Тема 16.

Уравнение на права и равнина в тримерно пространство. Уравнение на сфера

1. Уравнение на права в пространството

Векторно параметричното, скаларно параметричното и каноничното уравнения на права в тримерно пространство могат да бъдат построени аналогично на тези за права в равнина, отчитайки, че точките и векторите в пространството имат три координати.

Нека $Oxyz$ е координатна система в тримерно афинно пространство (геометрично пространство), относно която са зададени точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и ненулев вектор $\vec{v}(a, b, c)$. Тогава за произволна точка $M(x, y, z)$ от правата g, минаваща през т. M_0 и колинеарна на вектора $\vec{v}$ е изпълнено

$$g: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{v},$$

където $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и λ е реален параметър. Горното уравнение са нарича *векторно параметрично уравнение на правата* g. Координатният запис на това уравнение има вида

$$g: \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c, \end{array} \right.$$

което се нарича *скаларно параметрично уравнение на правата* g.

Ако от скаларно параметричните уравнения на правата g изразим λ и след това приравним получените изрази, ще намерим *каноничното уравнение на* g:

$$g: \ \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Също така може да бъде построено скаларно параметрично и канонично уравнение на права g, минаваща през две точки - $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$g: \left| \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1) \end{array} \right. , \qquad g: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Дотук обаче аналогията с уравнение на права в равнина спира. За права в пространството не съществува еднозначно определен ортогонален на нея вектор, т. е. няма нормален вектор. Важно е да запомним, че не съществува общо уравнение на права в пространството.

По-нататък ще разгледаме още един начин за задаване на права в пространството, а именно като пресечница на две равнини.

Пример 16.1. Намерете уравнението на права m, минаваща през точките $M_1(1, 0, 2)$ и $M_2(3, 2, 1)$.

$$m : \left| \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - \lambda, \end{array} \right.$$

$$m : \ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}.$$

2. Уравнение на равнина

Нека относно $Oxyz$ за дадени точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и два неколинеарни вектора $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ и $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$. Тогава за произволна точка $M(x, y, z)$, лежаща в равнината α, минаваща през т. M_0 и компланарна с векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ е изпълнено

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{p} + \mu\vec{q}.$$

Имаме представянето $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}$. Нека положим $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Така получаваме зависимостта

$$\alpha : \ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{p} + \mu\vec{q},$$

която се нарича *векторно параметрично уравнение на равнината* α. Координатният запис на горното равенство има вида

$$\alpha : \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda p_1 + \mu q_1 \\ y = y_0 + \lambda p_2 + \mu q_2 \\ z = z_0 + \lambda p_3 + \mu q_3, \end{array} \right.$$

който се нарича *скаларно параметрично уравнение на равнината* α.

Вместо чрез точка и два неколинеарни вектора, равнина може да бъде зададена и чрез две точки и ненулев вектор или чрез три неколинеарни помежду си точки.

Сега ще получим още един начин за задаване на уравнение на равнина относно ортонормирана координатна система.

Нека $Oxyz$ е ортонормирана координатна система в пространството. Както казахме вече, векторите $\overrightarrow{M_0M}(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$, $\vec{p}$ и $\vec{q}$ се компланарни. Това е еквивалентно на

$$\overrightarrow{M_0M}\vec{p}\vec{q} = 0.$$

От горното уравнение получаваме

$$\alpha : \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{16.1}$$

Уравнението на равнината α, минаваща през неколинеарните точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ има вида

$$\alpha : \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Нека развием по елементите на първия ред детерминантата от уравнението (16.1) и положим

$$A = p_2 q_3 - p_3 q_2, \qquad B = p_3 q_1 - p_1 q_3, \qquad C = p_1 q_2 - p_2 q_1.$$

Тъй като векторите $\vec{p}$ и $\vec{q}$ не са колинеарни, то поне едно от числата A, B и C трябва да е различно от нула,
т. е. $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$. Освен това $(A, B, C) = \vec{p} \times \vec{q}$.

