Тема 7.

Произведение на матрици

Определение 7.1. ***Произведение на матриците*** $A = (a_{is}) \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$ ***и*** $B = (b_{sj}) \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, взети в този ред, се нарича матрицата $AB = (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, с елементи c_{ij}, получени по правилото

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj}.$$

Действието, при което от матриците A и B се получава AB, се нарича ***умножение на матрици***.

Горното правило за умножение на матрици е известно като правилото ***"ред по стълб"***, т. е. всеки ред на първата матрица A се умножава със всеки стълб на втората матрица B, за да се получат всички елементи на произведението AB. По-точно, за да получим елементите от даден ред на AB, трябва да умножим реда със същия пореден номер на A последователно със всички стълбове на B съгласно обичайното правило за скаларно умножение на вектори (скаларно умножение относно ортонормирана координатна система).

Отбелязваме, че две матрици могат да бъдат умножени, само ако броят на стълбовете на първата матрица е равен на броя на редовете на втората. Произведението им е матрица, на която броят на редовете е равен на броя на редовете на първия множител, а броят на стълбовете е равен на броя на стълбовете на втория множител.

Пример 7.1. Да се намери произведението на матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матриците A и B могат да бъдат умножени, тъй като първата от тях е от тип (4×3), а втората е от тип (3×2). Следователно произведението им $C = AB$ е (4×2)-матрица.

За намирането на елементите от първия ред на $C = (c_{ij})$ умножаваме последователно първия ред на A с всички стълбове на B. Аналогично постъпваме и за получаването на останалите три реда на C.

$$c_{11} = 1.2 + (-1)(-1) + 0.3 = 3, \qquad c_{12} = 1.1 + (-1).0 + 0.1 = 1,$$
$$c_{21} = 0.2 + 2.(-1) + 3.3 = 7, \qquad c_{22} = 0.1 + 2.0 + 3.1 = 3,$$
$$c_{31} = 1.2 + (-3)(-1) + 1.3 = 8, \qquad c_{32} = 1.1 + (-3).0 + 1.1 = 2,$$
$$c_{41} = 4.2 + 0.(-1) + 2.3 = 14, \qquad c_{42} = 4.1 + 0.0 + 2.1 = 6.$$

Така получихме

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \\ 8 & 2 \\ 14 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 7.2. *Повдигане на квадратна матрица на степен.* Дадена е квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете A^3.

Имаме $A^3 = A^2 A$, $A^2 = AA$. Тогава последователно пресмятаме

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Умножението на матрици притежава следните свойства:

1) $AB \neq BA$ - умножението на матрици **не е** комутативно. В общия случай, ако AB съществува, BA може изобщо да не дефинирано.

2) $(AB)C = A(BC)$ (*асоциативен закон*).

3) Съществува квадратна матрица E от n-ти ред, наречена *единична матрица*, такава че за всяка квадратна матрица A от n-ти ред е изпълнено $AE = EA = A$. Матрицата E има вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.

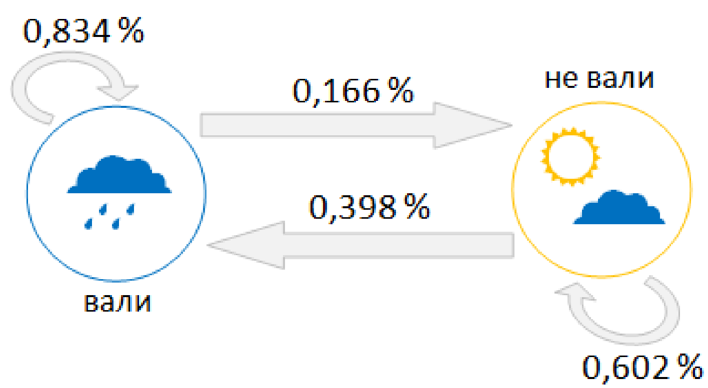
5) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ (*ляв и десен дистрибутивен закон*).

6) $\det(AB) = \det A \det B$ (A, B са квадратни матрици от един и същи ред).

7) $(AB)^T = B^T A^T$.

Пример 7.3. *Веригите на Марков* описват описват процеси, в които дадена система може да се намира в краен брой състояния. Вероятността за преминаване на системата от едно състояние в друго зависи от предишното състояние на системата. Зададено е началното състояние на системата, а преминаването във всяко следващо състояние се извършва чрез умножаване с *матрицата на прехода.*

От метеорологична станция в Западен Вашингтон за известни следните данни за времето: ако един ден вали, то за следващия ден съществува вероятност от 0.834% отново да вали и 0.166% да не вали. Обратно, ако в даден ден не вали, то за следващия ден вероятността отново да не вали е 0.602%, а да завали - 0.398%. Ако в понеделник не вали, определете какво ще е времето в петък (Фиг. 7.1).



Фиг. 7.1

Съставяме матрицата на прехода T между двете състояния "вали" (В) и "не вали" (НВ):

$$T = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{В} & \text{НВ} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{В} \\ \text{НВ} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.834 & 0.398 \\ 0.166 & 0.602 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Времето в понеделник е сухо, т. е. се описва от вектора

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вероятността какво ще бъде времето във всеки следващ ден получаваме като умножаваме матрицата на прехода T с вектора, описващ предходното състояние на системата (времето през предишния ден).

