Тема 4.

Координатни системи

1. Афинно пространство

Нека V е векторно пространство над числовото поле $\mathbb{K}$.

Определение 4.1. Непразно множество $\mathcal{A}$ се нарича *афинно (точково) пространство, свързано с* V, ако съществува изображение, съпоставящо на всяка наредена двойка (M, N) от елементи на $\mathcal{A}$ еднозначно вектор от V (който означаваме с $\overrightarrow{MN}$) по такъв начин, че да са в сила следните свойства (аксиоми):

1) ако $M, N, P \in \mathcal{A}$, то $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ (релация на Шал);

2) ако $M \in \mathcal{A}$, $a \in V$, то съществува точно един елемент $N \in \mathcal{A}$, за който $\overrightarrow{MN} = a$.

Елементите на $\mathcal{A}$ се наричат *точки*. Размерността на V се нарича размерност на $\mathcal{A}$, означаваме $\dim\mathcal{A}$.

Ако положим в 1) $M = N = P$, получаваме $\overrightarrow{MM} = o$. Сега, ако положим в 1) $M = P$, имаме $\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{NM}$. Ако $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, от 1) следва $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$ за произволни точки M, N, P, Q.

Пример 4.1. Геометричното векторно пространство е пример на реално тримерно афинно пространство.

Пример 4.2. Полагаме $\mathcal{A} = V$ и на произволни елементи $M = m$, $N = n$ от $\mathcal{A}$ съпоставяме вектора $\overrightarrow{MN} = n - m$ от V. Следователно по този начин всяко векторно пространство може да се разглежда като афинно.

В частност нека разгледаме $\mathbb{R}^n$. Ако $A(a_1, a_2, ..., a_n)$, $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ са точки от афинното пространство $\mathbb{R}^n$, то векторът $\overrightarrow{AB}$ от векторното пространство $\mathbb{R}^n$ се определя от формулата

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, ..., b_n - a_n).$$

Обратно, всяко афинно пространство може да бъде превърнато във векторно по следния начин. Нека фиксираме точка O от афинното пространство $\mathcal{A}$. Ако M е произволна точка, то векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича *радиус-вектор* на т. M относно т. O. В $\mathcal{A}$ дефинираме линейни действия с точки, като ги отъждествяваме със съответните им радиус-вектори:

$M + N = P$, ако $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP}$;

$\lambda M = N$, ако $\lambda\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON}$

за произволни $M, N, P \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

По този начин $\mathcal{A}$ се превръща във векторно пространство, чийто нулев вектор е фиксираната точка O.

2. Координатни системи

Определение 4.2. ***Координатна система*** на n-мерно афинно пространство $\mathcal{A}$, свързано с векторно пространство V, се нарича всяка съвкупност, състояща се от точка $O \in \mathcal{A}$ и база $\{e_1, e_2, ..., e_n\} \in V$. Означаваме $Oe_1, e_2, ..., e_n$. Точката O се нарича начало, а векторите $e_1, e_2, ..., e_n$ – координатни вектори на координатната система $Oe_1, e_2, ..., e_n$.

За всяка точка $M \in \mathcal{A}$ векторът $\overrightarrow{OM}$ се нарича радиус-вектор на т. M.

Определение 4.3. *Координатите на т.* $M \in \mathcal{A}$ относно координатната система $Oe_1, e_2, ..., e_n$ се наричат координатите на радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ относно базата $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, т. е. числата от наредената n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$, определена от равенството

$$\overrightarrow{OM} = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n.$$

Записваме $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорема 4.1. *Ако относно една координатна система са дадени точките* $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ *и* $N(y_1, y_2, ..., y_n)$, *то* $\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n)$.

Доказателство. Имаме

$$\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n, \quad \overrightarrow{ON} = y_1 e_1 + y_2 e_2 + ... + y_n e_n.$$

Тогава

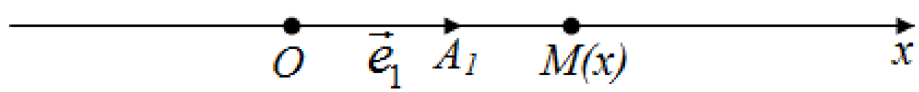
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, ..., y_n - x_n).$$

