Тема 18.

Криви от втора степен

1. Криви от втора степен. Класификация

Определение 18.1. Множеството от точки в реалната равнина, чиито координати относно координатна система Oxy удовлетворяват уравнение от вида

$$c: \; a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{18.1}$$

в което $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, 2, 3)$ и поне един от коефициентите a_{11}, a_{12} и a_{22} е различно от нула, се нарича ***крива от втора степен***, а уравнението (18.1) - уравнение на кривата.

Изразът $f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ се нарича *квадратична форма на променливите x и y*.

На кривата от втора степен c, определена от (18.1), се съпоставя еднозначно симетричната матрица $A = (a_{ij})$ от коефициентите в уравнението на кривата по следния начин

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Кривата от втора степен c, определена от (18.1), се нарича *неизродена*, ако $\det A \neq 0$. В противен случай (ако $\det A = 0$) кривата c се нарича *изродена* (кривата се изражда в две прави, т. е. уравнението ѝ може да се представи като произведение на два множителя от първа степен, всеки от които задава уравнение на права).

Пример 18.1. На кривата c_1, определена от уравнението

$$c_1 : x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0,$$

съответства симетричната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пресмятаме $\det A = -9 \neq 0$, следователно кривата c_1 е неизродена.

На кривата c_2, определена от уравнението

$$c_2 : x^2 + xy - 2y^2 + x + 2y = 0,$$

съответства симетричната матрица

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \det B = 0.$$

Тази крива може да се представи във вида

$$c_2 : \ (x + 2y)(x - y + 1) = 0,$$

т. е. тя се разпада на две пресичащи се прави с уравнения $x + 2y = 0$ и $x - y + 1 = 0$.

На всяка квадратична форма също съответства симетрична матрица. На квадратичната форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, съставена от първите три члена в уравнението на (18.1) на кривата c, съответства матрицата

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Нейната детерминанта е равна на A_{33} - адюнгираното количество на елемента a_{33} от матрицата A.

Неизродената крива c се нарича:

- *хипербола*, ако $A_{33} < 0$;
- *парабола*, ако $A_{33} = 0$;
- *елипса*, ако $A_{33} > 0$.

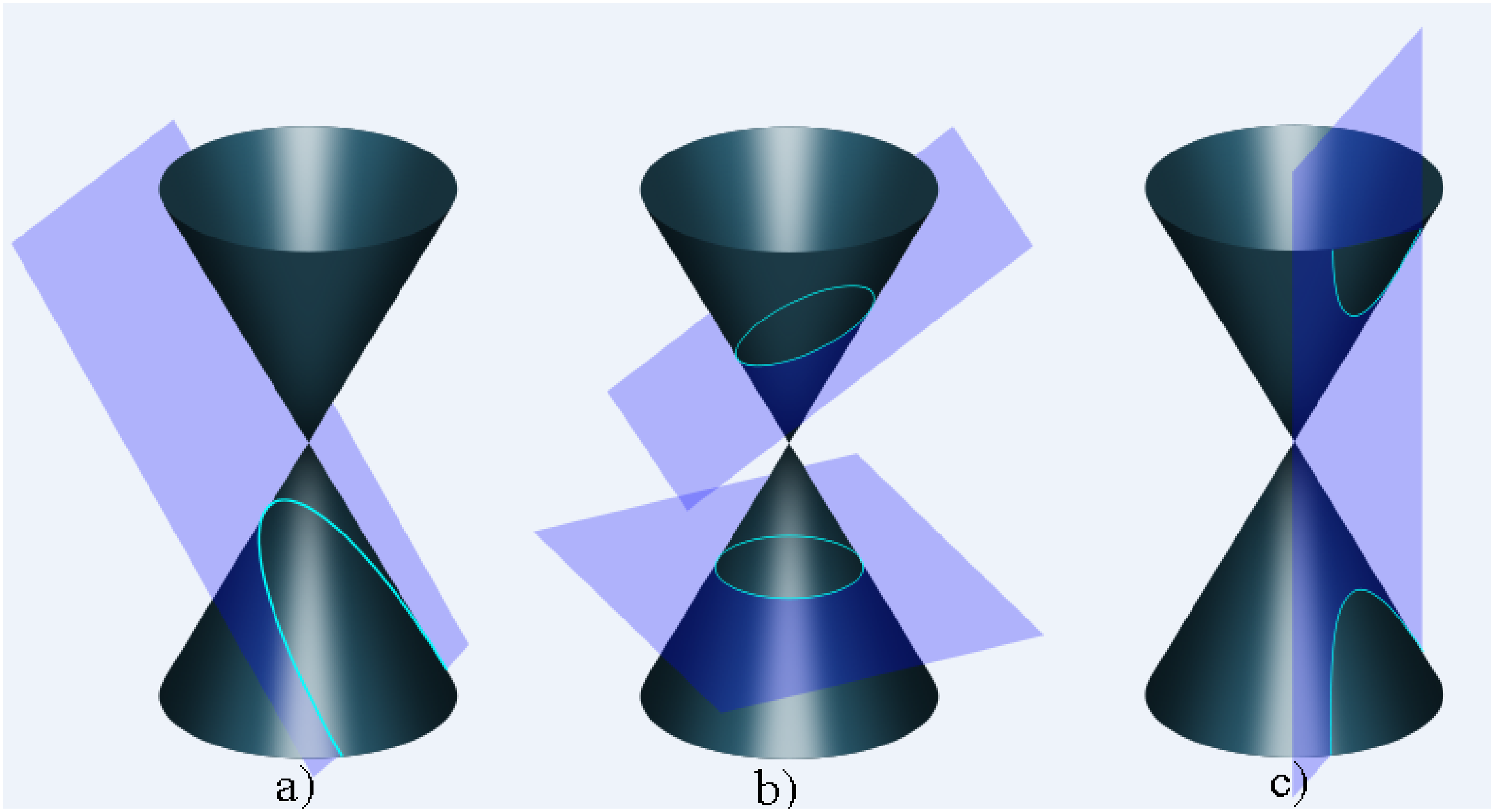
Ако кривата е изродена, тя се нарича съответно *изродена крива от хиперболичен тип* ($A_{33} < 0$), от *параболичен тип* ($A_{33} = 0$) и от *елиптичен тип* ($A_{33} > 0$).

