Тема 3.

Линейна зависимост и линейна независимост на система от вектори. Пораждащи системи от вектори. Бази и размерност на векторно пространство

1. Линейна зависимост и независимост на система от вектори

Нека V е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$, $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е произволна система от вектори на V, а $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$. Вектор b от вида

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите $a_1, a_2, ..., a_k$.

Линейна комбинация се нарича *тривиална*, ако всички коефициенти в тази комбинация са равни на нула.

Множеството от всички линейни комбинации на $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е векторно пространство над $\mathbb{K}$ и още по-точно, векторно подпространство на V.

Определение 3.1. Система от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича ***линейно зависима***, ако съществуват числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, поне едно от които е различно от нула, така че да е в сила равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k = o.$$

С други думи, една система от вектори на дадено векторно пространство е линейно зависима, ако нулевият вектор на това пространство може да се представи като тяхна нетривиална линейна комбинация.

Векторите на линейно зависима система се наричат ***линейно зависими вектори***.

Пример 3.1. Нека разгледаме векторното пространство $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x, y, z \in \mathbb{R}\}$. Системата от вектори $a_1(1, 1, -1)$, $a_2(0, 1, 1)$, $a_3(1, 2, 0)$ е линейно зависима, тъй като

$$a_1 + a_2 - a_3 = o = (0, 0, 0).$$

Забелязваме, че поне един от векторите a_1, a_2 и a_3 (в този случай и трите вектора) може да се представи като линейна комбинация на останалите два:

$$a_1 = a_3 - a_2, \qquad a_2 = a_3 - a_1, \qquad a_3 = a_1 + a_2.$$

Както ще видим по-нататък, това е една важна характеристика на векторите, принадлежащи на линейно зависима система.

Определение 3.2. Система от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича ***линейно независима***, ако само тяхната тривиална линейна комбинация е равна на нулевия вектор, т. е. равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k = o.$$

е изпълнено, точно когато $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$. Векторите на линейно независима система се наричат ***линейно независими вектори***.

Пример 3.2. Системата от вектори $b_1(1,0,1)$, $b_2(2,1,-1)$, принадлежащи на $\mathbb{R}^3$, е линейно независима.

За да проверим това, съставяме произволна линейна комбинация на тези вектори

$$\lambda b_1+\mu b_2 = \lambda(1,0,1)+\mu(2,1,-1) = (\lambda+2\mu, \mu, \lambda-\mu), \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

и я приравняваме на нулевия вектор на разглежданото векторно пространство:

$$(\lambda + 2\mu, \mu, \lambda - \mu) = (0,0,0).$$

Като сравним покомпонентно векторите от двете страни на горното равенство, установяваме, че то е еквивалентно на системата

$$\left|\begin{array}{l} \lambda + 2\mu = 0 \\ \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0, \end{array}\right.$$

откъдето получаваме $\lambda = \mu = 0$. Следователно векторите b_1 и b_2 са линейно независими.

Пример 3.3. Нека разгледаме матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

принадлежащи на векторното пространство $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Нека λ, μ, ν са реални числа. За да установим дали системата $\{A, B, C\}$ е линейно зависима или независима, разглеждаме линейната комбинация $\lambda A + \mu B + \nu C$ и я приравняваме на нулевия вектор на $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, т.е. нулевата матрица от втори ред. Имаме следнто матрично равенство (уравнение относно коефициентите λ, μ и ν)

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

След сравняване на съответните компоненти на матриците от двете страни на последното равенство достигаме до системата

$$\left|\begin{array}{l}\lambda = 0\\ 2\lambda + \mu + \nu = 0\\ 2\mu + \nu = 0\\ \lambda + \nu = 0.\end{array}\right.$$

Единственото решение на горната система е нулевото, т.е. $\lambda = \mu = \nu = 0$. Следователно само нулевата линейна комбинация на матриците A, B и C е равна на нулевата матрица, т.е. тези матрици на линейно независими.

Никоя от матриците A, B или C не може да се представи като линейна комбинация на останалите две. Същото важи и за линейно независимите вектори от Пример 3.2.

Както ще видим по-късно, това е в сила за векторите на всяка линейно независима система.