Както се отнасят векторите, така се отнасят и съответните им координати. Ако $a(a_1, a_2, ..., a_n)$, $b(b_1, b_2, ..., b_n)$ относно дадена база на V, то са в сила равенствата:

$$a + b(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n),$$

$$\lambda a(\lambda a_1, \lambda a_2, ..., \lambda a_n).$$

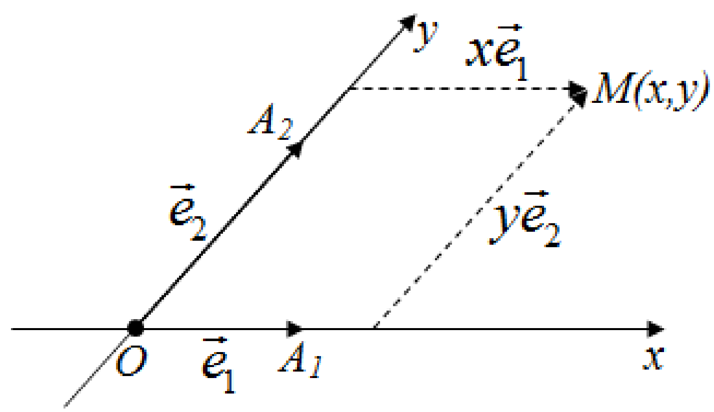
Пример 4.3. Ако $n = 1$, т. е. $\mathcal{A}$ е права, координатната система $O\vec{e}_1$ се състои от точка O и ненулев вектор $\vec{e}_1$. Ако $M \in \mathcal{A}$, равенството $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1$ определя единствената координата x на M относно тази система. За тази точка записваме $M(x)$. Правата, определена от O и $\vec{e}_1$ (която съвпада с $\mathcal{A}$ в този случай), са нарича *ос* (*абсцисна ос*). Можем да означим системата $O\vec{e}_1$ с Ox.



Фиг. 4.1

Точка O има координати $O(0)$, тъй като нейният радиус-вектор е $\overrightarrow{OO} = \vec{o} = 0\vec{e}_1$. Очевидно $\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1$ и следователно $\vec{e}_1(1)$. Ако $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, то $\overrightarrow{OA_1}$ е радиус-вектор на A_1 и следователно $A_1(1)$.

Пример 4.4. Нека $n = 2$, т. е. $\mathcal{A}$ е равнина. Координатната система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ се състои от точка O и неколинеарни вектори $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Ако $M \in \mathcal{A}$, равенството $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ определя координатите (x, y) на M относно тази система. Казваме, че x и y са съответно *абсциса* и *ордината* на M. Правите, определени от O и векторите $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ се наричат съответно *абсцисна* и *ординатна ос* и се означават с $O\vec{e}_1 = Ox$ и $O\vec{e}_2 = Oy$. $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ се означава още с Oxy.



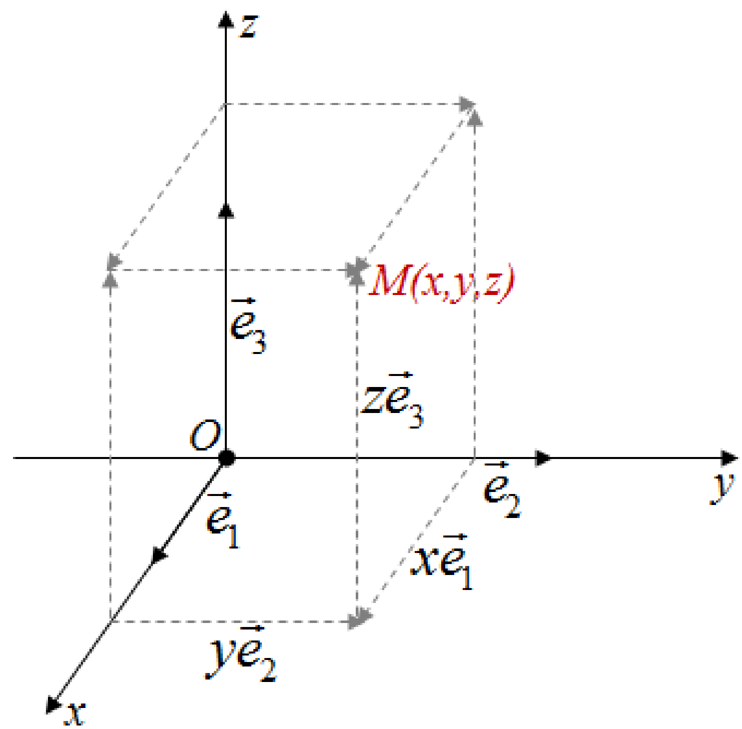
Фиг. 4.2

Отново имаме $O(0, 0)$, тъй като $\overrightarrow{OO} = \vec{o} = 0\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2$. За базисните вектори е изпълнено:

$$\vec{e}_1 = 1\vec{e}_1 + 0\vec{e}_2, \qquad \vec{e}_2 = 0\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2.$$

Следователно $\vec{e}_1(1,0)$, $\vec{e}_2(0,1)$. Ако $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OA_2}$, то $A_1(1,0)$, $A_2(0,1)$.