Кривата c_1 от Пример 18.1 е парабола, тъй като
$\det A \neq 0$ и $A_{33} = 0$.

Кривата c_2 е изродена крива от хиперболичен тип ($A_{33} = -\frac{9}{4}$).

2. Конични сечения

Елипсата, хиперболата и параболата се наричат *конични сечения*, той като се получават при пресичането на повърхнината конус с равнина под различен ъгъл. Тези криви са били изучени за пръв път от древногръцкия математик Аполоний Пергски (ок. 262 пр. н. е. - ок. 190 пр. н. е.).



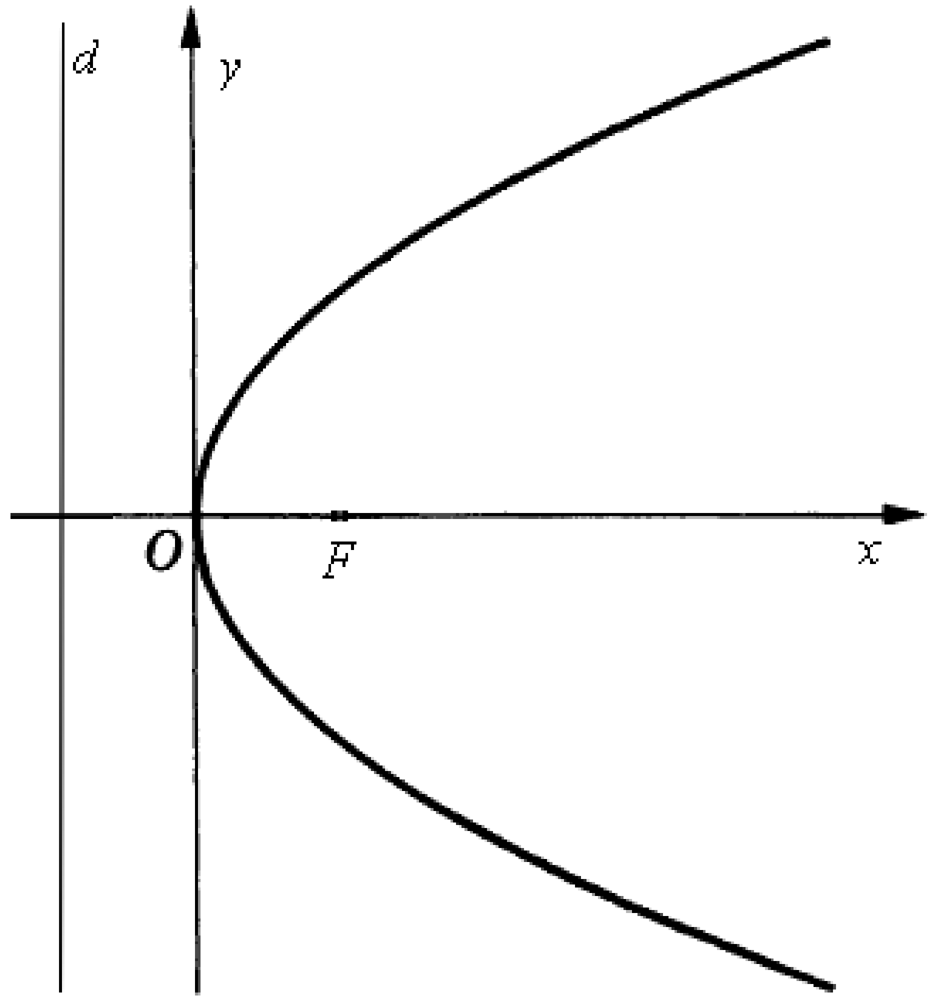
Фиг. 18.1. a) *парабола*; b) *окръжност и елипса*; c) *хипербола*.

2.1. Парабола

Определение 18.2. Множеството от точките в равнината, които са на равни разстояния от дадена точка F и неминаваща през нея права d в същата равнина, се нарича *парабола*. Точката F се нарича *фокус* на параболата, а d - нейна *директриса*. Разстоянието p от F до d се нарича *параметър* на параболата.

Относно ортонормирана координатна система Oxy параболата има следното *канонично уравнение*

