$p_1 = a_1 q_1, \ldots, p_k = a_k q_k \quad (a_i \in F)$

Д-во: <u>1) Е-не.</u> $n = \deg f > 0$. Индукция по n. $n = 1$ $(f = f)$

$n > 1$. Ако f е неразложим над F, то $f = f$. Нека е разложим: $f = f_1 f_2$; разлагането е истинско

$\deg f_1 < n, \deg f_2 < n$

Инду. предп.: $f_1 = \ldots$

$f_2 = \ldots$

2) Единственост

$p_1 p_2 \ldots p_k = q_1 q_2 \ldots q_s$

от $p_1 \mid q_1 q_2 \ldots q_s$

<u>Тв'</u> $\Rightarrow$ (напр) $p_1 \mid q_1 \Rightarrow$

$p_1 = a_1 q_1$

$a_1 \cancel{q_1} p_2 \ldots p_k = \cancel{q_1} q_2 \ldots q_s$

$a_1 p_2 \ldots p_k = q_2 \ldots q_s$ и т.н.

24.04.2013г.

сряда

Упражнение

Нормални групи

$H \leq G, \; Hg \in G \qquad G \mid H$

$gH = Hg \qquad H \trianglelefteq G$ — нормална

$h_1, h_2 \in H$

$\underbrace{g^{-1} h_1 g}_{= h_2} \in H$

$|G : H| = 2 \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$

$G = S_n$
$H = A_n \qquad |S_n : A_n| = 2$

$G = GL_n(F) \quad H = SL_n(F)$

$H \trianglelefteq G?$

$|G : H| = F^*$ $\qquad g \in G, h \in H$

$g^{-1} h g \in H?$ — $\det = 1$

$Q_8 = \{\pm 1; \pm i; \pm j; \pm k\}$

$i^2 = j^2 = k^2 = -1$	$- \{E\}, Q_8$
$ij = -ji = k$	$- \{\pm 1; \pm i\}$ H_1
$jk = -kj = i$	$\{\pm 1; \pm j\}$ H_2
$ki = -ik = j$	$\{\pm 1; \pm k\}$ H_3

1

$|Q_8 : H_i| = 2$

$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \ \ \forall g \in G\}$

$(-1)i = i(-1) = -i$

j^k

$\{\pm 1\} = Z(Q_8)$

$g^{-1}hg \in H$

$\underset{Z(G)}{\overset{\cap}{g^{-1}hg}} = h$

$H_i \trianglelefteq Q_8$

$\forall$ подгрупа на Q_8 е нормална

зад. G-група, $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$

$A \cap B = \{1\}$

$ab = ba \quad \forall a, b$

$a \in A$

$\forall b \in B$

$A \cap B$ - подгрупа

2

A - подгрупа

$\underbrace{a^{-1}b^{-1}ab}_{\in A}$ комутатор $\in A$

$\underbrace{a^{-1}b^{-1}a}_{\in B}b$ спрегнат $\in B$

$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}ab \in A \cap B$

$\Rightarrow a^{-1}b^{-1}ab = \underline{1}$

$ab = ba$:))

зад. G-група

$A \leq G, \quad B \leq G$

$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

а) $A \leq AB$, $AB = A \iff B \leq A$

б) $\boxed{!\ |AB| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}}$

$\left(\begin{matrix} A < \infty \\ B < \infty \end{matrix}\right)$

Нека $A \cap B = C$

$C \leq A$

$|A : C| = k$ съседни класове

~~[illegible]~~

$a_1C, a_2C, \ldots, a_kC$

$a_iC \neq a_jC$
$i \neq j$

$a_iB \quad i = 1, \ldots, k$

$a_iB = a_jB$

$a_i^{-1}a_j \in B$

2 съседни класа съвпадат

$a_i^{-1}a_j \in B \Rightarrow a_i^{-1}a_j \in A \cap B = C$

$\overset{\cap}{A}$

$\Leftarrow) \quad a_iC = a_jC$

$g \in AB \Rightarrow g = ab$

$a = a_ic, \ i = 1, \ldots, k$

$g = (a_ic)b = a_i(cb) \in a_iB$

$c \in A \cap B \qquad \overset{\cap}{B}$

$|AB| = (a_1B) + (a_2B) + \ldots + |a_kB| =$
$= k|B|$

$|A:C| = k = \dfrac{|A|}{|C|} = \dfrac{|A|}{|A \cap B|}$

$k.|B| = \dfrac{|A||B|}{|A \cap B|}$

б) $AB \leq G$, точно когато $AB = BA$

$A \leq G$
$B \leq G$

2) $A \trianglelefteq G, \ B \trianglelefteq G \Rightarrow AB \leq G$
подгрупа

б) 1) $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$ $\underline{\underline{def}}$