Теорема 3.1. *Система от един вектор е линейно зависима, точно когато този вектор е нулевият. Система от поне два вектора е линейно зависима, точно когато поне един от тези вектори е линейна комбинация на останалите.*

Доказателство. Нека V е векторно пространство и $\boldsymbol{a} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Разглеждаме произволна линейна комбинация на $\boldsymbol{a}$, т. е. вектора $\lambda\boldsymbol{a}$ и я приравняваме на нулевия вектор: $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Съгласно определението за линейна зависимост векторът $\boldsymbol{a}$ е линейно зависим, точно когато $\lambda \neq 0$. От друга страна, от Следствие 1.5. знаем, че равенството $\lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$ е изпълнено, точно когато $\lambda = 0$ или $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Тъй като вече изключихме възможността $\lambda = 0$, остава само втората възможност, която е $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$. Така установихме и че система от един вектор е линейно независима, точно когато този вектор е различен от нулевия.

За да докажем втората част на твърдението, нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $k > 1$, е система вектори на V и $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$. Първо предполагаме, че тази система и линейно зависима и следователно равенството

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_i a_i + ... + \lambda_k a_k = o,$$

е изпълнено, като поне един от коефициентите е различен от нула. Нека този коефициент е $\lambda_i \neq 0$, $1 < i \leq k$. Тогава можем да разделим двете страни на горното равенство на λ_i и от полученото равенство можем да изразим вектора a_i по следния начин

$$a_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} a_2 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_i} a_k.$$

Обратно, ако предположим, че един от векторите от разглежданата система се изразява чрез останалите, например $a_1 = \mu_2 a_2 + ... + \mu_k a_k$, то получаваме: $(-1)a_1 + \mu_2 a_2 + ... + \mu_k a_k = o$.

Теорема 3.2. *Ако системата от вектори* $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ *е линейно независима, а системата* $\{b, a_1, a_2, ..., a_k\}$ *е линейно зависима, то векторът* b *се представя еднозначно като линейна комбинация на* $a_1, a_2, ..., a_k$.

Теорема 3.3. *Всяка система от вектори, която съдържа линейно зависима подсистема, е линейно зависима. Всяка линейно независима система съдържа само линейно независими подсистеми.*

Следствие 3.1. *Нулевият вектор не може да участва в линейно независима система.*

2. Линейна зависимост в геометричното векторно пространство

Съгласно Теорема 3.1. един свободен вектор е линейно зависим, точно когато той е нулевият вектор.

Теорема 3.4. *Два свободни вектора са линейно зависими, точно когато са колинеарни.*

Доказателство. Ако някой от векторите е нулевият, то твърдението е вярно.

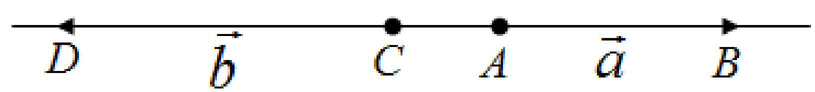
Нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са два ненулеви свободни вектора. Ако a и b са линейно зависими, то съгласно Теорема 3.1. единият от тях се изразява линейно чрез другия, т. е. еднозначно е определено число λ така, че например

$$\vec{b} = \lambda\vec{a}.$$

Следователно, съгласно определението за умножение на свободен вектор с число, векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

Обратно, нека $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочно колинеарни, то за $\lambda = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, в сила е $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са разнопосочно колинеарни, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ е изпълнено за $\lambda = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$. Така и в двата случая следва, че свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно зависими.

Пример 3.4. Всички вектори, които са колинеарни с дадена права, са линейно зависими помежду си.



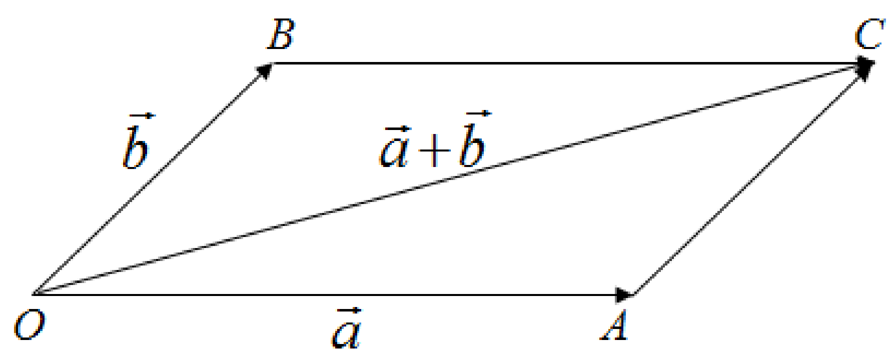
Фиг. 3.1

Пример 3.5. В успоредника $OACB$ векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ са линейно независими, тъй като очевидно не са колинеарни (ъгълът между тях е винаги различен от 0° и 180°).

Докато векторите $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$, както и $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{AC}$ са линейно зависими, тъй като $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$.