$$y^2 = 2px, \qquad (p > 0). \tag{18.2}$$



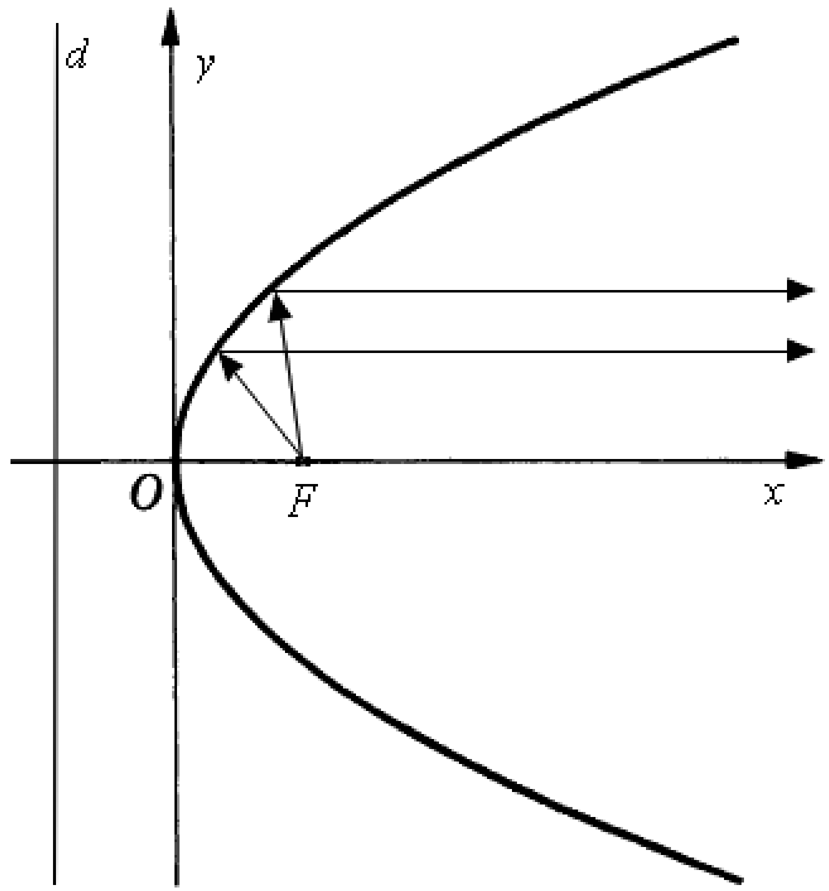
Фиг. 18.2 - *парабола*

Координатната ос Ox е оста на параболата с уравнение (18.2), а т. O - неин единствен връх. Освен това координатите на фокуса F и уравнението на директрисата d са съответно:

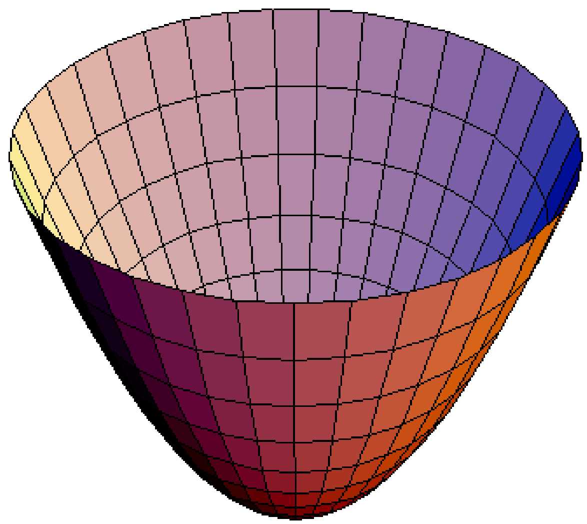
$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \qquad d: \ x = -\frac{p}{2}.$$

Траекторията на тяло, движещо се под действието на гравитацията при отсъствие на съпротивителни сили (или пренебрежимо малки съпротивителни сили), е много близка до парабола. Това важи за движения с ниски скорости. Откриването на тази закономерност дължим на Галилео Галилей. При по-бързо движещи се тела (например куршум) триенето на въздуха е значително по-голямо и траекторията не е парабола.

Параболата има следното оптично свойство: *Светлинен лъч с начало фокуса на параболата след отразяването си от параболата, става успореден на нейната ос.*



Според легендата през 3 в. пр. н. е. Архимед използвал оптичното свойство на параболата, за да защити град Сиракуза от римската флота. Той конструирал *параболични огледала*, т. е. с формата па повърхнината *параболоид* (Фиг. 18.3), получена при завъртането на парабола около нейната ос.



Фиг. 18.3

С помощта на параболичните огледала Архимед концентрирал слънчевите лъчи в една точка (фокуса на параболоида) и по този начин подпалил римските кораби.

Днес този принцип се използва при конструирането на параболични сателитни антени, рефлекторни огледала за телескопи и радиотелескопи, като например, най-големият радиотелескоп в света, намиращ се в Аресибо (Пуерто Рико) или оптичните телескопи на обсерваторията Кек на Мауна Кеа (Хаваи).

Радиотелескопа в Аресибо

Обсерваторията Кек

2.2. Хипербола

Определение 18.3. Множеството от точките в равнината, за които абсолютната стойност на разликата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-малка от разстоянието между F_1 и F_2, се нарича *хипербола*. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси*, а разстоянието между тях - *фокусно разстояние*. За произволна точка M от хиперболата отсечките F_1M и F_2M, както и дължините им, се наричат *фокални радиуси* на M.