2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$

$x, y \in H$
$xy \in H$
$x^{-1} \in H$
$xy^{-1} \in H$

$A \trianglelefteq G$
$B \trianglelefteq G$

$A \cap B = \{1\}$

[redacted] $ab = ba$

1) $a_1b_1, a_2b_2 \in AB$
$(ab)^{-1} \in AB$

$x, y \in AB$

$x = a_1 b_1$

$y = a_2 b_2$

т.к. $AB \leq G \Rightarrow xy^{-1} \in AB$

$\Rightarrow \underbrace{a_1 b_1 b_2^{-1}}_{\cap B} a_2^{-1} \in AB$

$\Rightarrow$ трябва да конјугират

2) $?\, xy^{-1} \in AB$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} =$

$\cancel{a_1 b_1 a_2^{-1}}$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = \underbrace{a_1 a_2^{-1}}\, \underbrace{a_2 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1}}_{\in B} \in AB$

$A \cap B \trianglelefteq G$, $\cap B$

$A \trianglelefteq G$

$?\, xy^{-1} \in AB$

$a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} = a_1 b_1 b_2^{-1} a_2^{-1} =$

$x^{-1} y \in AB$

$b_1^{-1} a_1^{-1} a_2 b_2 \in AB$?

$b_1^{-1} b_2^{-1} \underbrace{b_2\, a_1^{-1} a_2 b_2}$ $\cap A$ (A е нормална)

$\underbrace{b_1^{-1} a_1^{-1} a_2 b_1}_{\in A} \underbrace{b_1^{-1} b_2}_{\cap B}$:))

O.K.

$A \trianglelefteq G$

зад. $|G| = 2p$ p-нечетно просто

$G \cong \mathbb{C}_{2p}$ или $\mathbb{D}_p$ диэдрална

$\exists\, g \in G : |g| = 2p \Rightarrow G \cong \mathbb{C}_{2p}$

Нека $\nexists g$

$\exists\, g \in G : |g| = 2$

$\forall\, a \in G : |a| = 2 \Rightarrow$

$H = \{1, x, y, xy\} \cong \mathbb{K}_4$

$H < G$

със сигурност има такава подгрупа

4

$|H| = 4$

$|H| / |G|$ ẋ

$\exists\, a \in G : |a| = p$!

$\exists\, b \in G : |b| = 2$.

$\underline{M = \langle a, b \rangle}$

$\boxed{b^{-1} a b = a^{-1}}$ диэдрална

$\tau(ab) = ?$

ако $\tau(ab) = 2p \Rightarrow M \cong C_{2p}$ $\parallel$ G

$\tau(ab) \neq 2p$

? $\tau(ab) = p$

$|G| = pq$ p, q - прости ТВ:

$q > p$

? $\exists!\, H \leq G : |H| = q$

Доп. противното

$\exists\, |A| = |B| = q$ $A \neq B$

$$|AB| = \frac{|A|\,|B|}{|A \cap B|}$$

$|AB| \leq |G| = pq$

$$\frac{q^2}{|A \cap B|} \leq p\cancel{q}$$

не $p>q$

$|A \cap B| = \cancel{1}, \cancel{p}, q, \cancel{pq}$

$|A \cap B| = q$

$|AB| = q$

$\Rightarrow A \equiv B$

$\tau(ab) = p$ не

$\Rightarrow \tau(ab) = 2$

$abab = 1$

$bab = a^{-1}$:))

