Тема 17.

Собствени стойности и собствени вектори на линейно преобразувание. Диагонализиране на матрица и линейно преобразувание

1. Собствени стойности и собствени вектори на линейно преобразувание

Определение 17.1. Нека V е векторно пространство над числовото поле $\mathbb{K}$ и f е линейно преобразувание на V. Един вектор $x \in V$ се нарича ***собствен вектор на*** f, ако $x \neq o$ и съществува $\lambda \in \mathbb{K}$ така, че

$$f(x) = \lambda x.$$

Числото λ се нарича ***собствена стойност, съответна на*** x. Множеството от всички собствени стойности на f, принадлежащи на числовото поле $\mathbb{K}$, се нарича *спектър на* f.

Теорема 17.1. *Множеството от всички собствени вектори на линейно преобразувание, съответстващи на обща собствена стойност, заедно с нулевия вектор е векторно пространство.*

Доказателство. Нека x_1 и x_2 са два собствени вектора на линейното преобразуване f, съответстващи на собствената му стойност λ, т. е. $f(x_1) = \lambda x_1$ и $f(x_2) = \lambda x_2$. Нека разгледаме произволна линейна комбинация на x_1 и x_2, т. е. вектора

$$v = \mu_1 x_1 + \mu_2 x_2,$$

където μ_1 и μ_2 са числа от полето $\mathbb{K}$.

Ще покажем, че v също е собствен вектор на f, съответстващ на λ. Тъй като преобразуванието f е линейно, то

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) = \mu_1 f(x_1) + \mu_2 f(x_2) \\ &= \mu_1(\lambda x_1) + \mu_2(\lambda x_2) = \lambda(\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2) = \lambda v, \end{aligned}$$

което показва, че v също е собствен вектор на f, съответстващ на собствената стойност λ.

Векторното подпространство V_λ на собствените вектори на линейното преобразуване f на V, съответстващи на собствената стойност λ, се нарича *собствено подпространство на* f*, съответно на* λ. Тъй като собствените вектори са ненулеви по определение, то $\dim V_\lambda \geq 1$.

Теорема 17.2. *Всяка система от собствени вектори на* f*, съответстващи на различни помежду си собствени стойности, е линейно независима.*

Нека λ е собствена стойност на f. Тогава съществува вектор x, за който $f(x) = \lambda x$. Това условие е еквивалентно на

$$(f - \lambda id)x = o,$$

където id е идентитета на V. От $x \neq o$ следва, че $\ker(f - \lambda id) \neq \{o\}$. Следователно линейното преобразуване $f - \lambda id$ е особено.

Така установихме, че спектърът на линейното преобразуване f е множеството от числата λ, за които линейното преобразуване $f - \lambda id$ е особено.

Нека V е крайномерно векторно пространство и $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ е база на V. Нека матрицата на f в базата e има вида

$$A = M_e(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогава матрицата на линейното преобразуване $f - \lambda id$ в същата база е $A - \lambda E$ (където E е единичната матрица от същия ред като A), т. е.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Условието линейното преобразуване $f - \lambda id$ да е особено е еквивалентно на

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Определение 17.2. Уравнението $\det(A-\lambda E)=0$, неговите корени и полиномът $\det(A-\lambda E)$ се наричат съответно *характеристично уравнение*, *характеристични корени* и *характеристичен полином* на матрицата A.

Теорема 17.3. *Подобните матрици имат равни характеристични полиноми.*

Теорема 17.4. *Собственото подпространство V_λ на линейното преобразуване f на V съвпада с* $\ker(f-\lambda id)$.

2. Собствени стойности и собствени вектори на симетрично линейно преобразувание

Определение 17.3. Линейното преобразувание f на векторното пространство V се нарича *симетрично*, ако

$$f(x)y = xf(y), \qquad x, y \in V.$$

Една матрица $A = (a_{ij})$ се нарича *симетрична*, ако съвпада с транспонираната си матрица, т. е.

$$A = A^T \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{ij} = a_{ji} \quad \text{за всяко } i, j.$$

Линейното преобразувание f е симетрично, точно когато матрицата му $M_e(f)$ в ортонормирана база е симетрична.

Теорема 17.5. *Характеристичните корени на всяка симетрична матрица са реални числа.*

Теорема 17.6. *Спектърът на всяко симетрично линейно преобразуване съвпада с множеството на характеристичните корени на матрицата му в ортонормирана база.*

Теорема 17.7. *Собствените вектори на симетрично линейно преобразуване, съответни на различни помежду си собствени стойности, образуват ортогонално система.*

Пример 17.1. Намерете собствените стойности и съответните им собствени подпространства на линейното преобразуване f на $\mathbb{R}^3$, определено от

$$f:\ (x,y,z) \longrightarrow (x+y-z,\ x+y+z,\ -x+y+z).$$

Първо намираме матрицата на f относно произволна база. Нека това бъде естествената база e на $\mathbb{R}^3$, съставена от векторите: $e_1(1,0,0)$, $e_2(0,1,0)$ и $e_3(0,0,1)$. Както знаем, тази база е ортонормирана. Тогава пресмятаме $f(e_1)=(1,1,-1)$, $f(e_2)=(1,1,1)$ и $f(e_3)=(-1,1,1)$. Матрицата на f в разглежданата база е

$$A = M_e(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тъй като матрицата $M_e(f)$ е симетрична относно ортонормирана база, линейното преобразуване f е симетрично.

