r$ – транспозиции

$\to$ $\sigma \cdot \rho = 2(\dots) \Rightarrow$ четна пермут.

$\to$ $(id) \to$ четна пермут.

$\to$ обратна на четна трансп. е също четна $\Rightarrow$ A_n е група

$A_n \leq S_n$

17.04.2013г.

сряда

Упражнение

<u>Зад.</u> $S_3 \cong D_3$ $D_3 = \{\underline{A}, \underline{A^2}, \underline{B}, AB, A^2B, E\}$

$B^{-1}AB = A^{-1}$

$BAB = A^2$

$\Omega_3 = \{1, 2, 3\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 = A_1 \cong C_1 \\ S_2 \cong C_2 \\ A_2 \cong C_1 \\ A_3 \cong C_2 \end{array}}$$

$S_3 = \{id, \underline{(12)}, (13), (23), \underline{(123)}, (132)\}$

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (123) & 231 \\ (123) & 312 \\ (123) & 123 \end{array}\right] = (132) = (321)$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (12) & 213 \\ (123) & 321 \end{array}\right] (13) = (123)(12)$$

(123) $1\ 3\ 2$ $(23) = (123)^2(12)$

$S_3 = \langle (12), (123) \rangle$

$\varphi: S_3 \to D_3$

$\varphi(12) = B$? хомоморфизъм

$\varphi(123) = A$ да

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (12) & 213 \\ (123) & 321 \\ (12) & 312 \end{array}\right] = (1\,3\,2) = A^2$$

$S_3 \cong D_3$

<u>зад.</u> $S_n \ (n \geq 2)$

а) $\langle (12), (13), \dots (1n) \rangle = S_n$ транспозиции

б) $\langle (12), (12\dots n) \rangle = S_n$

(ij)

а)
$$\left.\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\dots i\dots j\dots n \\ (1j) & j\,2\,3\dots i\dots 1\dots n \\ (1i) & j\,2\,3\dots 1\dots i\dots n \\ (1j) & 1\,2\,3\dots j\dots i\dots n \end{array}\right] = (ij)$$

$(1j)(1i)(1j) = (ij)$

$\sigma = (i_1, i_2, \dots i_k)$

$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(i_1), \dots \rho(i_k))$

$(1i)(ij)(1j) = (1i)$

б) $1\,2\,3\dots n$ $\quad (1\,2\dots n)(12)(12\dots n)^{-1}$

$(1\,2\dots n)^{-1}$

$(12\dots n)^{-1}(12\dots n) = id$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\,2\dots n \\ (12\dots n) & 2\,3\dots n\,1 \\ (n\; n-1\dots 2\,1) & 1\,2\dots n-1\; n \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1\,2\dots n)^{-1} = (n\; n-1\dots 2\;1) & \\ (12) & (n\;2\;1\dots n-1 \\ (1\;2\dots n) & 1\;3\;2\dots n \end{array}\right] \quad (23)$$

$\sigma = (12)$

$\rho = (12\dots n)$

$\rho\sigma\rho^{-1} = (\rho(1)\,\rho(2)) = (2\,3)$

$(1\,2\dots n)^2(12)(12\dots n)^{-2}$

$(1\;2\dots n)(23)(1\;2\dots n)^{-1} = (34)$

$(1\,2\dots n)(i\;i{+}1)(12\dots n)^{-1} = (i+1, i+2)$

$i = 1, \dots, n-1$

$\rho^i(i\;i{+}1)\rho^{-i} \qquad \rho = (1\,2\dots n)$

$(13)(12)(13) = (12(1)\;12(3))$

~~123~~

$(13)(12)(13)$

$$\left.\begin{array}{ll} & 123 \\ (13) & 321 \\ (12) & 312 \\ (13) & 132 \end{array}\right] (23)$$