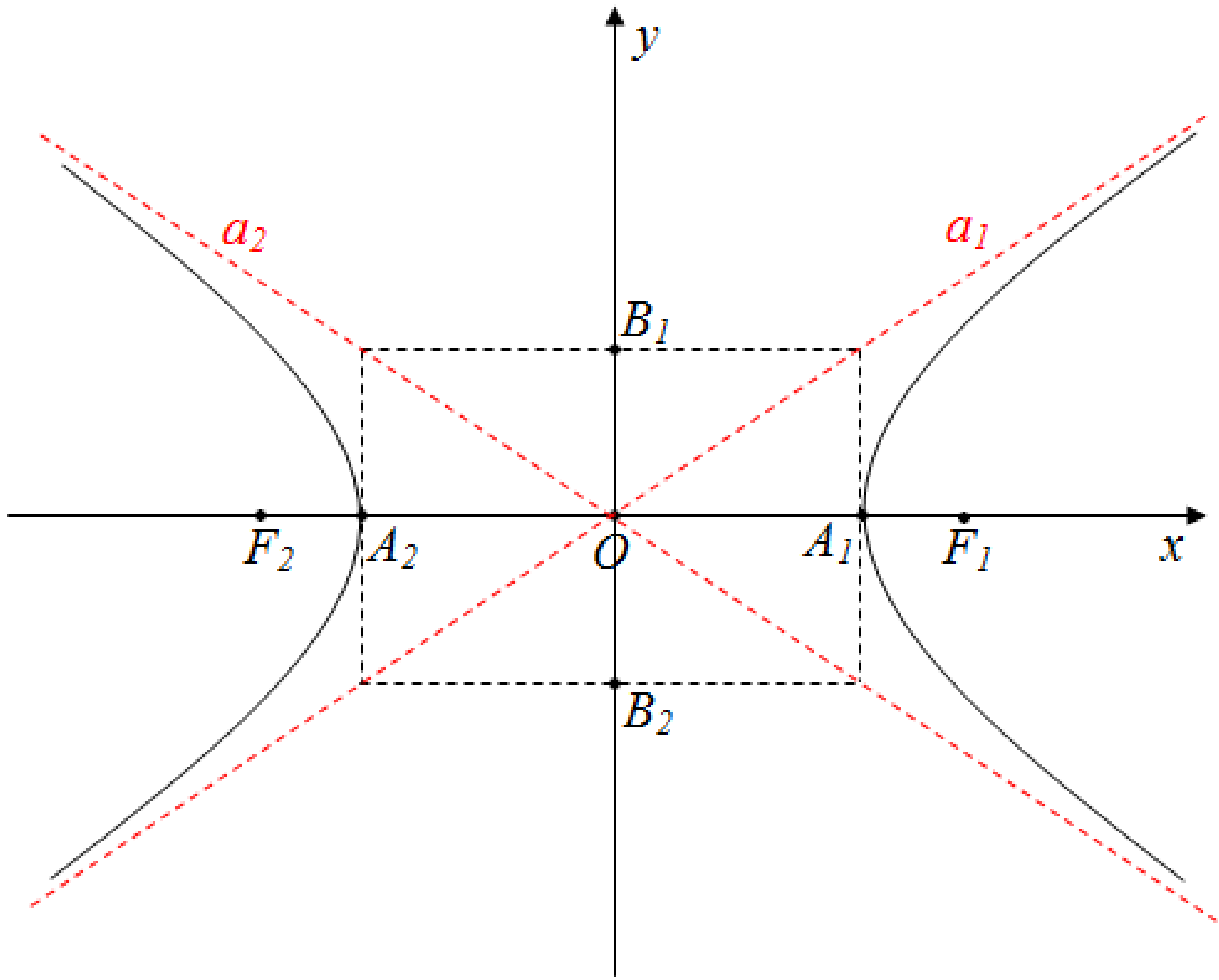
Хиперболата има следното канонично уравнение относно ортонормирана координатна система Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a, b = \text{const.} > 0.$$

Точките $A_1(a, 0)$ и $A_2(-a, 0)$ се наричат *върхове* на хиперболата. Точките B_1 и B_2 имат следните координати: $B_1(0, b)$ и $B_2(0, -b)$. Правите a_1 и a_2 съответно с уравнения:

$$a_1 : y = \frac{b}{a}x, \qquad a_2 : y = -\frac{b}{a}x,$$

се наричат *асимптоти* на хиперболата. Отсечката A_1A_2 с дължина $2a$ и отсечката B_1B_2 с дължина $2b$ се наричат съответно *фокална* и *нефокална ос* на хиперболата.



Фиг. 18.4 - *хипербола*

Въвежда се величината c

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

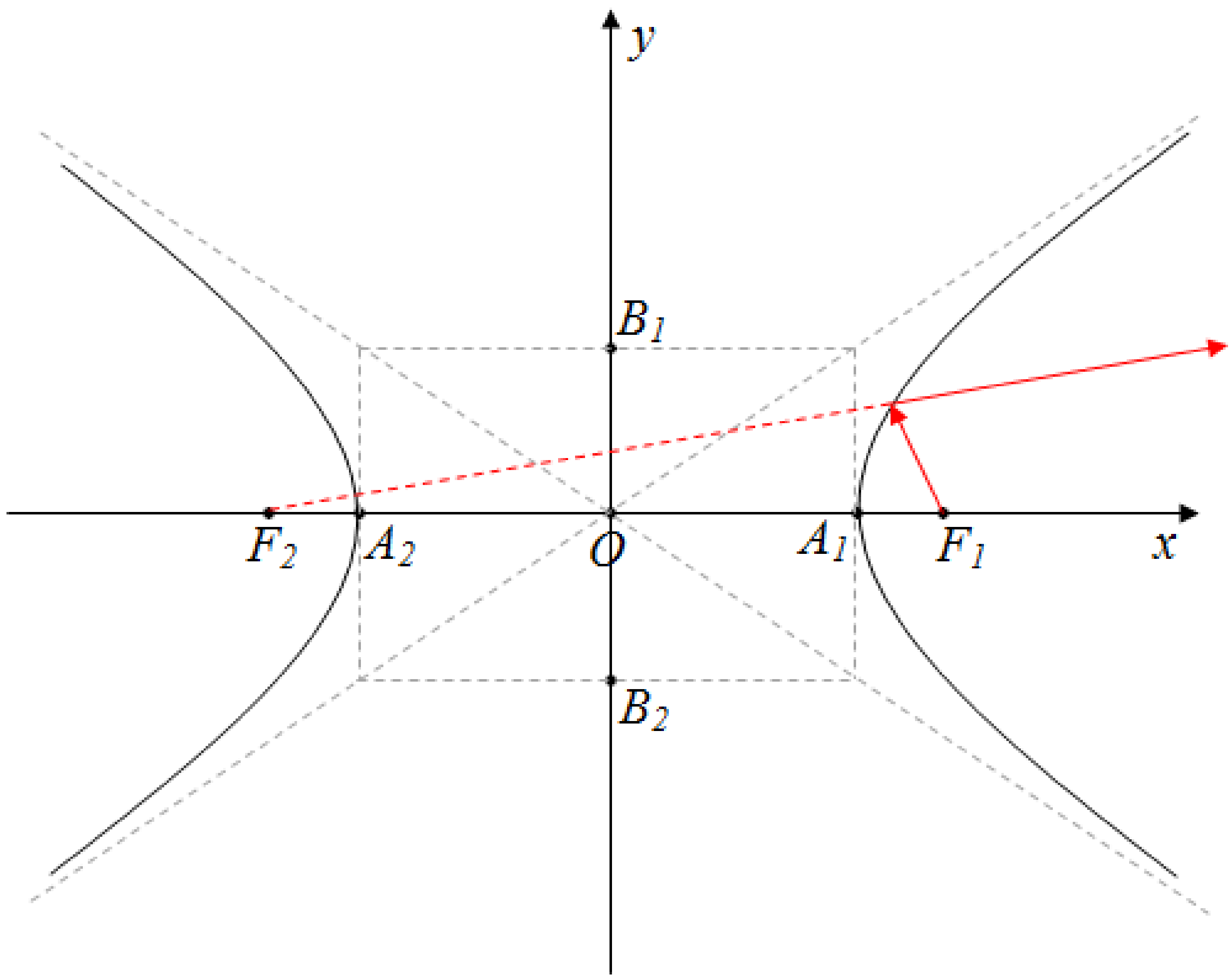
която се нарича *линеен ексцентрицитет*. Тогава $F_1(c, 0)$ и $F_2(-c, 0)$.