Тогава (16.1) е еквивалентно на уравнението

$$\alpha : \; A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \tag{16.2}$$

Нека в (16.2) положим $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Тогава от (16.2) получаваме уравнението

$$\alpha : \; Ax + By + Cz + D = 0, \tag{16.3}$$

което се нарича *общо уравнение на равнината* α.

Теорема 16.1. *Произволен вектор* $\vec{v}(\lambda, \mu, \nu)$ *в тримерното пространство е компланарен на равнината* α *с общо уравнение (16.3), точно когато е ортогонален на вектора* $\overrightarrow{N}(A, B, C)$, *т. е. точно когато* $A\lambda + B\mu + C\nu = 0$.

Доказателство. Нека т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежи в равнината α. Следователно $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Нека за вектора $\vec{v}$ имаме $\vec{v} = \overrightarrow{M_0M}$. Тогава за т. M е в сила $M(\lambda + x_0, \mu + y_0, \nu + z_0)$. Векторът $\vec{v}$ е компланарен на равнината α, точно когато и т. M лежи в α, т. е. точно когато

$$A(\lambda + x_0) + B(\mu + y_0) + C(\nu + z_0) + D = 0.$$

Поради факта, че т. M_0 лежи в равнината α, последното равенство е еквивалентно на $A\lambda + B\mu + C\nu = 0$.

Векторът $\overrightarrow{N}(A, B, C)$ се нарича *нормален вектор* на равнината α с общо уравнение (16.3). Ако $\vec{p}$ и $\vec{q}$ са два линейно независими вектора, които са компланарни с α, то $\overrightarrow{N}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q}$.

От (16.2) и Теорема 16.1 следва, че векторът $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ е ортогонален на $\overrightarrow{N}$. Уравнението (16.2) е *уравнение на равнина през т.* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *и нормален вектор* $\overrightarrow{N}(A, B, C)$.

Ще обобщим разгледаните дотук начини за построяване на уравнение на равнина:

- чрез точка и два неколинеарни вектора;
- чрез две точки и един ненулев вектор;
- чрез три точки;
- чрез точка и нормален вектор.

Пример 16.2. Намерете общото уравнение на равнина α, минаваща през точката $M(1,2,1)$ и компланарна на векторите $\vec{p}(1,-1,0)$ и $\vec{q}(0,1,1)$.

$$\alpha: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

След развиване на детерминантата получаваме общото уравнение на равнината

$$\alpha: \ x + y - z - 2 = 0.$$

Теорема 16.2. *Ако е дадена равнината* $\alpha : Ax+By+Cz+D=0$ *относно координатна система* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3 = Oxyz$, *то:*

1) α *минава през координатното начало* O, *точно когато* $D=0$, *т. е.* $\alpha : Ax+By+Cz=0$;

2) $\alpha \parallel Ox$, *точно когато* $A=0$, *т. е.* $\alpha : By+Cz+D=0$;

3) $\alpha \parallel Oy$, *точно когато* $B=0$, *т. е.* $\alpha : Ax+Cz+D=0$;

4) $\alpha \parallel Oz$, *точно когато* $C=0$, *т. е.* $\alpha : Ax+By+D=0$;

5) $\alpha \parallel Oxy$, *точно когато* $A=B=0$, *т. е.* $\alpha : Cz+D=0$;

6) $\alpha \parallel Oxz$, *точно когато* $A=C=0$, *т. е.* $\alpha : By+D=0$;

7) $\alpha \parallel Oyz$, *точно когато* $B=C=0$, *т. е.* $\alpha : Ax+D=0$;

8) α *минава през* Ox, *точно когато* $A=D=0$, *т. е.* $\alpha : By+Cz=0$;

9) α *минава през* Oy, *точно когато* $B=D=0$, *т. е.* $\alpha : Ax+Cz=0$;

10) α *минава през* Oz, *точно когато* $C = D = 0$, *т. е.* $\alpha : Ax + By = 0$;

11) $\alpha \equiv Oxy$, *точно когато* $A = B = D = 0$, *т. е.* $Oxy : z = 0$;

12) $\alpha \equiv Oxz$, *точно когато* $A = C = D = 0$, *т. е.* $Oxz : y = 0$;

13) $\alpha \equiv Oyz$, *точно когато* $B = C = D = 0$, *т. е.* $Oyz : x = 0$.