Системата от вектори $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ е линейно зависима, тъй като

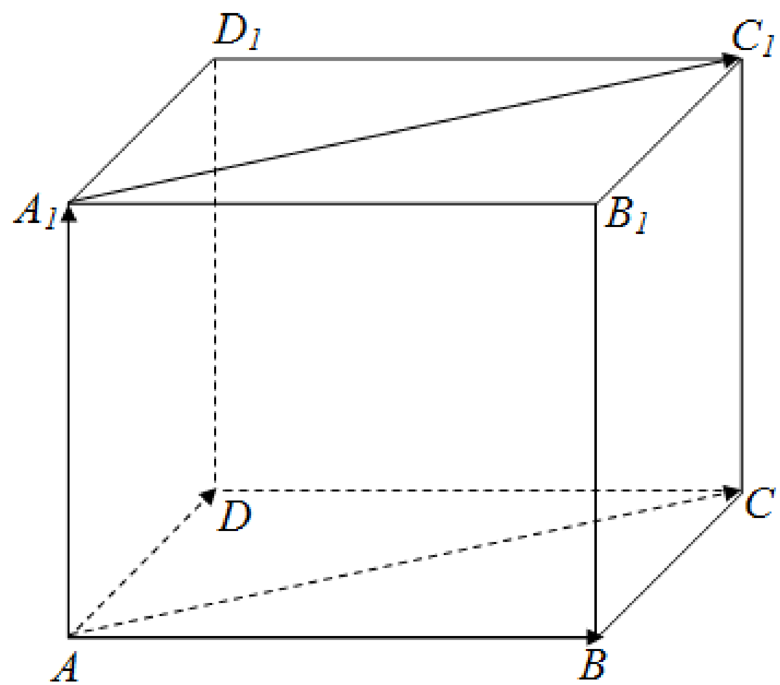
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$



Фиг. 3.2

Теорема 3.5. *Три свободни вектора са линейно зависими, точно когато са компланарни.*

Пример 3.6. Нека разгледаме паралелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ не лежат в една равнина (не са компланарни) и следователно са линейно независими. Векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{A_1C_1}$ са компланарни и следователно - линейно зависими.



Фиг. 3.3

Теорема 3.6. *Всеки четири свободни вектора са линейно зависими.*

Горното твърдение показва, че максималният брой линейно независими вектора в геометричното векторно пространство е три. Този факт а важен, тъй като по-нататък ще ни даде възможност да определим *размерността* на това пространство.

3. Пораждащи системи от вектори

Определение 3.3. Системата от вектори $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ на V се нарича ***пораждаща*** за V, ако всеки вектор на V се изразява като линейна комбинация на $a_1, a_2, ..., a_k$. Казва се още, че тази система поражда V, а V е породено от нея.

Векторите на една пораждаща система могат да бъдат както линейно независими, така и линейно зависими.

Пример 3.7. Нека разгледаме векторното пространство $\mathbb{R}_2[x]$ на полиномите на x с реални коефициенти от степен по-малка или равна на 2. Системата от вектори (полиноми) $\{x^2, x, 1\}$ е пораждаща за $\mathbb{R}_2[x]$, тъй като всеки елемент $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$ има вида

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = a_0.1 + a_1.x + a_2.x^2, \qquad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Тази система е и линейно независима.

Системата от вектори $\{1, x, x+1, x^2\}$ е също пораждаща за $\mathbb{R}_2[x]$, но не е линейно независима.

Системата $\{x^2, 2x+1\}$ е линейно независима, но не е пораждаща за $\mathbb{R}_2[x]$. Ще проверим това.

Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогава произволна линейна комбинация на $\{x^2, 2x+1\}$ е полином от вида

$$f(x) = \lambda x^2 + \mu(2x+1) = \lambda x^2 + 2\mu x + \mu.$$

Ще покажем, че $\mathbb{R}_2[x]$ има елементи, които не могат да се представят като линейна комбинация на $\{x^2, 2x+1\}$. Такъв елемент е например полиномът $g(x) = x+1 \in \mathbb{R}_2[x]$. Не съществуват $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ такива, че $g(x) = f(x)$ от горното равенство.

Проверете дали $f(x) = x^2 + 5$ принадлежи на векторното подпространство на $\mathbb{R}_2[x]$, породено от системата от полиноми $\{x^2 - 1, 2x, 3\}$.