Величината

$$e = \frac{c}{a}$$

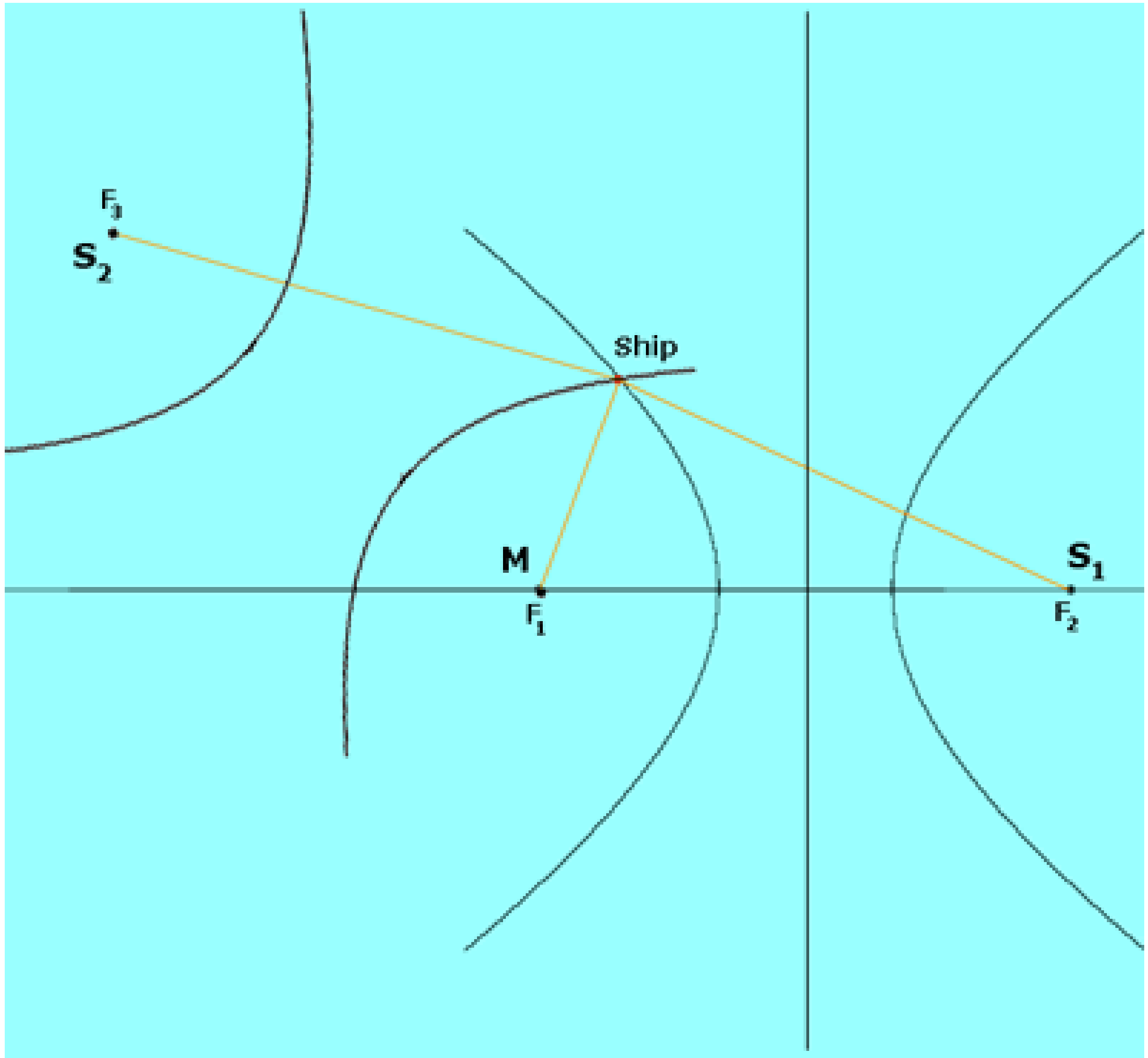
се нарича *числен ексцентрицитет* на хиперболата.
Изпълнено е: $e > 1$.