$(13)(12)(13) = ((13)\{1\}\ (13)\{2\}) =$

$= (32)$

$(14)(13)(14) = (34)$

$(1j)(1i)(1j) = (ij)$

$(1\,i{+}1)(1\,i)(1\,i{+}1) = (i\ i{+}1)$

$(1i) = (1\ i{+}1)(i\ i{+}1)(1\ i{+}1)$

$(12\ldots n)(13)(12\ldots n)^{-1} =$

$= (24)$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\ldots n \\ (12) & 2\,1\,3\ldots n \\ (12\ldots n) & 3\,2\,4\ldots 1 \\ (12) & 3\,1\,4\ldots 2 \end{array}\right] \text{Не}$$

$$\left.\begin{array}{ll} & 1\,2\,3\ldots n{-}1\,n \\ (1n) & n\,2\ldots n{-}1\,1 \\ (1\,n{-}1) & n\,2\ldots 1\,n{-}1 \\ (1\,n{-}2) & n\,2\ldots n{-}2\,n{-}1 \\ \vdots & \\ (1,2) & \cancel{n\,2\ldots 1\,n{-}2} \\ & n\,1\,2\ldots n{-}2\,n{-}1 \end{array}\right] (12\ldots n)^{-2}$$

$$\begin{array}{ll} & 1\,2\ldots n \\ (12) & \\ (13) & \\ \vdots & \\ (1n) & 2\,3\,4\ldots n\,1 \end{array}$$

$\boxed{(12)(23)(12) = (13)}$

зад. A_n $(n \geq 3)$ се поражда от

а) $\forall$ тройни цикли -(четни пермутации

б) $\langle (123)(124)\ldots(12n) \rangle$

$(ijk)(klm)$

$H = \langle ijk \rangle,$

$H \leq A_n$

?на 2 транспозиции дава троен цикъл

(ijk)

$$\left.\begin{array}{ll} & \ldots i \ldots j \ldots k \ldots \\ (ij) & j \ldots i \ldots k \\ (ik) & j \ldots k \ldots i \end{array}\right] = (ijk) = (ik)(ij)$$

$i\ j\ k\ l$

? $j\ k\ i\ l$

$(ij)(kl)$

$(ik)(jl)$

$(ij)(kl) = (ij)(\ )^{\circ}(kl)$

$\boxed{(ij)(kl) = (jkl)(ilj)}$

$(ij)(jl)$

произв. на четен бр. тройни цикли дава четна пермутация

б) $H = \langle (12i) \rangle$

$(12i)(12j)$

$$\left.\begin{array}{llllll} & 1 & 2 & i & j \\ (12j) & 2 & j & i & 1 \\ (12i) & i & j & 1 & 2 \end{array}\right] (1i)(2j)$$

$(j21) = (12j)^{-1} = \begin{array}{llll} i & 2 & j & 1 \end{array}$

$(1ij)$

$(12j)^{-1}(12i)(12j)$

$1\ 2\ i\ j\ k$

$(1ij)$

$(12k)(1ij)(12k)^{-1}$

$$\left.\begin{array}{llllll} & 1 & 2 & i & j & k \\ (k21) & k & 1 & i & j & 2 \\ (1ij) & k & i & j & 1 & 2 \\ (12k) & 1 & i & j & 2 & k \end{array}\right] (2ij)$$

$(k21) - (12k)$

$$\left.\begin{array}{llllll} & 1 & 2 & i & j & k \\ (12k) & 2 & k & i & j & 1 \\ (1ij) & 2 & k & j & 1 & i \\ (k21) & 1 & 2 & j & k & i \end{array}\right] = (ijk)$$

Th на Лагранж.
Съседни класове.

