Тема 15.

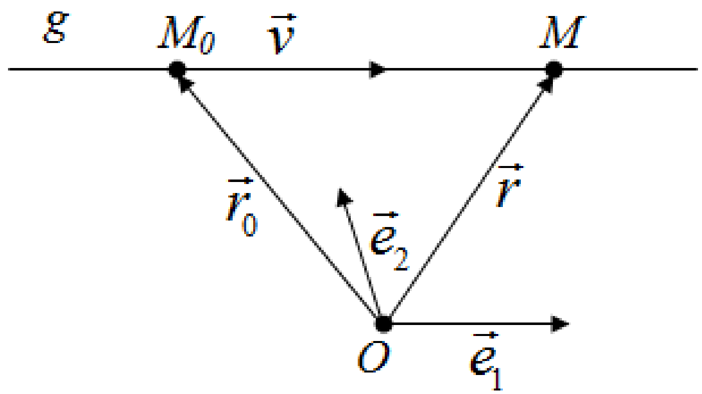
Уравнение на права в равнина. Уравнение на окръжност

1. Параметрични уравнения на права в равнина

Правата е множество от точки. Да се зададе една права означава да се даде правило (формула), чрез което може да бъде получена произволна точка от правата. Това правило се нарича *уравнения на правата.*

Един начин да се зададе права е чрез произволна точка от правата и произволен ненулев колинеарен на правата вектор.

Нека $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е координатна система в афинната равнина и g е произволна права. Нека са известни M_0 - произволна точка от g (която наричаме *фиксирана точка*) и $\vec{v}$ - произволен ненулев колинеарен на g вектор.



Фиг. 15.1

Тогава за произволна точка M от g (M се нарича *текуща точка*) е в сила следното представяне

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Означаваме $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$. Векторът $\vec{r}_0$ е радиус-векторът на т. M_0 и следователно е известен. Векторът $\overrightarrow{M_0M}$ е колинеарен на правата g и следователно на дадения вектор $\vec{v}$. Тогава съществува $\lambda \in \mathbb{R}$ така, че $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{v}$. По този начин получихме зависимостта

$$g: \ \vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{v}, \tag{15.1}$$

която се нарича *векторно параметрично уравнение* на правата g. При всеки избор на стойност за параметъра λ от (15.1) получаваме радиус-вектора на една точка от g. Следователно *всяка права е еднопараметрично множество от точки.*

Нека относно разглежданата координатна система $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ имаме $M(x, y)$, $M_0(x_0, y_0)$, $\vec{v}(a, b)$. Тогава векторното равенство (15.1) има следния координатен запис

$$g: \left| \begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b, \end{array} \right. \tag{15.2}$$

който се нарича *скаларно параметрично уравнение(-я)* на правата g.

Нека от всяко от двете уравнения (15.2) изразим параметъра λ. Имаме

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a}, \qquad \lambda = \frac{y - y_0}{b}.$$

Приравняваме десните страни на двете последни равенства, като пропускаме λ и така получаваме зависимостта

$$g: \; \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \; (= \lambda).$$

Горното равенство се нарича *канонично уравнение* на правата g.

Правата g е определена еднозначно, ако са зададени две произволни нейни точки. Нека $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ са точки то правата g. Тогава ако в (15.2) положим $M_0 = M_1$ и $\vec{v} = \overrightarrow{M_1 M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, получаваме

$$g: \; \left| \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2 - y_1), \end{array} \right.$$

което се нарича *скаларно параметрично уравнение на правата g, определена от две точки*. Разбира се, можем да положим $M_0 = M_2$.

Аналогично получаваме и *кононичното уравнение на правата* g, *определена от две точки*

$$g: \ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Пример 15.1. Намерете скаларно параметричното и канонично-то уравнението на:

а) правата g, минаваща през т. $A(1,-1)$, колинеарна на вектора $\vec{v}(2,3)$;

б) правата l, минаваща през т. $B(0,3)$ и успоредна на оста Ox;

в) правата p, минаваща през точките $M_1(-1,-1)$ и $M_2(1,5)$.

