Примерни решения и критерий за оценяване на контролна работа № 1
спец. Приложна математика

Задача 1. (1,5т.) Спрямо даден ортонормиран базис на $\mathbb{V}$ линейният оператор φ има матрица A. Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{V}$, в който φ има диагонална матрица, както и тази диагонална матрица, където:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Търсим корените на характеристичня полином. Имаме:

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & -1-\lambda & 3 \\ 3 & 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 9)(\lambda + 2)^2 = 0.$$

Получаваме характеристични корени $\lambda_1 = 9$ и $\lambda_{2,3} = -2$, те са и собствени стойности на линейния оператор φ. Търсим собствените вектори за съответните собствени стойности, трябва да решим съответните матрични уравнения $(A - \lambda_i E)v_i = \mathbf{0},\ i = 1, 2, 3$.

1) $\lambda_1 = 9$.

$$(A - 9E) = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 3 \\ 1 & -10 & 3 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -10 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторът $v_1 = (1, 1, 3)$ е собствен за собствената стойност $\lambda_1 = 9$.

2) $\lambda_{2,3} = -2$

$$(A + 2E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Векторите $v_2 = (1, -1, 0)$ и $v_3 = (3, 0, -1)$ са собствени за двукратната собствена стойност $\lambda_{2,3} = -2$.

Търсим ортонормиран базис на $\mathbb{V}$. Ще ортогонализираме по метода на Грам-Шмид v_2 и v_3 (от теорията знаем, че на различните собствени стойности на симетричен оператор отговарят линейно независими и ортогонални помежду си собствени вектори). Нека $a_2 = v_2 = (1, -1, 0)$. Имаме $a_3 = v_3 + \mu a_2 \Rightarrow \mu = -\frac{(v_3, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{3}{2}$. Оттук, получаваме $a_3 = \frac{1}{2}(3, 3, -2)$. Остана да нормализираме векторите v_1, a_2, a_3. Получаваме ортонормиран базис на $\mathbb{V}$, състоящ се от векторите $u_1 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 3);\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0);\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{22}}(3, 3, -2)$.

Диагоналната матрица на φ спрямо новополучения ортонормиран базис е: $D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, където $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ \frac{3}{\sqrt{11}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}$.

Забележка: Това е решението за варианти 1 и 3, за варианти 2 и 4 действаме по аналогичен начин и получаваме: Ортонормиран базис на $\mathbb{V}$ образуват векторите:

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1);\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1);\ u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1);\ D = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Критерий: Общо 1,5т., от които: за намиране на собствените стойности - 0,5т. За намиране на собствени вектори - 0,5 т. За намиране на ортонормиран базис и диагонална матрица - 0,5т.

Задача 2. (1т.) Решете системата:

$$\left| \begin{array}{lcl} 5x + 1 & \equiv & 0 (\mathrm{mod} 24) \\ 4x & \equiv & 19 (\mathrm{mod} 21) \end{array} \right.$$

Решение:

От решавана в час задача, знаем че, ако $a \equiv b(\mathrm{mod} m_1), a \equiv b(\mathrm{mod} m_2), \dots, a \equiv b(\mathrm{mod} m_n)$, то $a \equiv b(\mathrm{mod}[m_1, m_2, \dots, m_n])$. Имаме $(5,24) = 1$ и от тъждеството на Безу следва, че съществуват цели числа $u_1, v_1 \ : \ 5u_1 + 24v_1 = (5,24) = 1$. Получаваме $u_1 = 5,\ v_1 = -1$. Тогава $5.5x \equiv 5(-1)(\mathrm{mod} 24) \Leftrightarrow x \equiv -5(\mathrm{mod} 24) \Leftrightarrow x \equiv 115(\mathrm{mod} 24)$. Аналогично $(4,21) = 1$ и $4u_2 + 21v_2 = (4,21) = 1 \Rightarrow u_2 = -5,\ v_2 = 1$. Тогава $x \equiv (-5)(-2)(\mathrm{mod} 21) \Leftrightarrow x \equiv 115(\mathrm{mod} 21)$. Имаме $[21,24] = \frac{21.24}{(21,24)} = 168$, т. е. $x \equiv 115(\mathrm{mod} 168)$.

Забележка: Това е отговора за варианти 1 и 3, за варианти 2 и 4 по аналогичен начин получаваме:

$x \equiv 93(\mathrm{mod} 120)$.
Критерий: Общо 1т.