Теорема 16.3. *Ако относно произволна координатна система са дадени равнините*

$$\alpha_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$\alpha_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогава:

1) α_1 *и* α_2 *съвпадат, точно когато*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

2) α_1 *и* α_2 *са успоредни, точно когато*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

3) α_1 *и* α_2 *се пресичат, точно когато коефициентите пред* x, y *и* z *в уравненията на двете равнини не са пропорционални.*

Следствие 16.1. *Относно произволна координатна система в тримерно пространство всяка права* g *може да се зададе по следния начин*

$$g: \left| \begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{array} \right.$$

където тройките (A_1, B_1, C_1) *и* (A_2, B_2, C_2) *не са пропорционални.*

Пример 16.3. Координатните оси Ox, Oy и Oz имат следните уравнение, зададени като пресечници на две координатни равнини:

$$Ox : \left| \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 0 \end{array} \right., \qquad Oy : \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right., \qquad Oz : \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0. \end{array} \right.$$

Пример 16.4. Намерете каноничното уравнение на правата m, определена от уравненията

$$m: \left| \begin{array}{l} x + y - z + 6 = 0 \\ 2x - y + 2z - 3 = 0. \end{array} \right.$$

Намираме две решения на системата от уравненията на двете равнини, определящи правата m. Полагаме, например, $x = 0$ в горната система и така получаваме едно нейно решение - точката $M(0, -9, -3)$. Друго решение на системата получаваме като положим, например, $z = 0$, $N(-1, -5, 0)$. Тогава каноничното уравнение на m има вида

$$m: \ \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{3}.$$

Горното уравнение може да бъде получено и по друг начин, ако правата m е зададена относно ортонормирана координатна система.

Нека означим двете равнини, които съдържат m, съответно с α и β, т. е.

$$\alpha: \; x + y - z + 6 = 0,$$
$$\beta: 2x - y + 2z - 3 = 0.$$

Тогава нормалните вектори на двете равнини се определят от

$$\overrightarrow{N}_{\alpha}(1, 1, -1), \qquad \overrightarrow{N}_{\beta}(2, -1, 2).$$

В такъв случай векторът $\vec{m} \parallel m$ получаваме по формулата

$$\vec{m} = \overrightarrow{N}_{\alpha} \times \overrightarrow{N}_{\beta}.$$

Тогава пресмятаме $\vec{m}(1, -4, -3)$. Остава само да намерим една точка от правата m, т. е. едно решение на системата от уравненията на равнините α и β, което направихме по-горе, например т. $N(-1, -5, 0)$. След това можем да съставим каноничното уравнение на m, като права през т. N с колинеарен вектор $\vec{m}$.

Определение 16.1. Множеството от всички равнини, минаващи през обща права, се нарича *сноп равнини*, а дадената права - *носител на снопа.*

Теорема 16.4. *Нека*

$$\alpha_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \qquad \alpha_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

са две различни равнини от сноп равнини. Тогава всяко уравнение от вида

$$\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\mu(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \, (\lambda,\mu)\neq(0,0),$$

е уравнение на равнина от снопа.

3. Разстояние от точка до равнина

Нека спрямо ортонормирана координатна система е дадена равнината

$$\alpha: \ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Разстоянието $d(M_0, \alpha)$ *от точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до равнината* α се определя от формулата

$$d(M_0, \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Числото

$$\delta(M_0, \alpha) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

се нарича *ориентирано разстояние от т.* M_0 *до равнината* α.

