

20. IV. 2013г. ВА - лекция

Дискриминанта и результаты

f(x) = a_0 x^n + ... + a_n \in F[x], a_0 \neq 0

Корнями d_1, d_2, ..., d_n \in L \supseteq F

Дискриминанта и f:

D(f) = a_0^{2n-2} \prod_{i < j} (d_i - d_j)^2 \in L

D(f) = 0 \iff f имеет кратный корень

Тел D(f) = a_0^{n-2} (-1)^{n(n-1)/2} f'(d_1) f'(d_2) ... f'(d_n)

Доказательство f(x) = a_0 (x - d_1)(x - d_2) ... (x - d_n)

f'(x) = a_0 (x - d_2) ... (x - d_n) + a_0 (x - d_1) (x - d_3) ... (x - d_n) + ...

f'(d_1) = a_0 (d_1 - d_2) (d_1 - d_3) ... (d_1 - d_n)

f'(d_i) = a_0 (d_i - d_1) (d_i - d_3) ... (d_i - d_n)

D(f) = a_0^{n-2} \cdot a_0 (d_1 - d_2) (d_2 - d_3) (d_3 - d_4) ... (d_1 - d_n) \times (-1) a_0 (d_2 - d_1) (d_2 - d_3) (d_2 - d_4) ... (d_2 - d_n) \times (-1)^2 a_0 (d_3 - d_1) (d_3 - d_2) (d_3 - d_4) ... (d_3 - d_n) \times (-1)^3 a_0 (d_4 - d_1) (d_4 - d_2) (d_4 - d_3) ... (d_4 - d_n) \times ... \times (-1)^{n-1} a_0 (d_n - d_1) (d_n - d_2) ... (d_n - d_{n-1}) = a_0^{n-2} (-1)^{n(n-1)/2} f'(d_1) ... f'(d_n)

Сл. D(f) \in F

$$W = W(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ d_1^2 & d_2^2 & d_3^2 & \dots & d_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ d_1^{n-1} & d_2^{n-1} & d_3^{n-1} & \dots & d_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (d_i - d_j)$$

(Вандермонд)

$a_0^{2n-2} W^2 = D(f)$
 (прилага на дискриминантата от прегнати степенни)

$$S_k = d_1^k + d_2^k + \dots + d_n^k$$

$$S_0 = n$$

Те. $D(f) = a_0^{2n-2} \begin{vmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$

Док. Да се пресметне $W \cdot W$ по правилото ред x ред

$$W \cdot W = \begin{vmatrix} n & S_1 & S_2 & \dots & S_{n-1} \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_n \\ S_2 & S_3 & S_4 & \dots & S_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{n-1} & S_n & S_{n+1} & \dots & S_{2n-2} \end{vmatrix}$$

пример

$$f(x) = x^2 + px + q \rightarrow d_1, d_2$$

корени

$$S_0 = 2$$

$$S_1 = d_1 + d_2 = -p$$

$$S_2 = d_1^2 + d_2^2 = d_1 d_2 - p S_1 - 2q = p^2 - 2q$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -p \\ -p & p^2 - 2q \end{vmatrix} = 2p^2 - 4q + p^2 = p^2 - 4q$$

$$\begin{cases} d_1^2 + p d_1 + q = 0 \\ d_2^2 + p d_2 + q = 0 \end{cases}$$

Th на Фейер
 f — периодична, непрер.

ме построим $\sigma_n(x) = \underbrace{s_0(x) + s_1(x) + \dots + s_n(x)}_{n+1}$

ако $a_n \rightarrow 0$, то $\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a$ Коши,

$\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$

Th на Фейер : $\sigma_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x)$ $\forall x \in [-\infty, +\infty]$

Лема : $\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt$

$\sigma_n(x)$ узамена $\sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{2k+1}{2} t \sin \frac{t}{2}}{2 \sin \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2}} = \sum \frac{\cos - \cos}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1 - \cos}{2 \sin^2 \frac{t}{2}}$

Док. на Th 1 $|\sigma_n(x) - f(x)| = ?$

В лемата поставяме $f(x) = 1$

$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt$

$|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)| \sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq \frac{3}{\pi} > \frac{1}{\pi}$

$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x)| \sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt$

f(x) е непрер. => е равн. непрер. $\forall \delta > 0$ \exists краен затворен интервал.
 Що за дадено ϵ , намираме δ : $\forall |t| < \delta$, то
 $|f(x+t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$ за $\forall x$

$$A_n \leq \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta} |f(x+t) - f(x)| \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt}_{I_1} + \underbrace{\int_{\delta}^{\pi} \dots}_{I_2} + \underbrace{\int_{-\pi}^{-\delta} \dots}_{I_3}$$

$$I_1 < \frac{\epsilon}{3} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq \frac{\epsilon}{3} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \frac{\epsilon}{3} \cdot 1$$

$$I_2 = \int_{\delta}^{\pi} |f(x+t) - f(x)| \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq 2M \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{2(n+1) \sin^2 \frac{t}{2}} dt \leq 2M$$

f bounded $\Rightarrow \exists M: |f(x)| \leq M$

$$= \frac{M(\pi - \delta)}{\pi \left| \sin \frac{\delta}{2} \right| 2(n+1)} \leq \frac{M}{\left| \sin \frac{\delta}{2} \right| 2(n+1)}$$

no ϵ M δ n s.t. $I_1 < \frac{\epsilon}{3}$ and $I_2 \leq \frac{M}{2(n+1) \left| \sin \frac{\delta}{2} \right|} \rightarrow 0$

$$|I_3| < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow A_n < \frac{\epsilon}{3} \Rightarrow I_2 < \frac{\epsilon}{3}$$