Задача 3. (2,5т.) Нека $G = \{(x,y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. В G въвеждаме бинарна операция по правилото: $(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1})$.
а) Да се докаже, че G е група относно така въведената операция;
b) Докажете, че $H = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \lhd G,\ H \cong \mathbb{R},\ G/H \cong \mathbb{R}$.

Решение:

а) Очевидно G е непразно множество, затворено относно така дефинираната операция ($\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow x_1 + x_2 \in \mathbb{R},\ y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1} \in \mathbb{R}$). Правим проверка дали G е група относно операцията $\circ$:

1) Асоциативност:
$[(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2)] \circ (x_3, y_3) = (x_1 + x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) \circ (x_3, y_3) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-(x_2 + x_3)} + y_2 e^{x_1 - x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2})$,
$(x_1, y_1) \circ [(x_2, y_2) \circ (x_3, y_3)] = (x_1, y_1) \circ (x_2 + x_3, y_2 e^{-x_3} + y_3 e^{x_2}) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 e^{-(x_2 + x_3)} + y_2 e^{x_1 - x_3} + y_3 e^{x_1 + x_2})$.

2) Проверяваме дали съществува единствен елемент $(a,b) \in G$, такъв че $(a,b) \circ (x,y) = (x,y) \circ (a,b) = (x,y),\ \forall (x,y) \in G$. Непосредствена проверка ни дава $(a,b) = (0,0)$ - това е единичен елемент.

3) Търсим елемент от вида $(c,d) \in G$, такъв че $(c,d) \circ (x,y) = (x,y) \circ (c,d) = (0,0),\ \forall (x,y) \in G$. Получаваме $(c,d) = (-x,-y)$ - обратен елемент на (x,y).

От 1), 2) и 3) следва, че G е група относно операцията $\circ$.

б) Очевидно $\emptyset \neq H \subset G$. Проверяваме, дали $H < G$.

1) $(0, y_1) \circ (0, y_2) = (0, y_1 + y_2) \in H$,

2) Търсим елемент $(0,x) \in H$, такъв че $(0,x) \circ (0,y) = (0,y) \circ (0,x) = (0,0)$, $\forall (0,y) \in H$. Получаваме $(0,x) = (0,-y) \in H$.

От 1), 2) следва, че H е подгрупа на G относно така въведената операция.

Нека

$$\varphi \colon H \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(0,y) \to y.$$

Трябва да покажем, че φ е изоморфизъм. Имаме $\varphi(0,y_1) + \varphi(0,y_2) = y_1 + y_2 = \varphi(0,y_1+y_2) = \varphi\left[(0,y_1) \circ (0,y_2)\right]$, т. е. φ е хомоморфизъм на групи. Очевидно е биекция, т. е. $H \cong \mathbb{R}$.

За да докажем, че $G/H \cong \mathbb{R}$ и $H \lhd G$ ще използваме теоремата за хомоморфизми на групи. Ще проверим кога два произволни елемента (x_1,y_1), $(x_2,y_2) \in G$ попадат в един и същи клас на G/H. Имаме $(x_1,y_1) \circ H = (x_2,y_2) \circ H \Leftrightarrow (-x_1,-y_1) \circ (x_2,y_2) \in H \Leftrightarrow (-x_1+x_2, -y_1 e^{-x2} + y_2 e^{-x_1}) \in H \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Т. е. получихме, че различните класове в G/H се получават от различните стойности на първия елемент x в наредената двойка (x,y). Сега можем да дефинираме изображение ψ, такова че:

$$\psi \colon G \to \mathbb{R}$$
$$\psi(x,y) \to x.$$

Проверяваме дали ψ е хомоморфизъм на групи:
$\psi\left[(x_1,y_1) \circ (x_2,y_2)\right] = \psi(x_1+x_2, y_1 e^{-x_2} + y_2 e^{x_1}) = x_1 + x_2 = \psi(x_1,y_1) + \psi(x_2,y_2)$.
Очевидно хомоморфизмът е върху. Освен това имаме:

$\mathrm{Ker}\psi = \{(x,y) \in G \mid \psi(x,y) = 0\} = H$.

Тогава теоремата за хомоморфизми на групи ни дава $G/H \cong \mathbb{R}$ и $H \lhd G$, което трябваше да докажем.

Критерий: Общо 2,5т., от които подточка а) - 0,75т., б) - 0,5т. за $H < G$, 0,5т. за $H \cong \mathbb{R}$ и 0,75 т. за $G/H \cong \mathbb{R}$ и $H \lhd G$.