$b^{-1} a b = a^{-1}$ $|b| = 2$

$H \trianglelefteq G$

G/H - факторгрупа

$a, b \in G$

$\bar{a} = aH$

$\bar{b} = bH$

$\bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}$

$aH \cdot bH = abH$

5

$|G| = |H| \cdot |G:H|$

$|G| = |H| \cdot |G/H|$

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}_n$

$|\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = n$

$m\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{C}$

$m | n$ $\quad |m\mathbb{Z} : n\mathbb{Z}| = \frac{n}{m}$

$\mathbb{R}^*/\mathbb{R}^+ \cong \mathbb{C}_2$

$|\mathbb{R}^* : \mathbb{R}^+| = 2$

$S_n / A_n \cong \mathbb{C}_2$

$GL_n(F) / SL_n(F) \cong F^*$

ДСД

зад. $Q_8 / \mathbb{Z}(Q_8) \cong K_4$

$|Q_8| = 8$

$|Z(Q_8)| = 2$

$|Q_8 / Z(Q_8)| = 4$

зад. 2.15 $\Rightarrow$ $Q_8 / Z(Q_8) \cong \mathbb{C}_4$ или K_4

помощна зад. $H \leq Z(G)$

$(H = Z(G))$

Ако G/H е циклична

$\Rightarrow G$ е абелева

G - гр.

$H \leq Z(G)$

$$\left.\begin{aligned} & G/H = H \cup gH \cup g^2H \cup \ldots \cup g^kH \\ & x, y \in G/H \quad x = g^k h_1 \\ & \qquad\qquad\quad y = g^m h_2 \\ & xy = g^k (h_1 g_2^m) h_2 = \\ & \quad = g^{k+m} h_1 h_2 \\ & yx = g^m (h_2 g) h_1 = \\ & \quad = g^{m+k} h_1 h_2 \end{aligned}\right\} K_4$$

Аналог.

зад. $D_4 / Z(D_4) \cong K_4$

D - диадрална

$$D_4 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$BAB = A^{-1} = A^3 \qquad |A| = 4$

$AB = BA^3$

$A^i B^j A^k B^l =$ [redacted]

$= A^{i+k(-1)^j} B^{j+l}$

$A, A^3 \notin Z(D_4)$ център

$A^2B = BA^2$?

$-\cancel{\ldots}$

$BAB = A^{-1}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

$$A^2B = \begin{pmatrix} \cos\pi & \sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix}$$

$$BA^2 = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ -\sin\pi & -\cos\pi \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$:))

$S_4 / K_4 \cong S_3$

нормална подгрупа на S_4

$|S_4| = 4! = 24$

$|K_4| = 4$

$|S_4 / K_4| = 6$

$\cong C_6$ или S_3

защо не е C_6 ← Дом

Теорема за хомоморфизми

$\varphi : G \to G'$

$Ker\,\varphi = \{ a \in G \mid \varphi(a) = e \}$

$Ker\,\varphi \leq G$

нормална

$Im\,\varphi = \{ a' \in G' \mid \varphi(a) = a' \}$

$Im\,\varphi \leq G'$

$\varphi : G \to G'$

φ-хом в/у сюрекция

$H = Ker\,\varphi \quad G'$

$\Rightarrow G/H \cong Im\,\varphi$

$\Rightarrow H \trianglelefteq G$ от Th

!

Зад. F-числово поле

$M = \{ (a,c) \mid a, c \in F, a \neq 0 \}$

$(a_1, c_1)(a_2, c_2) = (a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1)$

$\in M$!

ДСД M-абелева гр.?

$N = \{(1, c) \mid c \in F\} \overset{?}{\leq} M$;

$N \cong F, \quad M/N \cong F^*$

0) $(a_1, c_1)(a_2, c_2) \in M$?

$M \neq \{0\}$

$a_1 \neq 0$
$a_2 \neq 0$
$a_1 a_2 \neq 0$

1) асоциативност $\quad$ <u>3 нар. двойки</u>

$((a_1, c_1)(a_2, c_2))(a_3, c_3) = (a_1, c_1)[(a_2, c_2)(a_3, c_3)]$

2) $\exists !\ (x, y) \in M$:

$\forall (a, c)(x, y) = (x, y)(a, c) = (a, c)$

$(a, c)(x, y) = (ax, ay + cx) = (a, c)$

$$\left|\begin{array}{l} ax = a \quad \Rightarrow x = 1 \\ ay + cx = c \Rightarrow ay = 0 \\ \qquad\qquad \Rightarrow y = 0 \ (a \neq 0) \end{array}\right.$$

$(x, y) = (1, 0) \in M$:))

Търсим (m, n)

3) $(a, c)(m, n) = (m, n)(a, c) = 1$

$$\left|\begin{array}{l} am = 1 \\ an + cm = 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow m = a^{-1}$
$\Rightarrow n = -ca^{-2}$ ✓

$(a, c) \to (a^{-1}, -ca^{-2})$

$\Rightarrow M$-група

4) ? абелева $\quad (a_2, c_2)(a_1, c_1) \overset{?}{=} (a_1, c_1)(a_2, c_2)$

$(a_1 a_2,\ a_1 c_2 + a_2 c_1)$:))

$\overline{0}), \ldots, 4) \Rightarrow M$ - абелева група

$N \leq M$? $\{0\} \neq N \subset M$

$(1, 0) \in N$

1) $(1, c)(1, c_2) = (1, c_1 + c_2) \in M$

2) $(1, c)^{-1} \in N$?