Хиперболата има следното оптично свойство: *Ако от единия фокус на хипербола бъде пуснат светлинен лъч, то след отразяването му от хиперболата неговото продължение ще мине през другия ѝ фокус.*



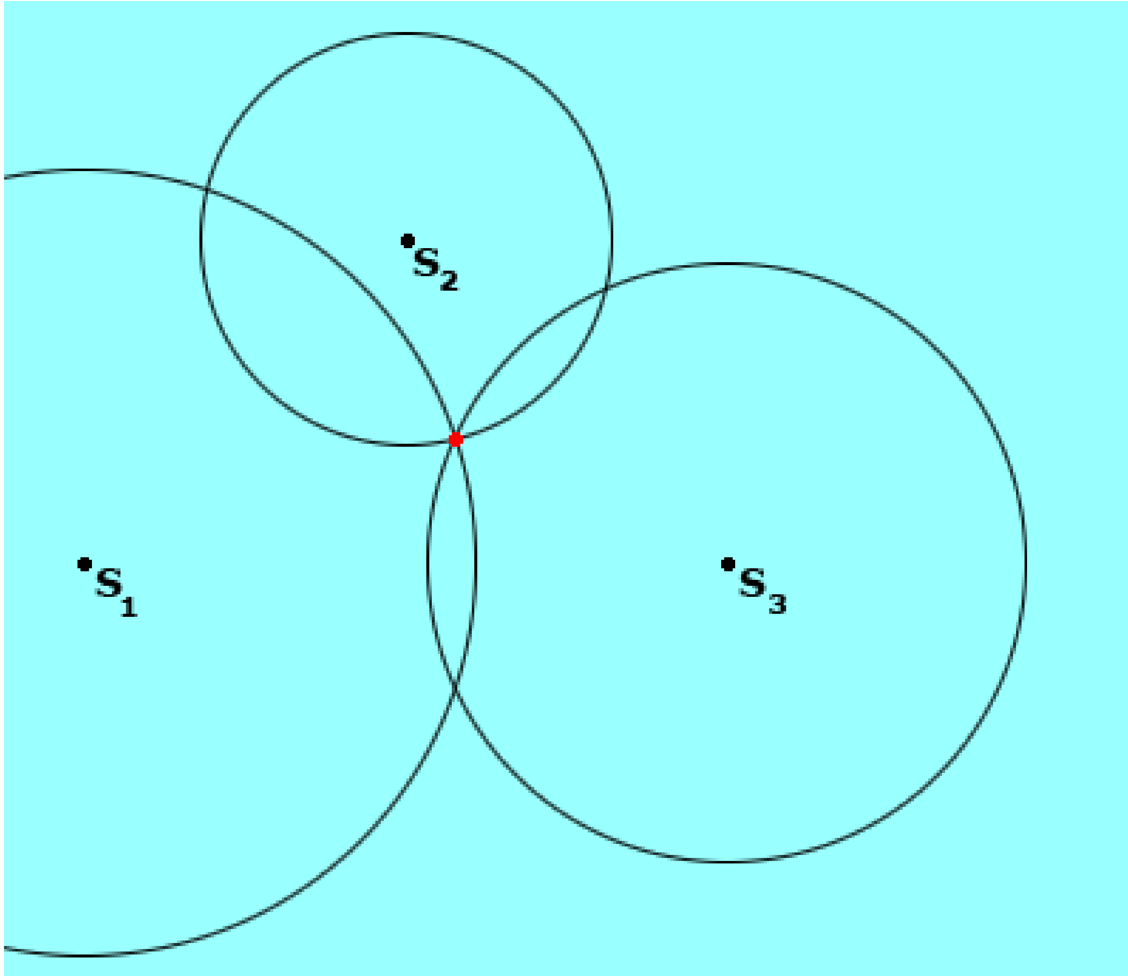
Хиперболи се използват за локализиране на точка (обект) в зависимост от разстоянията ѝ до фиксирани точки или по-точно в зависимост от разликите във времената на пристигането на синхронизирани сигнали от фиксираните точки до обекта. Този метод стои в основата на системи за навигация като *Loran* (Long Range Navigation), разработена в началото на 40те години на миналия век и използвана успешно за навигация по въздух и вода, Decca Navigator System, използвана по време на Втората световна война, CHAYKA, използвана в Русия и др.

За намиране на местоположението на даден обект от Loran са необходими три станции - една от тях се нарича главна (M), а останалите две - вторични $(S_1$ и $S_2)$. Всяка станция излъчва пулсиращи нискочестотни радио сигнали с уникална честота, за да могат да бъдат различавани станциите помежду си. Тези сигнали достигат до приемник, намиращ се на обекта и след анализирането им от системата се определя закъснението във времето на получаването им, а от там разликите в разстоянието от обекта до две двойки станции. Освен това се отчита и коя от трите станции се намира най-близо до обекта.



Фиг. 18.5 - локализиране на обект чрез Loran

От 1995 Loran е заменена от системата *GPS* (Global Positioning System) и сега изпълнява само подпомагаща функция. GPS системата използва метода окръжностите (сферите) за локализиране на обекти. Първоначално използвана от военните в САЩ, а по-късно предоставена и за граждански цели, GPS използва 32 сателита, разположени в 6 равнини на средна околоземна орбита, които обикалят Земята 2 пъти за денонощие. Тази система се нуждае от поне три (дори четири) сателита за определяне на ширината, дължината и височината на обект, снабден с GPS приемник. След получаването на сигнал от сателита, приемникът изчислява разстоянието си до него. Затова е от съществено значение часовниците на сателитите да са синхронизирани с тези на Земята. Вместо да се използват хиперболи всеки от трите сателита се разглежда като център на сфера с радиус разстоянието му до приемника. Трите сфери могат да се пресекат в две точки, затова се използва и четвърти сателит. Този метод за локализация се нарича *трилатерация*.