$G,\ H \leq G,\ g \in G$

gH - ляв съседен клас

Hg - десен съседен клас

Св-ва:

① $\forall$ ел. попада в някой съседен клас

$eH = H = He$

② $g \in H \Leftrightarrow gH = H = Hg$

③ $g_1, g_2 \in G : g_1 H = g_2 H \Leftrightarrow g_1^{-1} g_2 \in H$

$Hg_1 = Hg_2 \Leftrightarrow g_2 g_1^{-1} \in H$

④ $g_1 H = g_2 H$ или съвпадат или

$g_1 H \cap g_2 H = \emptyset$

5 бр. леви ≡ бр. десни крайна група

6 $|H| < \infty$ $\quad |gH| = |H| = |Hg|$

бр. елементи

G-крайна $\quad H \leq G$

$|G:H|$ - индекс

брой ~~на левите~~ съседни класове

<u>Th Лагранж</u> $\quad |G| = |H| \cdot |G:H|$

! $\boxed{g \in G \quad g^{|G|} = e}$

<u>зад.</u> $|G:H| = ?$

а) $G = \mathbb{Z}$, $H = n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$

$$G = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_n} \{k + n\mathbb{Z}\}$$

$$k_1 + n\mathbb{Z} = k_2 + n\mathbb{Z}$$
$$k_1 - k_2 \in n\mathbb{Z}$$

$$|G:H| = |\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$$

$$n\mathbb{Z}, \bar{1} + n\mathbb{Z}, \dots (n-1) + n\mathbb{Z}$$

б) $G = m\mathbb{Z}$ $\quad H = n\mathbb{Z}$ $(n, m \in \mathbb{N}, m / n)$

$\exists \ell \in \mathbb{Z}: \; n = m\ell$

$$G = \bigcup_{k \in m\mathbb{Z}} \{k + m\ell\mathbb{Z}\}$$

$$k_1 + m\ell\mathbb{Z} = k_2 + m\ell\mathbb{Z}$$
$$k_1 - k_2 \in m\ell\mathbb{Z} \qquad i = 1, 2$$

$$m\ell / (k_1 - k_2) \qquad k_i = m t_i$$

$$\cancel{m}\ell / \cancel{m}(t_1 - t_2)$$

$\ell =$ [redacted] $\frac{n}{m}$

$\Rightarrow$ бр. класове ℓ

$$|G:H| = |m\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = \ell = \frac{m}{n}$$

<u>зад.</u> $G = S_n$ - $\forall$ пермутации

$H = A_n$ - четни перм.

$$\sigma \in A_n$$

$$(ij)\sigma \in S_n \setminus A_n$$

$$|G:H| = |S_n : A_n| = 2$$ четни или нечетни

<u>зад.</u> $G = GL_n(F)$

$H = SL_n(F)$

$$g_1 g_2 \in G$$

$$g_1 H = g_2 H$$

$$g_1^{-1} g_2 \in H$$

$$1 = \det(g_1^{-1} g_2) = \det g_1^{-1} \cdot \det g_2$$

$$1 = \det(g_1^{-1} g_1) = \det g_1^{-1} \det g_1$$

$$\det g_1^{-1} = \frac{1}{\det g_1}$$

$\frac{\det g_2}{\det g_1} = 1 \Rightarrow$ в един и същи клас (=) det съвпадат

$|G:H| = |GL_n(F) : SL_n(F)| = |F^*|$

$\boxed{\text{Доп: } G = \mathbb{R}^*, \ H = \mathbb{R}^+}$

Зад. G-крайна $K \le H \le G$

$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$

$|G| = |H| \cdot |G:H|$

$|H| = |K| \cdot |H:K|$

$|G| = |K| \cdot |G:K|$

Зад. G-крайна
$K < G$ и $|G:K| = p$ просто число

$K \underset{max}{<} G$

max подгрупа $K \ne G$

нито 1 подгр. на G не съд. K

$K \le K$ или G

$\exists\ H \le G$

$K \le H$

$|G:K| = |G:H| \cdot |H:K|$

$p = |G:H|$ или $|H:K| = 1$

:))

Зад. $|G| = p$ - просто

$G \cong \mathbb{C}_p$ G няма нетривиални подгрупи

Доп, че $\exists\ H < G$ $H \ne G$, $H \ne \{E\}$

$|G| = |H| \cdot |G:H|$

редът на $\forall$ ел. е p / реда на гр.