Например, времето във **вторник** x_1 ще получим като $x_1 = Tx_0$, в **сряда** x_2 ще бъде $x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2x_0$. На лице е зависимостта

$$x_k = T^k x_0.$$

При тези означения векторът, описващ времето в петък е x_4 и се получава като

$$x_4 = T^4 x_0 = \begin{pmatrix} 0.834 & 0.398 \\ 0.166 & 0.602 \end{pmatrix}^4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.71631 & 0.680173 \\ 0.28369 & 0.319827 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,680173 \\ 0,319827 \end{pmatrix}.$$

Следователно вероятността в петък да вали, ако в понеделник времето е било сухо, е приблизително 0.62%, а да бъде отново сухо - приблизително 0.32%.

Пример 7.4. Приложение в генетиката. Нека разгледаме пример, при който даден фенотипен белег се унаследява от единствен ген, за който съществуват две форми - *доминантна* A и *рецесивна* a (монохибридно кръстосване). Всеки индивид може да има *генотип*: AA, Aa или aa. Индивидите с генотип AA и aa се наричат *хомозиготни*, а с Aa - *хетерозиготни*. На външен вид AA и Aa не се различават, тъй като A подтиска проявяването на външните характеристики на a. Пример за такова унаследяване е цветът на очите при някои животни. Нека A отговаря за кафявия цвят на очите, а a - за синия. Тогава индивидите с генотип AA и Aa имат кафяви очи, а с aa - сини. Нека започнем с начално състояние на популацията, в което броят на индивидите от трите генотипа е равен, т. е.

$$x_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

а) Нека кръстосваме всички индивиди от разглежданата популация само с хомозиготни индивиди с генотип AA.

При кръстосването $AA \times AA$ всички получени индивиди ще са с генотип AA. При кръстосването на $Aa \times AA$ половината от индивидите ща са с генотип AA, а другата половина - Aa. При кръстосването на индивидите $aa \times AA$ ще получим само хетерозигонтни индивиди Aa.

Тогава матрицата на прехода T има вида

$$T = \begin{array}{c} \\ AA \\ Aa \\ aa \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тогава за индивидите в първо поколение получаваме

$$x_1 = Tx_0 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

За индивидите от второ поколение x_2 имаме

$$x_2 = Tx_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

По този начин, умножавайки вектора на изходното състояние със степен на матрицата на прехода, можем да получим вектора, даващ информация за индивидите във всяко поколение

$$x_n = T^n x_0.$$

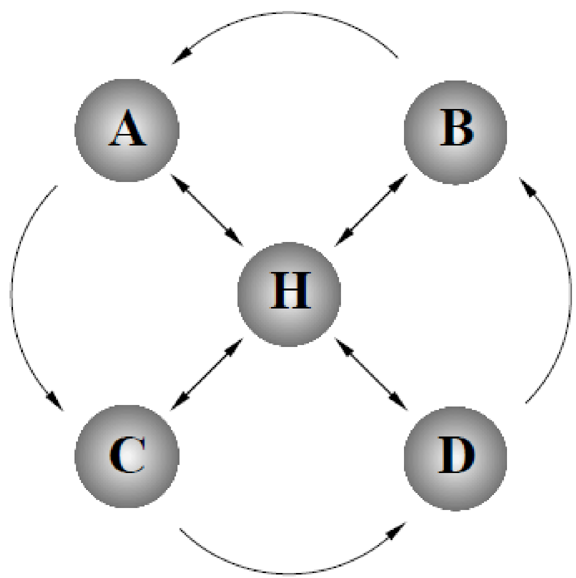
б) Нека кръстосваме всеки индивид от популацията само с индивид от същия генотип като неговия. Тогава матрицата на прехода T има вида

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} AA & Aa & aa \end{array} \\ \begin{array}{c} AA \\ Aa \\ aa \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

При същото начално състояние на популацията x_0 намерете вектора на индивидите от трето поколение.

Пример 7.5. Анализ на транспортни мрежи.

Нека A, B, C, D, H са пет града. На схемата по-долу със стрелки са посочени съществуващите директни полети между тези градове



Фиг. 7.2

$$T = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ H \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & H \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

За да анализираме системата на въздушния трафик между тези градове, съставяме квадратната матрица на свързаността $T = (t_{ij})$, като

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ако съществува директен полет между градовете } i \text{ и } j \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

Степените на T: T^2, T^3 и т. н. ни дават възможност да определим с колко последователни полета (с други думи, с колко прекачвания) можем да стигнем от един град до друг. Матрицата T^2 съдържа в себе си информация за броя на полетите с едно прекачване, T^3 - с две прекачвания и т. н. Пресмятаме

$$T^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad T^3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Така например от вида на T^2 се вижда, че от град A може да се стигне до град D с два полета, т. е. с едно прекачване. Тъй като матрицата T^2 няма нулеви елементи, два полета са достатъчни за достигане на всеки град от произволен друг.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.