а)

$$g:\ \left|\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda, \end{array}\right. \qquad g:\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3};$$

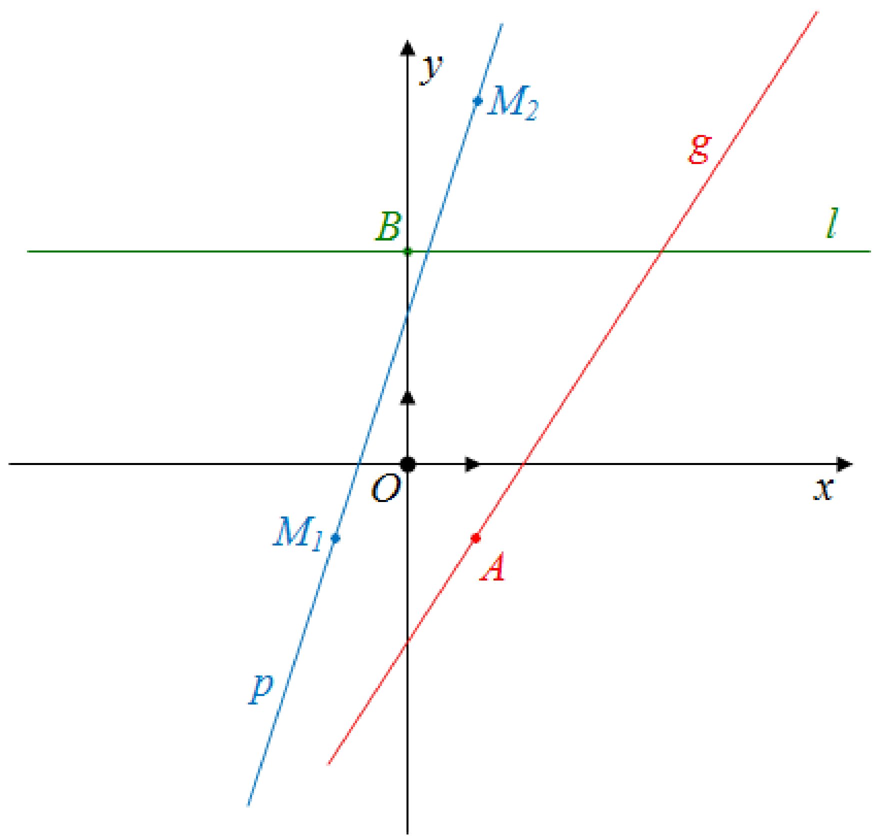
б) Тъй като правата l е успоредна на Ox, то следва, че един колинеарен вектор на тази права е векторът $\vec{e}_1(1,0) \parallel Ox$

$$l:\ \left|\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 3, \end{array}\right. \qquad l:\ \frac{x}{1} = \frac{y-3}{0};$$

в) Правата p е колинеарна на вектора $\overrightarrow{M_1M_2}(2,6) \parallel (1,3)$

$$p: \left| \begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = -1 + 3\lambda, \end{array} \right. \qquad\qquad p: \ \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{3}.$$

На фиг. 15.2 са изобразени тези три прави относно ортонормирана координатна система.



Фиг. 15.2

2. Общо уравнение на права в равнина

Каноничното уравнение на правата g

$$g:\ \frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$$

е еквивалентно на

$$g:\ b(x-x_0)-a(y-y_0)=0.$$

Ако положим $A=b$, $B=-a$, $C=ay_0-bx_0$, от горното уравнение получаваме

$$g:\ Ax+By+C=0,$$

което се нарича *общо уравнение* на правата g.

Векторът $\overrightarrow{q}(\lambda, \mu)$ е колинеарен на правата g, точно когато $\vec{q}$ е колинеарен на $\vec{v}(a, b) = (-B, A)$, т. е. точно когато

$$-\frac{\lambda}{B} = \frac{\mu}{A} \quad \Longleftrightarrow \quad A\lambda + B\mu = 0.$$

Разглежданията дотук бяха при произволна координатна система в равнината. Нека сега $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ е ортонормирана координатна система. Тогава векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ е ортогонален на правата g, тъй като е ортогонален на вектора $\vec{v} \parallel g$

$$\overrightarrow{N}\vec{v} = Aa + Bb = ba - ab = 0.$$

Векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ се нарича *нормален вектор на правата с общо уравнение* $g: \ Ax + By + C = 0.$

Тогава уравнението

$$g: \ A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

е уравнение на правата g през точка M_0 с нормален вектор $\overrightarrow{N}_g(A, B)$.

Пример 15.2. Намерете общото уравнение на правата p, минаваща през точките $M_1(-1,-1)$ и $M_2(1,5)$.