Ще проверим дали $f(x)$ е линейна комбинация на $\{x^2-1, 2x, 3\}$. Нека $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Тогава произволна линейна комбинация на $\{x^2 - 1, 2x, 3\}$ има вида $g(x) = \lambda(x^2 - 1) + 2\mu x + 3\nu = \lambda x^2 + 2\mu x + (3\nu - \lambda)$. Приравняваме полиномите $f(x)$ и $g(x)$

$$x^2 + 5 = \lambda x^2 + 2\mu x + (3\nu - \lambda),$$

като търсим стойностите на λ, μ, ν, за които е изпълнено горното равенство.

Като сравним коефициентите пред еднаквите степени на x, получаваме системата

$$\left|\begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \\ 3\nu - \lambda = 5. \end{array}\right.$$

Решението на горната система е $\lambda = 1$, $\mu = 0$, $\nu = 2$. Следователно $f(x)$ принадлежи на подпространството на $\mathbb{R}_2[x]$, породено от $\{x^2 - 1, 2x, 3\}$.

За разглежданата система $\{x^2 - 1, 2x, 3\}$ може да се докаже, че е пораждаща за $\mathbb{R}_2[x]$.

Пример 3.8. Пораждаща система на векторното пространство, състоящо се от всички свободни вектори, колинеарни с дадена права, е всеки ненулев вектор от това пространство.

Определение 3.4. Векторно пространство V се нарича *крайномерно*, ако притежава пораждаща система от краен брой вектори. В противен случай си се нарича *безкрайномерно*.

За всяко подпространство на крайномерно векторно пространство може да се намери крайна пораждаща система.

Пример 3.9. Векторното подпространство

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

на $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ се поражда от матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тъй като произволен елемент X на $\mathcal{M}$ може да се представи като следната линейна комбинация на A и B:

$$X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aA + bB.$$

Следователно това векторно пространство е крайномерно.

Геометричното векторно пространство също е крайномерно. Тъй като всеки четири свободни вектора са линейно зависими, то например всеки три линейно независими (некомпланарни) свободни вектора могат да бъдат пораждаща система да това пространство.

Пример на реално безкрайномерно векторно пространство е например $\mathrm{C}[a, b]$.

4. База и размерност на векторно пространство

Определение 3.5. Всяка наредена система от вектори, която е линейно независима и пораждаща за ненулево векторно пространство, си нарича ***база*** (***базис***) на това пространство. Векторите, които образуват база, се наричат *базисни*.

Векторното пространство $V = \{o\}$ не притежава база, тъй като всички негови вектори, а именно векторът $\boldsymbol{o}$, са линейно зависими.

Пример 3.10. Да разгледаме отново векторното пространство

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,|\, a, b \in \mathbb{R}, \right\}$$

за което вече установихме, че системата от матриците A и B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

е пораждаща. Нека $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Тогава

$$\lambda A + \mu B = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

е изпълнено, точно когато $\lambda = \mu = 0$. Следователно векторите A и B са линейно независими. Така доказахме, че системата $\{A, B\}$ е база на $\mathcal{M}$.

Теорема 3.7. *Всяко ненулево крайномерно векторно пространство притежава база.*

Доказателство. Нека $V \neq \{o\}$ е крайномерно векторно пространство. Следователно V притежава пораждаща система, състояща се от краен брой вектори. Нека $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е такава система. Тогава всеки вектор $x \in V$ има представяне

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k. \tag{3.1}$$

Освен това поне един от векторите на пораждащата система е ненулев. След евентуално преномериране можем да считаме, че $a_1 \neq o$. Тогава системата $L_1 = \{a_1\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, то L_1 е база на V и твърдението е доказано.

Нека L_1 не е пораждаща. Тогава съществува вектор
$a \in \{a_2, a_3, ..., a_k\}$, за който системата $L_2 = \{a_1, a\}$ е линейно независима. Това е вярно, защото в противен случай всеки вектор от $\{a_2, a_3, ..., a_k\}$ би се изразявал линейно чрез a_1 $(a_2 = \mu_2 a_1, ...,$

$a_k = \mu_k a_1$) и тогава за произволен $x \in V$ от (3.1) ще следва

$$x = \lambda_1 a_1 + (\lambda_2\mu_2)a_1 + ... + (\lambda_k\mu_k)a_1 = (\lambda_1 + \lambda_2\mu_2 + ... + \lambda_k\mu_k)a_1.$$

Тогава системата L_1 ще бъде пораждаща, което е противоречие. След евентуално преномериране в системата $\{a_2, a_3, ..., a_k\}$ можем да считаме, че $a = a_2$. Ако линейно независимата система L_2 е и пораждаща, то твърдението е доказано.