Пример 16.5. Намерете разстоянието от точката $M(1, -1, 3)$ до равнината $\beta : 2x + 2y - z - 6 = 0$.

$$d(M, \beta) = \frac{|2.1 + 2(-1) - 3 - 6|}{3} = 3.$$

4. Уравнение на сфера и окръжност в пространството

Сферата е множество от точки в пространството, равноотдалечени от дадена точка.

Относно ортонормирана координатна система $Oxyz$ сфера S с център точката $C(a, b, c)$ и радиус $R > 0$ има *общо уравнение*

$$S: \ (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2.$$

Окръжност в тримерното пространство се задава като сечение на сфера и равнина. Нека разгледаме следващия пример.

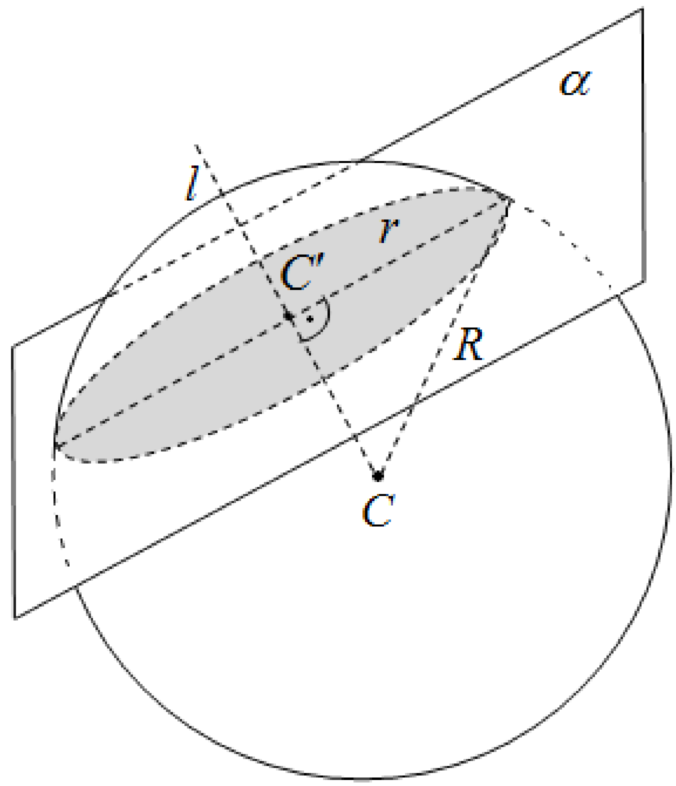
Пример 16.6. Намерете центъра и радиуса на окръжността k в тримерното пространство, определена относно ортонормирана координатна система от уравненията

$$k: \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 14y + 2z + 30 = 0 \\ 3x + y - z - 9 = 0. \end{array} \right.$$

Чрез метода на отделяне на точни квадрати установяваме, че първото уравнение е еквивалентно на

$$S: \ (x-4)^2 + (y-7)^2 + (z+1)^2 = 36.$$

Следователно това уравнение определя сфера S с център $C(4, 7, -1)$ и радиус $R = 6$.



Фиг. 16.1

За да намерим координатите на центъра C' на окръжността k, първо построяваме права l през центъра C на сферата S, която е перпендикулярна на равнината $\alpha : 3x + y - z - 9 = 0$, съдържаща окръжността.

Скаларно параметричните уравнения на правата l са следните

$$l: \left| \begin{array}{l} x = 4 + 3s \\ y = 7 + s \\ z = -1 - s. \end{array} \right.$$

Тогава C' е прободът на l и α, т. .е $C' = l \cap \alpha$.

Като решим системата от уравненията на правата l и равнината α, получаваме $C'(1, 6, 0)$. Остава да намерим радиуса r на окръжността k. Използваме, че $CC' \perp \alpha$ (виж Фиг. 16.1). От Питагоровата теорема имаме

$$|\overrightarrow{C'C}|^2 + r^2 = R^2.$$

Пресмятаме $\overrightarrow{C'C}(3, 1, -1)$, следователно $|\overrightarrow{C'C}| = \sqrt{11}$. Така получаваме $r = 5$.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.