Тема 6.

Детерминанти. Свойства и пресмятане

1. Детерминанти от втори и трети ред

Определение 6.1. Нека A е квадратна матрица от втори ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от втори ред***) и се означава с някой от символите $\det A$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Записваме

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример 6.1. Пресметнете следните детерминанти от втори ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \qquad \det C = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Определение 6.2. Нека A е квадратна матрица от трети ред, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогава числото

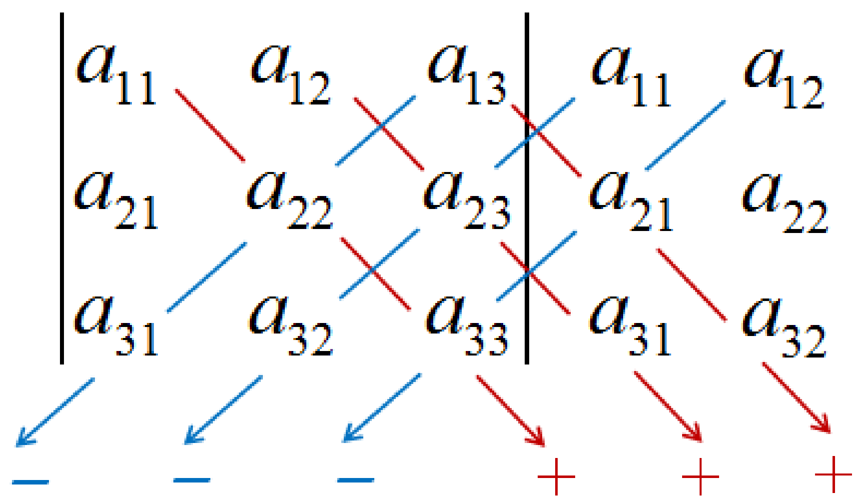
$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

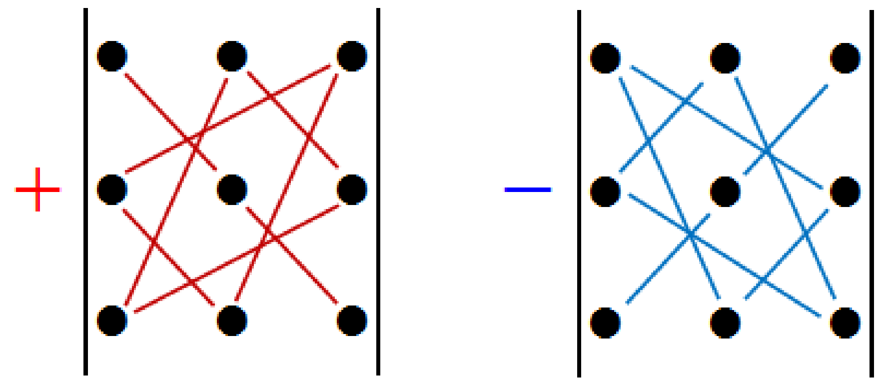
се нарича ***детерминанта на матрицата*** A (***детерминанта от трети ред***).

Пресмятане на детерминанти от трети ред (правила):

- ***Правило на Сарус***



- ***Правило на триъгълниците***



Пример 6.2. Пресметнете следните детерминанти от трети ред:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\det A = \left|\begin{array}{rrr|rr} 1 & 5 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right.$$

$$= 1.(-2)(-1) + 5.1.1 + 1.2.(-1) - 1.(-2).1 - 1.1.(-1) - 5.2.(-1)$$

$$= 18.$$

$$\det B = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2.4.3 + 1.2.(-1) + 3.0.0 - 1.4.0 - 2.2.0 - 3.(-1).(-3) = 13.$$

2. Пермутации

Определение 6.3. Всяка наредба $(i_1, i_2, ..., i_n)$ на числата 1,2,...,n, сред които няма равни, се нарича *пермутация* на тези числа. Пермутацията $(1, 2, ..., n)$ се нарича *нормална*.

Броят на пермутациите на n елемента е равен на $n!$.

Определение 6.4. Числата i и j в дадена пермутация образуват *инверсия*, ако $i > j$, но i стои в пермутацията пред j.

Пермутацията се нарича *четна*, ако елементите ѝ образуват четен брой инверсии, а *нечетна* - в противен случай.

Броят на инверсиите в пермутацията $(i_1, i_2, ..., i_n)$ означаваме с $[i_1, i_2, ..., i_n]$.

Броят на четните пермутации на дадени елементи е равен на броя на нечетните пермутации на същите елементи.

Очевидно за нормалната пермутация имаме $[1, 2, ..., n] = 0$.

Всяка размяна на местата на два елемента в една пермутация се нарича *транспозиция* на пермутацията. Всяка транспозиция променя четността на пермутацията.

3. Детерминанти от n-ти ред

Определение 6.5. ***Детерминанта на квадратна матрица от n-ти ред***
$A = (a_{ij})$ се нарича алгебричната сума

$$\sum_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} (-1)^{[j_1, j_2, \dots, j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

разпространяна върху всевъзможните пермутации $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ на числата $1, 2, \dots, n$ и означаваме

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1, j_2, ..., j_n)} (-1)^{[j_1, j_2, ..., j_n]} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}.$$

Детерминантата от n-ти ред е алгебрична сума на от $n!$ събираеми. Тази сума се нарича *развитие на детерминантата*, а събираемите ѝ - *членове в развитието.*

4. Свойства на детерминантите

Определение 6.6. *Транспониране на матрица (детерминанта)* се нарича действие, при което редовете и стълбовете си разменят местата, запазвайки своя номер. В резултат на транспонирането на матрицата A се получава нова матрица A^T, наречена *транспонирана матрица* на A.