Нека L_2 не е пораждаща. Повтаряйки горните разсъждения, установяваме съществуването на вектор $b \in \{a_3, a_4, ..., a_k\}$, за който системата $L_3 = \{a_1, a_2, a_3\}$ е линейно независима. Ако тя е и пораждаща, твърдението е доказано. В противен случай горният процес продължава по същия начин до получаването на линейно независима система L_p, $1 \leq p \leq k$, която е пораждаща. Тъй като първоначалната пораждаща система $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е крайна, то описаният процес също е краен – евентуално може да приключи за $L_k = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Следователно получената система L_k е база на V.

Следствие 3.2. *От всяка пораждаща система от вектори на ненулево крайномерно векторно пространство може да се извлече база на това пространство.*

Теорема 3.8. *Всяка линейно независима система от вектори на крайномерно векторно пространство може да се допълни до база на пространството.*

Теорема 3.9. *Всички бази на крайномерно векторно пространство се състоят от равен брой вектори.*

Определение 3.6. ***Размерност*** на ненулево крайномерно векторно пространство се нарича броят на векторите в произволна негова база. За размерност на нулевото пространство $\{o\}$ се приема числото 0.

Ако векторното пространство V има размерност n, записваме $\dim V = n$.

Теорема 3.10. *За n-мерно векторно пространство са в сила следните твърдения:*

1) *всяка линейно независима система има най-много n вектора;*

2) *всяка пораждаща пространството система има най-малко n вектора;*

3) *всяка линейно независима система от n вектора е база;*

4) *всяка пораждаща пространството система от n вектора е база;*

5) *всяка система от $n + 1$ вектора е линейно зависима.*

Пример 3.11. Нека определим размерността на векторните пространства, разгледани в Тема.1, като посочим по една база на всяко от тях.

Една база на $\mathbb{R}^n$ се състои от наредените n-торки:

$$a_1 = (1, 0, 0, ..., 0), \quad a_2 = (0, 1, 0..., 0), \quad a_3 = (0, 0, 1, .., 0), ..., \\ a_n = (0, 0, 0, ..., 1).$$

Следователно $\dim\mathbb{R}^n = n$. В частност, $\dim\mathbb{R} = 1$, $\dim\mathbb{C} = 2$.

Размерността на геометричното векторно пространство е три, тъй като това е максималният брой линейно независими вектори в това пространство.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, колинеарни с дадена права, е равна на 1.

Размерността на векторното пространство от всички свободни вектори, компланарни с дадена равнина, е равна на 2.

Една база на $\mathbb{R}_n[x]$ се състои от полиномите $1, x, x^2, ..., x^n$. Тогава $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$.

Една база на $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ се състои от матриците:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, ...,$$
$$E_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Следователно $\dim M_{m\times n}(\mathbb{R}) = mn$.

Посочените в този пример бази се наричат естествени (канонични).

Нека V е n-мерно векторно пространство над $\mathbb{K}$ с база $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Тогава, съгласно Теорема 3.2, за произволен вектор $x \in V$ системата $\{x, e_1, e_2, ..., e_n\}$ е линейно зависима. Следователно представянето (разлагането) на x относно базисните вектори

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n \tag{3.3}$$

е еднозначно, $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{K}$.

Определение 3.7. Числата от наредената n-торка $(x_1, x_2, ..., x_n)$, определена от (3.3), се наричат *координати* на вектора x относно базата $e = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Често вместо равенството (3.3) записваме $x(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Нека $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ относно базата e, т. е.
$y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$.
Тогава

$$x + y = (x_1 + y_1)e_1 + (x_2 + y_2)e_2 + ... + (x_n + y_n)e_n,$$
$$\lambda x = (\lambda x_1)e_1 + (\lambda x_2)e_2 + ... + (\lambda x_n)e_n,$$

което показва, че $(x + y)\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ и $\lambda x(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$.

Координатите на полинома $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ относно базата $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ на $\mathbb{R}_n[x]$ са коефициентите a_i пред съответните степени на x. Тогава можем да запишем $f(x)(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$.

Координатите на всяка матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ относно каноничната база на $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, определена от (3.2), са съответните елементи a_{ij} на тази матрица.

Пример 3.12. Докажете, че първите четири от полиномите на Ермит: $h_0(x) = 1$, $h_1(x) = 2x$, $h_2(x) = 4x^2 - 2$, $h_3(x) = 8x^3 - 12x$ образуват база на $\mathbb{R}_3[x]$ и намерете координатите на $p(x) = 12x^3 - 8x^2 - 12x - 7$ относно тази база.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.