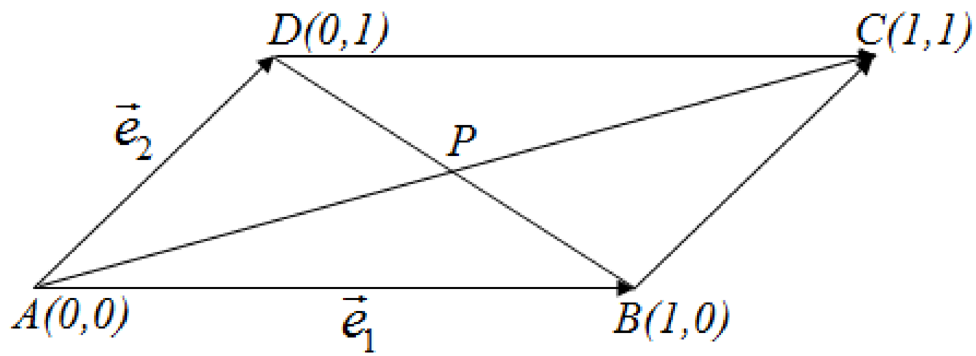
Пример 4.5. Нека $n = 3$, т. е. $\mathcal{A}$ е тримерно афинно пространство. Координатната система $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ се състои от точка O и некомпланарни вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$. Ако $M \in \mathcal{A}$, равенството $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$ определя координатите (x, y, z) на M относно тази система. Казваме, че x, y и z са съответно *абсциса*, *ордината* и *апликата* на M. Правите, определени от O и векторите $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$ се наричат съответно *абсцисна*, *ординатна ос* и *апликатна ос* и се означават с $O\vec{e}_1 = Ox$, $O\vec{e}_2 = Oy$ и $O\vec{e}_3 = Oz$. $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ се означава още с $Oxyz$.



Фиг. 4.3

Аналогично на предишните два примера имаме: $O(0,0,0)$, $\vec{e}_1(1,0,0)$, $\vec{e_2}(0,1,0)$ и $\vec{e_3}(0,0,1)$.

Пример 4.6. Даден е успоредник $ABCD$ с пресечна точка на диагоналите $AC \cap BD = P$. Въведете координатна система с център точката A и намерете координатите на P относно тази система.



Фиг. 4.4

Координатната система ще се състои от т. $A(0,0)$ и два линейно независими вектора с начало т. A. Такива са например $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$. Затова можем да положим $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AD}$. Координатите на точките B и D съвпадат с тези на съответните им радиус-вектори. Следователно, $B(1,0)$, $D(0,1)$. Известно е, че диагоналът $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 = (1,0) + (0,1) = (1,1)$, т. е. $C(1,1)$. Знаем още, че P е среда на AC, откъдето получаваме $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Същата зависимост е изпълнена и за съответните координати на двете точки. Така получаваме $P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Друг избор на координатна система с начало т. A може да бъде, например, с координатни вектори $\vec{e}_1' = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{AC}$. Относно тази система $B(1,0)$, а $C(0,1)$. Тогава от $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ следва $P(0, \frac{1}{2})$.

Ако координатните оси са взаимно перпендикулярни, координатната система се нарича *ортогонална*.

Ако координатните вектори са единични, координатната система се нарича *нормирана*.

Ако координатните оси са взаимно перпендикулярни и координатните вектори са единични, координатната система се нарича *ортонормирана*.

3. Просто отношение на три точки

Нека A, B, P са три различни точки, които лежат върху една права. Тогава съществува число $\lambda \neq 0$ така, че

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{BP}. \tag{4.1}$$

Определение 4.4. Числото λ, определено от равенството (4.1), се нарича *просто отношение* на точките A, B и P, взети в този ред и се означава с $\lambda = (ABP)$.