$(1, c)(1, t) = (1, t)(1, c) = (1, 0)$

$(1, c + t) = (1, 0)$

$\underline{\underline{t = -c}}$:))

$\Rightarrow N \leq M$

$\varphi : N \to F$

8

$\varphi : \overset{\circ}{U} \to \overset{+}{F}$

$\varphi(1, c) \doteq c$

? хомоморфизъм?

$\varphi[(1, c_1)(1, c_2)] = \varphi(1, c_1) + \varphi(1, c_2)$

$\varphi(1, c_1 + c_2) = c_1 + c_2$

$c_1 + c_2 = c_1 + c_2$:))

$\Rightarrow \varphi$ - хмм на групи

$(1, c_1) \neq (1, c_2)$ инекция

$c_1 = c_2$ $\overset{\circ}{x}$

сюрекция $\forall_{c \in F} \exists (1, c) \in N$

$\Rightarrow$ биекция $\Rightarrow \varphi$ е изоморфизъм $N \cong F$

$M/N \cong F^*$?

$\psi : M \to F^*$ F^* - мултипликативна

проверяват се съседни класове

1) $\psi(a, c) = a$

3) $\operatorname{Ker} \psi \{ (a, c) \in M \mid \psi(a, c) = 1 \} = N$

2) $\psi(a, c)$? хомоморф. в/у

$\psi[(a_1, c_1)(a_2, c_2)] = \psi(a_1, c_1)\, \psi(a_2, c_2)$

$\psi(a_1 a_2, a_1 c_2 + a_2 c_1) = a_1 a_2$

$a_1 a_2 = a_1 a_2$ V :))

$\Rightarrow \psi$ е хмм на групи

очевидно е в/у

1, 2, 3 $\Rightarrow$ Th за хмм $\operatorname{Im} \psi$

$M/N \cong F^*$

$\Rightarrow N \trianglelefteq M$

<u>Зад.</u> F - числово поле

$G = \{ (a, b, c) \mid a, b, c \in F,\ a \neq 0, b \neq 0 \}$

$(a_1, b_1, c_1)(a_2, b_2, c_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2, a_1 c_2 + c_1 b_2)$

$\boxed{\text{Да се намерят!}}$

а) G - неабелева (1, 1, 0)

б) $H = \{ (1, b, c) \mid b, c \in F,\ b \neq 0 \}$ -

неабелева нормална подгрупа на G

$G/H \cong F^*$ Th за хомоморф.

$\varphi: G \to F^*$

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{(a,b,c) \in G \mid \varphi(a,b,c) = 1\} = H$

а

$\varphi(a,b,c) = a$

в) $K = \{(a,a,c) \mid a, c \in F, a \neq 0\} \trianglelefteq G$

$K \cong M$ от предната зад.

$G/K \cong F^*$

подгрупа стандартно

$\psi: K \to M$

$\psi(a,a,c) = (a,c)$

ψ - хмм + биекция

$\Rightarrow$ изоморф. $K \cong M$

$\pi: G \to F^*$

$\pi(a,a,c) = a$:)) π - хмм в/у

Ker π = ...

Th хмм

$\Rightarrow$ ... $G/K \cong F^*$

$K \trianglelefteq G$

29.04.2013 г.

понеделник

Лекция

Корени на полиномите

F - поле $\quad f(x) \in F[x]$, $\deg f > 0$

$x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ няма рац. корени

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
поле на разлагане

$x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ н.р.к.

Тв. $I = (f) \trianglelefteq F[x]$ главен идеал

$F[x]/I$ е поле

$\Leftrightarrow f$ е неразложим над F

Д-во: $\Rightarrow$ $F[x]/I$ е поле.

$(\bar{g} = g + I)$

$\bar{g} = 0 \Leftrightarrow g \in I)$

Доп., че $f = gh \Rightarrow \bar{f} = \bar{g} \cdot \bar{h}$
$\qquad \bar{f} = 0$