... $2 - p$... 3 ... $20^2 - 4 = 2^2 x^2 + 2^2 x + 2^2 - 4 = 4x^2 + 4x + 4 - 4 = 4x^2 + 4x$

2019. ВА - лекция

Зад. Може ли се укр. същото за f непр. с изключително
на краен брой точки,

$f(x) = a_n x^n + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ с $a_n \neq 0$ и $a_0 \neq 0$.
Корени $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Дискриминант Δ е $\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta > 0$ \Rightarrow 2 реални корена α_1, α_2 и 0 комплексни корени

$\Delta = 0$ \Rightarrow 1 реален корен α и 2 комплексни корена

$\Delta < 0$ \Rightarrow 0 реални корени и 2 комплексни корена $\alpha \pm \beta i$

Доказателство: $f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$

$f'(x) = a_n \left[(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) + \dots + (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}) \right]$

Следователно $f'(x) = 0$ \Leftrightarrow $(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n) = 0$

$f'(\alpha_i) = a_n \prod_{j \neq i} (\alpha_i - \alpha_j)$

$f'(\alpha_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \alpha_j$ за някое $j \neq i$

Ако $f(x) = a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$ и $f'(x) = 0$ има корени β_1, \dots, β_m

$\beta_i = \alpha_j$ за някое j и i

Ако $\beta_i \neq \alpha_j$ за всички j , то $f'(\beta_i) = 0$

$a_n \prod_{j \neq i} (\beta_i - \alpha_j) = 0$

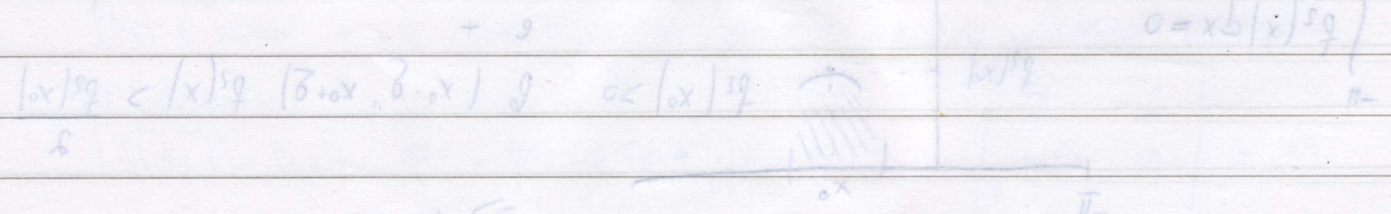
$\Rightarrow \beta_i = \alpha_j$ за някое j

Следователно $\beta_i = \alpha_j$ за някое j

\Rightarrow $f'(x) = 0$ има корени $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$M \geq \|f'\|$ и M откъдето

Следователно $f(x)$ е Ейтманова функция



$0 =$ \Rightarrow $f(x)$ е Ейтманова функция \Rightarrow $f(x) \geq 0$ на $[0, \pi]$

Следствие 1 Теорема Вейерштрасса

Нека $f(x)$ е непр. в $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$

за $\forall \epsilon > 0 \exists$ тригоном. полином $T(x)$: $|f(x) - T(x)| < \epsilon$,
за $\forall x \in [-\pi, \pi]$

т.е. f -непр. може да бъде равномерно приближена със
тригонометричен полином.

Следствие 1:

То ϵ нам π $|f(x) - T_n(x)| < \epsilon$ (от Тн на Фейер)
тригонометр. полином.

Следствие 2: $(a_1, a_2 | b_1, b_2)$ - скалярно

$\sum a_i b_i \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ $f \perp g$, ако $\int = 0$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow (a, b) = 0$

Нека $f(x) \perp T(x)$, \forall тригоном. полином и нека $f \in$ непр $[-\pi, \pi]$
 $f(-\pi) = f(\pi)$

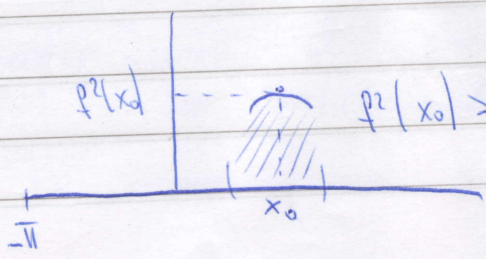
такава $f(x) \equiv 0$

Гор, $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) [f(x) - T(x)] dx + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot T(x) dx$ (1)

То ϵ нам T : $|f(x) - T(x)| < \frac{\epsilon}{M}$

където M : $|f(x)| \leq M$

$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = 0$



имае околна δ която f
 $\epsilon +$

в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $f^2(x) > \frac{f^2(x_0)}{2}$

$\Rightarrow +$, но има още =
от (1) $\Rightarrow >$