Пример 6.3. Нека

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Тогава

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}, \qquad (\det B)^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6.1. $\det A^T = \det A$.

Следователно редовете и стълбовете на една детерминанта са равноправни. Всяко действие, което е доказано за редовете, е в сила и за стълбовете.

Теорема 6.2. *Ако в една детерминанта се разменят местата на два реда (стълба), се получава детерминанта с противоположна стойност.*

Следствие 6.1. *Детерминанта с два равни реда(стълба) е равна на нула.*

Теорема 6.3. *Ако всички елементи от даден ред (стълб) на една детерминанта се умножат с някакво число, то цялата детерминанта се умножава с това число.*

Пример 6.4.

$$\begin{vmatrix} 5 & 10 & 20 \\ 6 & 18 & 54 \\ 7 & 28 & 112 \end{vmatrix} = 5.6.7 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= 210(48 + 16 + 18 - 12 - 36 - 32) = 210.2 = 420.$$

Следствие 6.2. *Детерминанта, съдържаща нулев ред или нулев стълб (ред или стълб само от нули), е равна на нула.*

Следствие 6.3. *Детерминанта с два пропорционални реда (стълба) е равна на нула.*

Теорема 6.4. *Ако всеки елемент в i-тия ред (стълб) на една детерминанта се представя като сума $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$ за всяко j, то детерминантата е равна на сумата от две детерминанти, в които всички редове (стълбове), освен i-тия, са непроменени, а в i-тия ред (стълб) на първата детерминанта са елементите a'_{ij}, а във втората – a''_{ij}.*

Пример 6.5. Например детерминантата $\det A$ може да се представи като следната сума

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следствие 6.4. *Стойността на детерминантата не се променя, ако към един ред (стълб) прибавим друг, умножен с произволно число.*

Следствие 6.5. *Ако редовете (стълбовете) на една детерминанта са линейно зависими, детерминантата е равна на нула.*

Обратното твърдение на Следствие 6.5 също е вярно (ще бъде доказано по-късно), но въпреки това тук ще използваме и двете му посоки (като необходимо и достатъчно условие).

Пример 6.6. Детерминанта $\det A$ е равна на нула, тъй като вторият ѝ ред е получен от първия чрез умножаване с 3. Втората детерминанта е нула, тъй като третият ѝ стълб е сума на първия и втория.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \det B = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример 6.7. Съгласно Следствие 6.5 и допълнението към него можем да използваме метода на детерминантите за да проверим дали дадена система от вектори е линейно зависима или независима.

Нека разгледаме следния пример. В $\mathbb{R}^3$ дадени векторите $a_1(1,2,3)$, $a_2(-1,4,3)$, $a_3(2,0,1)$. За да проверим дали тези вектори са линейно независими, съставяме детерминантата от техните координати, като ги разполагаме по редове или стълбове. Ако стойността на тази детерминанта а нула, то векторите са линейно зависими, ако е различна от нула, то векторите са линейно независими.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 12 - 24 + 2 = -6 \neq 0.$$

Следователно векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими.

Друго важно приложение на детерминантите ще разгледаме, когато изучаваме метода на Крамер за решаване на един вид системи линейни уравнения.

5. Пресмятане на детерминанти

Определение 6.7. *Адюнгиран минор на елемента* a_{ij} от детерминантата от n-ти ред

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

се нарича детерминантата M_{ij} от $(n-1)$-ви ред, получена от $\det(a_{ij})$ чрез премахване на i-тия ред и j-тия стълб.

Числото $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ се нарича *адюнгирано количество на елемента* a_{ij} в $\det(a_{ij})$.

Пример 6.8. Нека е дадена детерминантата

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 8 & -2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Тогава адюнгираните минори на елементите от дадената детерминанта са съответно:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -2 \end{vmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 8 & 2 \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 7 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}, \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6.5. *(Правило на Лаплас) Всяка детерминанта е равна на сумата от произведенията на елементите от произволен ред (стълб) със съответните им адюнгирани количества.*

Пресмятането на детерминанта съгласно правилото на Лаплас се нарича *развиване на детерминанта по даден ред или стълб.*

Пример 6.9. Развитието на следната детерминанта по първия ѝ ред има вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 1.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} + 2.(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 258.$$

Следствие 6.6. *Ако всички елементи в даден ред или стълб на една детерминанта са нули, с изключение евентуално на един, то детерминантата е равна на произведението на този елемент със съответното му адюнгирано количество.*

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 100 & 1 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix} = 100.(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Нека отново разгледаме детерминантата от Пример 6.9. Като използваме Следствие 6.6, можем да изчислим тази детерминанта и по следния начин

$$\left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ (\mathbf{-6}) \\ \\ \\ \end{array} = \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & \mathbf{1} \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -6 & -31 & 0 \end{array}\right| = 1.(-1)^{2+4} \left|\begin{array}{rrr} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -6 & -31 \end{array}\right|.$$

Следствие 6.7. *Всяка триъгълна детерминанта е равна на произведението на елементите от главния ѝ диагонал.*

Например

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 9 & 8 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.3.4.5 = 5! = 120.$$

Теорема 6.6. *Сумата от произведенията на елементите от произволен ред (стълб) на една детерминанта със съответните адюнгирани количества на елементите от друг ред (стълб) на същата детерминанта е равна на нула.*

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.