Тема 2.

Матрици. Линейни действия с матрици

Определение 2.1. Всяка таблица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

от mn на брой реални числа a_{ij}, разположени в m реда и n стълба, се нарича ***матрица от тип*** $m \times n$ или $(m \times n)$-*матрица*. Числата a_{ij}, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ се наричат *елементи на матрицата*.

Множеството от всички реални матрици от тип $m \times n$ се означава с $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Определение 2.2. Матрица, за която $m = n$, се нарича *квадратна матрица.* Множеството от елементите $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ се нарича *главен диагонал* на матрицата. Множеството от елементите $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ се нарича *втори (вторичен) диагонал* на матрицата. Множеството от всички квадратни матрици от ред n се означава с $M_n(\mathbb{R})$.

Квадратните матрици от ред n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

се наричат съответно *горно триъгълна* и *долно триъгълна* матрица.

Квадратна матрица от ред n, която е едновременно горно и долно триъгълна, се нарича *диагонална*. Следователно тя има вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нека $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ са матрици от тип $m \times n$, а $\lambda \in \mathbb{R}$. Дефинираме линейните операции с матрици, както следва:

Събиране на матрици от един и същи тип

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{m1} & b_{m2} & ... & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & ... & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & ... & a_{2n} + b_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & ... & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}; \quad (2.1)$$

Умножение на матрица с реално число

$$
\begin{aligned}
\lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & ... & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & ... & \lambda a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & ... & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{2.2}
$$

Множеството $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, снабдено с действията (2.1) и (2.2) е векторно пространство над $\mathbb{R}$ и се нарича *матрично векторно пространство.*

Нулевият елемент O на $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ е матрица от тип $m \times n$, всички елементи на която са нули, т. е.

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Противоположният елемент на $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})$, е матрицата $(-A) = (-a_{ij})$, т. е.

$$-A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{m1} & -a_{m2} & ... & -a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.1. Дадени са матриците

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Намерете $A + B$, $-A$, $2A + 3B$ и матрица $X \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ такава,

че $A + X = B$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$2A + 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix},$$

$$X = B + (-A) = B - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

Пример 2.2. Докажете, че множеството на диагоналните матрици от втори ред

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

е векторно пространство.

Ще докажем, че $\mathcal{M}$ е векторно подпространство на $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Зе целта нека $A, B \in \mathcal{M}$, като

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогава имаме:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & b_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

След полагане на $a_1+a_2=a$ и $b_1+b_2=b$ в последното равенство лесно се установява, че $A+B\in\mathcal{M}$, т.е. сумата на две диагонални матрици от втори ред е също диагонална матрица от втори ред. За произведението λA намираме

$$\lambda A=\lambda\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda a_1 & 0\\ 0 & \lambda b_1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}.$$

Така установихме, че $A+B,\lambda A\in\mathcal{M}$ за всеки $A,B\in M$ и $\lambda\in\mathbb{R}$. Следователно $\mathcal{M}$ е векторно подпространство на $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ($\mathcal{M}\leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$), т. е. $\mathcal{M}$ е реално векторно пространство.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.