$\forall g \in G : g^{|G|} = e$

$g^p = e$

$\Rightarrow \forall$ неед. е от ред p $\Rightarrow$ изоморфизъм

Зад. $G \ne \{E\}$ няма нетривиални подгрупи

$\Rightarrow G \cong C_p$, p-просто

крайна безкр.

$\underline{\text{циклична}}$ $G = C_n$ или $G = \mathbb{Z}$

безкрайна $\cong \mathbb{Z}$ - има нетривиални

$n = p$

:))

Зад. Подгрупите на Q_8 кватернионите

$Q_8 \quad \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$

$ij = -ji = k$

$jk = -kj = i$

$ki = -ik = j$

- $\{E\}, Q_8$
- $\{1, -1\}$ - ред 2
- $\{\langle i \rangle\}$ циклична

$\{\langle i\rangle\}\{\langle j\rangle\}, \{\langle k\rangle\}$ - циклични от ред 4

$1, i, -1, -i$

зад. S_3 подгрупи

$S_3 = \{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}$

- $\{E\}, S_3$
- $\{\langle 12\rangle\}, \{\langle 13\rangle\}, \{\langle 23\rangle\}$ - циклични групи от ред 2
- $\{\langle 123\rangle\}$, - циклична от ред 3

? $D_4 \longrightarrow |D_4| = 8$

D_n - ред $2n$

зад. A_4

а) $K_4 = \{(1), \overset{a}{\overbrace{(12)(34)}}, \overset{b}{\overbrace{(13)(24)}}, \overset{c}{\overbrace{(14)(23)}}\}$ - абелева подгрупа (Клайн)

само K_4

б) няма подгрупа от ред 6 в A_4 (въпреки, че $6 / A_4$)

$K_4 \subset A_4$

$a = a^{-1} = (12)(34)$

$b = b^{-1}$

$c = c^{-1}$:)

$$ab = \left.\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (13)(24) & 3 & 4 & 1 & 2 \\ a\ (12)(34) & 4 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] (14)(23) \quad c$$

$c = ab$

ac

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ (14)(23) & 4 & 3 & 2 & 1 \\ (12)(34) & 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \quad (13)(24) = b$$

$ac = b$

$bc = a$

$K_4 < A_4$

? абелева

$$\left.\begin{array}{lcccc} ba & 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & 2 & 1 & 4 & 3 \\ (12)(34) & 4 & 3 & 2 & 1 \\ (13)(24) & & & & \end{array}\right] (14)(23)$$

$ab = ba$

б) $\exists\ H \subset A_4 : |H| = 6 \overset{\text{Лагранж}}{\Rightarrow} |G : H| = \frac{12}{6} = 2$

$\sigma = (ijk) \in G$

$\sigma \neq \sigma^2$

$H, \sigma H, \sigma^2 H$ - съседни леви класове

3, но трябва да са 2

$\Rightarrow$ някои съвпадат

$H = \sigma H \Rightarrow \sigma \in H$

$H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$

$\sigma H = \sigma^2 H \Rightarrow \sigma^{-1}\sigma^2 \in H \Rightarrow \sigma \in H$

произволен цикъл

$\Rightarrow \forall$ троен цикъл $\in H$

$H = \{(1), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$

9 елемента $\Rightarrow$

$|H| = 9$ $\overset{\circ}{\times}$

$|H| = 6$

<u>зад.</u> $|G| \leq 7$

Да се док., че $G \cong$ точно 1 от групите

$\underline{C_1}, \underline{C_2}, \underline{C_3}, \underline{C_4}, \underline{K_4}, \underline{C_5}, \underline{C_6}, S_3, \underline{C_7}$

Ако редът на $|G| = 2, 3, 5, 7$

$\Rightarrow G \cong C_2, C_3, C_5, C_7$

C_1 - тривиалната.