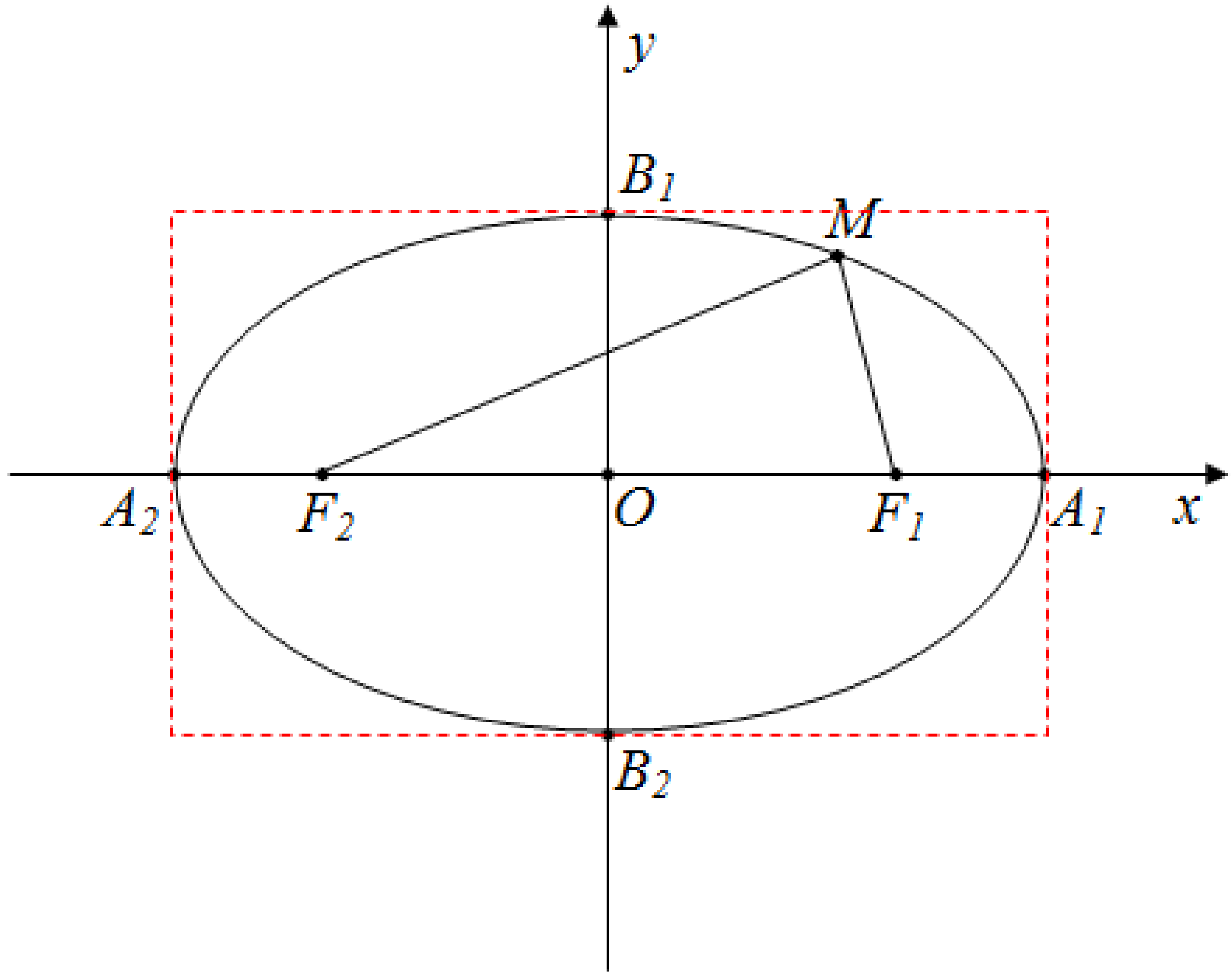
Фиг. 18.6 - локализация чрез GPS

2.3. Елипса

Определение 18.4. Множеството от точките в равнината, за които сумата от разстоянията до две дадени точки F_1 и F_2 в същата равнина е константа, по-голяма от разстоянието между F_1 и F_2, се нарича *елипса*. Точките F_1 и F_2 се наричат *фокуси*, а разстоянието между тях - *фокусно разстояние*. За произволна точка M от елипсата отсечките F_1M и F_2M, както и дължините им, се наричат *фокални радиуси* на M.

Елипсата има следното канонично уравнение относно ортонормирана координатна система Oxy:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a > b > 0, \quad a, b = \text{const}.$$



Фиг. 18.7 - *елипса*

Точките $A_1(a,0)$, $A_2(-a,0)$ и $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ се наричат *върхове* на елипсата. Отсечката A_1A_2 с дължина $2a$ и отсечката B_1B_2 с дължина $2b$ се наричат съответно *голяма* (*фокална*) и *малка* (*нефокална ос*) на елипсата.

Въвежда се величината c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

която се нарича *линеен ексцентрицитет*. Тогава $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$.