Сега съставяме характеристичния полином на матрицата A и търсим неговите корени (собствените стойности на f):

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

След развиване на детерминантата, характеристичното уравнение приема вида

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0.$$

Следователно характеристичните корени на A са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Това са и собствените стойности на f.

Нека на собствената стойност $\lambda_1 = -1$ съответства собственото подпространство $V_1 < \mathbb{R}^3$ на f. Да намерим
$\ker(f - \lambda_1 id) = \ker(f + id)$ е равносилно на намирането на решаването на системата хомогенни линейни уравнения с основна матрица $(A - \lambda_1 E)$, т. е.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Чрез метода на Гаус-Жордан установяваме, че горната система е еквивалентна на

$$\left| \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 0. \end{array} \right.$$

Всяко ненулево решение на горната система е един собствен вектор на f, съответстващ на собствената стойност $\lambda_1 = -1$. Векторното подпространство V_1 се състои от всички решения на горната система, т. е.

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0, y + z = 0\}.$$

Имаме $\dim V_1 = 1$. Една база на V_1 е всяка фундаментална система решения на системата, векторът $e_1'(1, -1, 1)$.

Нека на собствената стойност $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ съответства собственото подпространство $V_2 < \mathbb{R}^3$ на f. Векторите, принадлежащи на V_2, са всички решения на системата

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Горната система е еквивалентна на уравнението

$$x - y + z = 0.$$

Следователно

$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}.$$

Размерността на V_2 е $\dim V_2 = 2$. Една база на V_2 се състои от векторите $e_2'(1, 1, 0)$ и $e_3'(-1, 0, 1)$.

Отбелязваме, че векторът e_1' е ортогонален на двата вектора e_2' и e_3', тъй като f е симетрично линейно преобразувание.

3. Диагонализиране на матрица и линейно преобразувание

Нека V е крайномерно векторно пространство, а f е произволно линейно преобразувание на V.

Тъй като матрицата на f зависи от избраната база на V, възниква въпросът по какъв начин да се избере база, в която тази матрица е от възможно най-прост вид, например диагонален

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Ако линейно преобразуване f има в базата e матрицата

$$A = M_e(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и съществува друга база e', в която матрицата му е диагонална (B), то в сила е равенството

$$B = T^{-1}AT, \tag{17.1}$$

където T е матрицата на прехода от e към e'.

Определение 17.4. Едно линейно преобразуване f на крайномерно векторно пространство V се нарича *диагонализируемо*, ако съществува база на V, в която матрицата на f е диагонална.

Една квадратна матрица се нарича *диагонализируема*, ако е подобна на диагонална матрица.

Намирането на неособената матрица T, чрез която от матрицата A по формулата (17.1) се получава диагоналната матрица B, се нарича *диагонализация* на матрицата A (или на линейното преобразуване f, зададено с матрицата A).

Теорема 17.8. *Едно линейно преобразуване f е диагонализируемо, точно когато за всяка негова k_i-кратна собствена стойност λ_i собственото подпространство V_{λ_i} е с размерност k_i.*

Теорема 17.9. *Едно линейно преобразуване на крайномерно векторно пространство е диагонализируемо, точно когато сумата от кратностите на различните му собствени стойности е равна на размерността на пространството.*

Теорема 17.10. *Всяка симетрична матрица може да се приведе в диагонален вид чрез ортогонална матрица T.*

Нека разгледаме отново линейното преобразуване f от Пример 17.1. Сумата от кратностите на собствените му стойности $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ е три и е равна на размерността на векторното пространство $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Следователно f е диагонализируемо. Една база от собствени вектори на f се състои от векторите $e'_1(1, -1, 1)$, $e'_2(1, 1, 0)$ и $e'_3(-1, 0, 1)$. В базата от собствените си вектори матрицата на f е диагонална и има вида

$$B = M_{e'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицата на прехода T от e към e' е

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а за обратната ѝ матрица получаваме

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$M_{e'}(f) = T^{-1}M_e(f)T,$$

т. е.

$$B = T^{-1}AT.$$

Матрицата на прехода T не е ортогонална. Това е така защото собствените вектори, съответни на една и съща собствена стойност, не са задължително ортогонални помежду си. Също така собствените вектори на едно линейно преобразувание не са задължително единични.

За да намерим ортогонална матрица, чрез която се диагонализира f, трябва първо да ортогонализираме системите от вектори, съответни на една и съща собствена стойност. В случая това е системата от вектори e_2' и e_3', съответстващи на $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Като използваме метода на Грам-Шмид, от тази система получаваме ортогоналната система (ортогоналната база на собственото подпространство V_2)

$$e_2'(1, 1, 0), \qquad e_3''\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Сега трябва да нормираме всичките три ортогонални помежду си вектора e_1', e_2' и e_3''. Така получаваме ортонормираната база на $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \frac{e_1'}{|e_1'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$a_2 = \frac{e_2'}{|e_2'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right),$$

$$a_3 = \frac{e_3''}{|e_3''|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Тогава $a = (a_1, a_2, a_3)$ е една ортонормирана база от собствени вектори на f. Следователно матрицата на прехода Q от естествената ортонормирана база e на $\mathbb{R}^3$ към ортонормираната база a е ортогонална и чрез нея симетричното линейно преобразувание f се привежда в диагоналния си вид B. Матрицата Q има вида

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.