Следователно

$$|\lambda| = \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{BP}|}.$$

За произволна точка O от (4.1) получаваме

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\overrightarrow{OA} - \lambda \overrightarrow{OB}}{1 - \lambda}. \tag{4.2}$$

Ако $A(a)$, $B(b)$, $M(x)$ относно $K = O\vec{e}_1$, то от (4.2) следва

$$x = \frac{a - \lambda b}{1 - \lambda}.$$

Изпълнено е $\lambda < 0$, точно когато P принадлежи на отсечката AB и $\lambda > 0$, точно когато P лежи вън от отсечката AB.

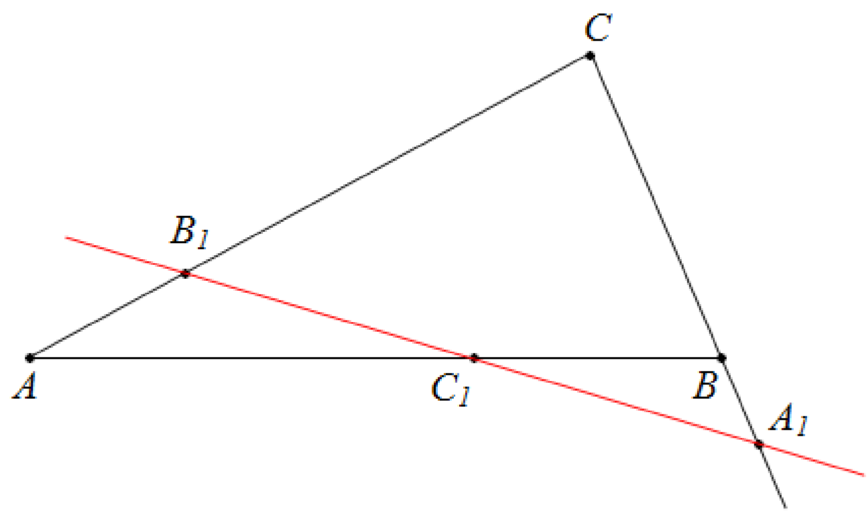
В частност, ако P е среда на отсечката AB, то от $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{BP}$ следва, че $(ABP) = -1$.

Теорема 4.2. (Менелай) Нека ABC е произволен триъгълник и точките A_1, B_1 и C_1 са съответно от правите BC, CA и AB. Тогава A_1, B_1 и C_1 лежат върху една права, точно когато

$$(ABC_1).(BCA_1).(CAB_1) = 1,$$

т. е. точно когато

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$



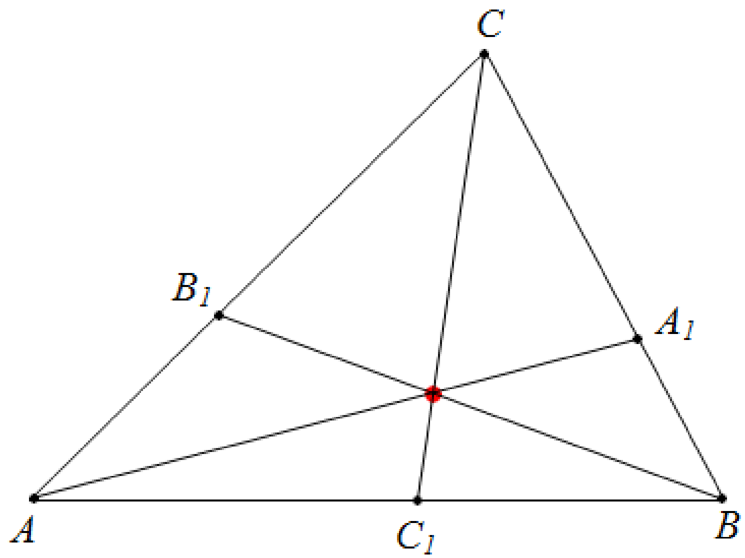
Фиг. 4.5

Теорема 4.3. (Чева) Нека ABC е произволен триъгълник и точките A_1, B_1 и C_1 са съответно от правите BC, CA и AB. Тогава правите AA_1, BB_1 и CC_1 се пресичат в една точка или са успоредни помежду си, точно когато

$$(ABC_1).(BCA_1).(CAB_1) = -1,$$

т. е. точно когато

$$\frac{AC_1}{BC_1} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} = 1.$$



Фиг. 4.6

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.