Нека $|G| = 4$

$\exists\, g \in G : |g| = 4 \Rightarrow G = \langle g \rangle \cong C_4$

$\nexists\, g \in G : |g| = 4$

$\forall\, a \in G, a \neq e : |a| = 2 \rightarrow \exists\, b \in G :$

$|b| = 2$

$ab \neq 1 \Rightarrow a = b^{-1}$

$|ab| = 4$ не

$|ab| = 2$ $\overset{\circ}{\times}$

$a \neq e$, $b \neq e$

$|a| = 2$

$|b| = 2$

$|ab| = 2$

$\Rightarrow a = a^{-1}$, $b = b^{-1}$

$ab\, ab = 1$

$ab\, a^{-1} b^{-1} = 1$ $\boxed{ab = ba}$

G - абелева

$G = \{1, a, b, ab\}$

$a(ab) = a^2 b = b$

$b(ab) = b^2 a = a$

изоморфизъм

$a = (12)(34)$ $1 = (1)$

$b = (13)(24)$

$ab = (14)(23)$

$G \cong K_4$

за 6 ...

1. - $G \cong C_6$

II. $\nexists\, g$ $|g| = 6$

$|g| = 2$ или

$|g| = 3$

$\exists\, a \in G : |a| = 2$

Ако $\forall\, g \neq 1 : |g| = 2 \Rightarrow$ G - абелева

$\{1, a, b, ab, \underbrace{c, ac, bc, abc}_{\text{не може}}\}$

абелева (понеже съвпадат $\overset{\circ}{\times}$)

$a = bc \Rightarrow abc = 1$

$a = ac$ $\overset{\circ}{\times}$

$a = abc$ $\overset{\circ}{\times}$ $\Rightarrow bc = 1$

$ab = ac \Rightarrow b = c$ $\overset{\circ}{\times}$

$ab = bc \Rightarrow a = c$ $\overset{\circ}{\times}$

$ab = abc \Rightarrow c = 1$

$|K_4| = 4$

$K_4 \leq G$ $\overset{\circ}{\times}$

$\Rightarrow$ не ~~наш~~ $\forall$ неединичен ел. е от ред 2

$\exists\ b \in G : |b| = 3$

$\ne 1$

$|G : \langle b \rangle| = 2$

$\langle b \rangle$, $a\langle b \rangle$ - леви съседни класове

! $\boxed{B^{-1}AB = A^{-1}}$

$a^{-1}ba = b^{-1}$

?. $ba \in \langle b \rangle \Rightarrow a \in \langle b \rangle$ $\overset{\circ}{X}$

$\Rightarrow ba \in a\langle b \rangle$

a^{-1} $\quad k = 0, 1, 2$

$ba = ab^k$

$a^{-1}ba \in \langle b \rangle$

$k=0$ $\quad a^{-1}ba = 1$

$ba = a \Rightarrow b = 1$ $\overset{\circ}{X}$

$k=1$ $\quad a^{-1}ba = b$

$ba = ab$ абелева - не

G не е абелева

$(ab)^2 = (ab)(ab) = a^{-1}b^{-1}$ $= b^2$

~~$k=2$ $a^{-1}ba = b^2$~~

$G = \{1, a, b, [redacted], ab\}, b^2, ab^2\}$

3

$k=2$ $\quad a^{-1}ba = b^2$

хомоморф. и о.к. $\varphi : G \to D_3$

$b \to A$

$a \to B$

$a^{-1}ba = B^2 = B^{-1}$:))

Зад. Дом: $\forall$ неабелева G от ред 8

$G \cong Q_8, D_4$

22.04.2013 г.

понеделник

Лекция

Аритметика в пръстена на полиномите над поле

F-поле $F[x]$

Опр. g дели f (g / f), ако $\exists\ q \in F[x] : f = gq$

$g/f,\ a \in F,\ a \ne 0 \Rightarrow ag / f$

$f = gq$

$f = (5g)(\frac{1}{5}q)$