Величината

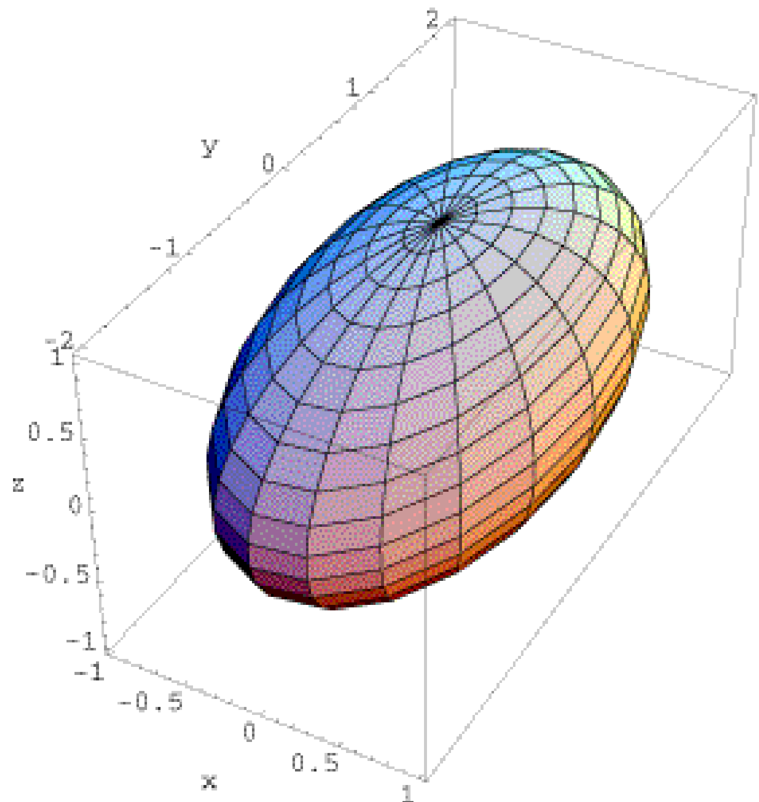
$$e = \frac{c}{a}$$

се нарича *числен ексцентрицитет* на елипсата.
Изпълнено е: $0 < e < 1$.

Окръжността е частен случай на елипса, за която двата фокуса съвпадат (с центъра на окръжността), т. е. за която $a = b$. Екцентрицитетът на окръжност е нула.

Елипсата има следното оптично свойство: *Лъч с начало единия фокус на елипса, след отразяването си от елипсата, минава през другия ѝ фокус.*

Това свойства се използва при конструирането на тавани на помещения. В т. нар. "стая на шепота" , чийто таван е с формата на част от елипсоид (повърхнина, получена при завъртането на елипса около фокалната ѝ ос) човек, застанал на единия фокус на елипсоида, чува добре шепота на друг човек, застанал на втория фокус.



Фиг. 18.8 - елипсоид

Според слухове шестият президент на САЩ Джон Куинси Адамс са възползвал от това свойство на таван на зала в Капитолия във Вашингтон, за да подслушва политическите си опоненти.

Фиг. 18.9 - National Statuary Hall в Капитолия, Вашингтон

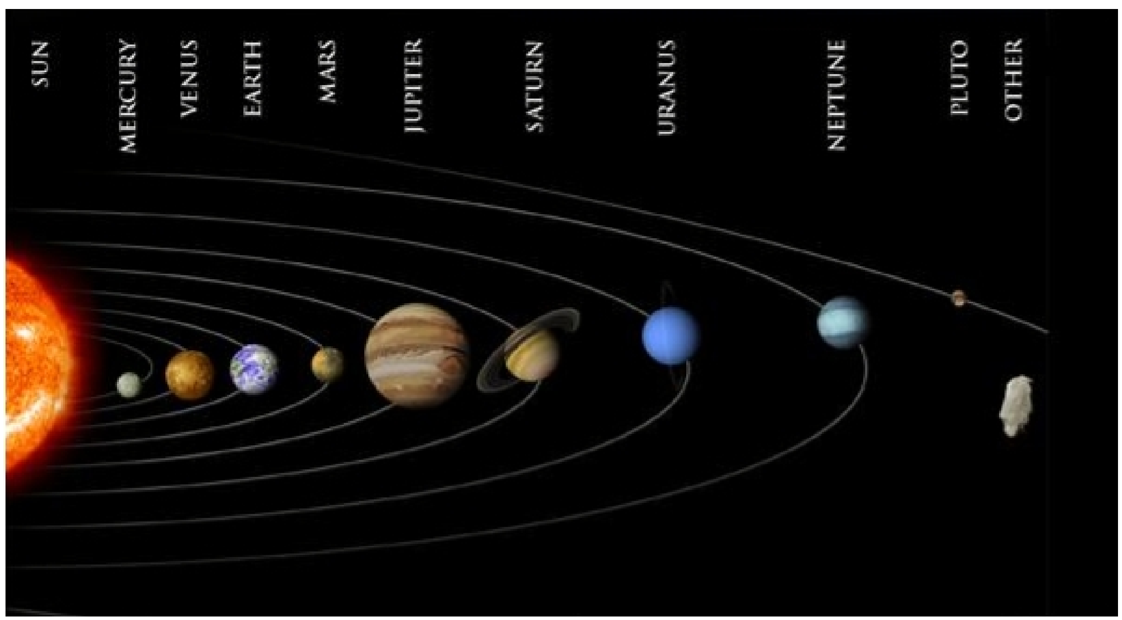
В двореца на Карлос V в Алхамбра има също такава стая.

Първият закон на Кеплер, т. нар. закон за орбитите гласи: *Всички планети се движат по елиптични орбити, като Слънцето се намира в единия от фокусите.*

Планетата в Слънчевата система с най-ексцентрична орбита (най-голяма стойност на числения ексцетрицитет e) е Меркурий.

Планета / Планетоид	Ексцентрицитет e
Меркурий	0.206
Венера	0.0068
Земя	0.0167
Марс	0.0934
Юпитер	0.0485
Сатурн	0.0556
Уран	0.0472
Нептун	0.0086
Плутон	0.250

Периодичните комети имат силно ексцентрични орбити. Например Халеевата комета има орбита с $e = 0.967$. Кометите с много дълги периоди следват орбити, близки до парабола, тъй като за тях $e \approx 1$ (параболата има $e = 1$). Такава е например кометата Хейл Боп, $e = 0.995086$, която беше наблюдавана през 1997г. Изчислено, че тя ще се завърне отново близо до Земята около 4380г. Има и комети с хиперболични орбити, като например Макнаут, за чиято орбита $e = 1.000030$. Такива комети могат да напуснат Слънчевата система и се наричат непериодични.



Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.