Векторът $\overrightarrow{M_1M_2}(2,6) \parallel (1,3)$ е колинеарен на p. Следователно нормалният вектор $\overrightarrow{N}_p$ на правата има координати $\overrightarrow{N}_p(3,-1)$. Тогава общото уравнение на правата p има вида

$$p:\ 3(x+1)-1(y+1)=0 \quad \Longrightarrow \quad p:\ 3x-y+2=0.$$

Теорема 15.1. *Ако е дадена правата* $g : Ax+By+C = 0$ *относно координатната система* $Oxy = O\vec{e}_1\vec{e}_2$*, то:*

1) g *минава през координатното начало* O*, точно когато* $C = 0$*, т. е.* $g : Ax + By = 0$;

2) $g \parallel Ox$*, точно когато* $A = 0$*, т. е.* $g : By + C = 0$;

3) $g \parallel Oy$*, точно когато* $B = 0$*, т. е.* $g : Ax + C = 0$;

4) $g \equiv Ox$*, точно когато* $A = C = 0$*, т. е.* $Ox : y = 0$;

5) $g \equiv Oy$*, точно когато* $B = C = 0$*, т. е.* $Oy : x = 0$.

Права g, минаваща през точка $M_0(x_0, 0)$ и успоредна на Oy, има уравнение $g : x = x_0$. Права g, минаваща през точка $M_0(0, y_0)$ и успоредна на Ox, има уравнение $g : y = y_0$. Тези прави образуват координатната мрежа в равнината.

3. Отрезово и декартово уравнение на права

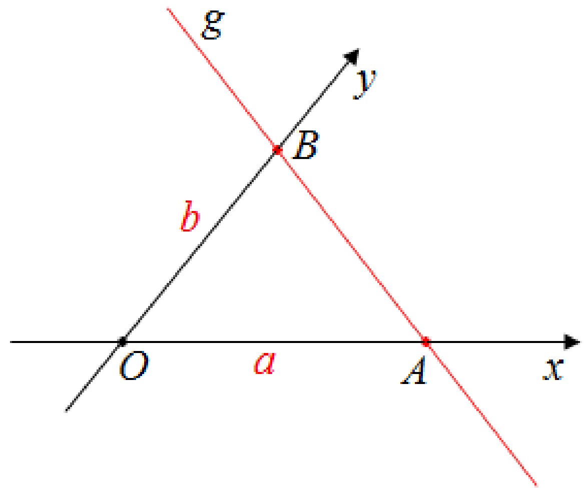
Нека построим каноничното уравнение на права g, минаваща през точките $A(a,0)$ и $B(0,b)$, $a,b \neq 0$. Съгласно получените дотук резултати, имаме

$$g:\ \frac{x-a}{-a} = \frac{y}{b}.$$

Горното уравнение е равносилно на

$$g:\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

което се нарича *отрезово уравнение* на правата g. Числата a и b се наричат *отрези на правата от координатните оси* (съответно от оста Ox и оста Oy).



Фиг. 15.3

Нека Oxy е ортонормирана координатна система и правата g : $Ax + By + C = 0$ не е успоредна на оста Ox, т. е. $B \neq 0$. В този случай можем да запишем общото ѝ уравнение във вида

$$g: \ \frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0 \quad \Longrightarrow \quad g: \ y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

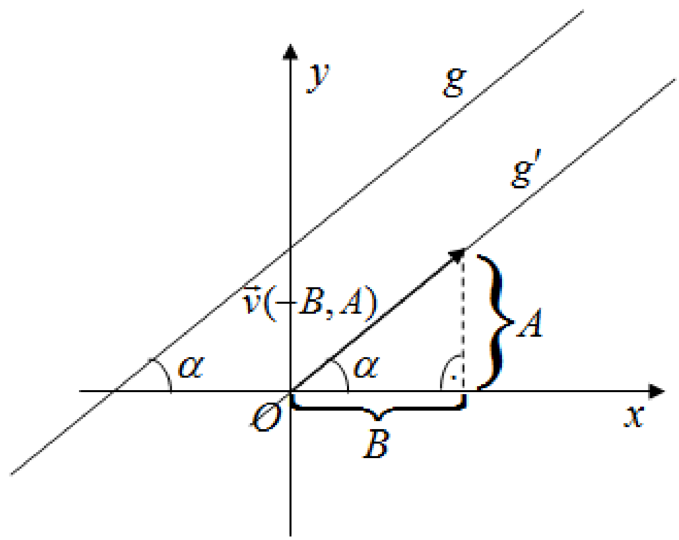
Нека положим $k = -\frac{A}{B}$, $n = -\frac{C}{B}$. Тогава получаваме уравнението

$$g: \ y = kx + n,$$

което се нарича *декартово уравнение на правата* g. Числото k се нарича *ъглов коефициент* на g и се определя от

$$k = \operatorname{tg}\alpha,$$

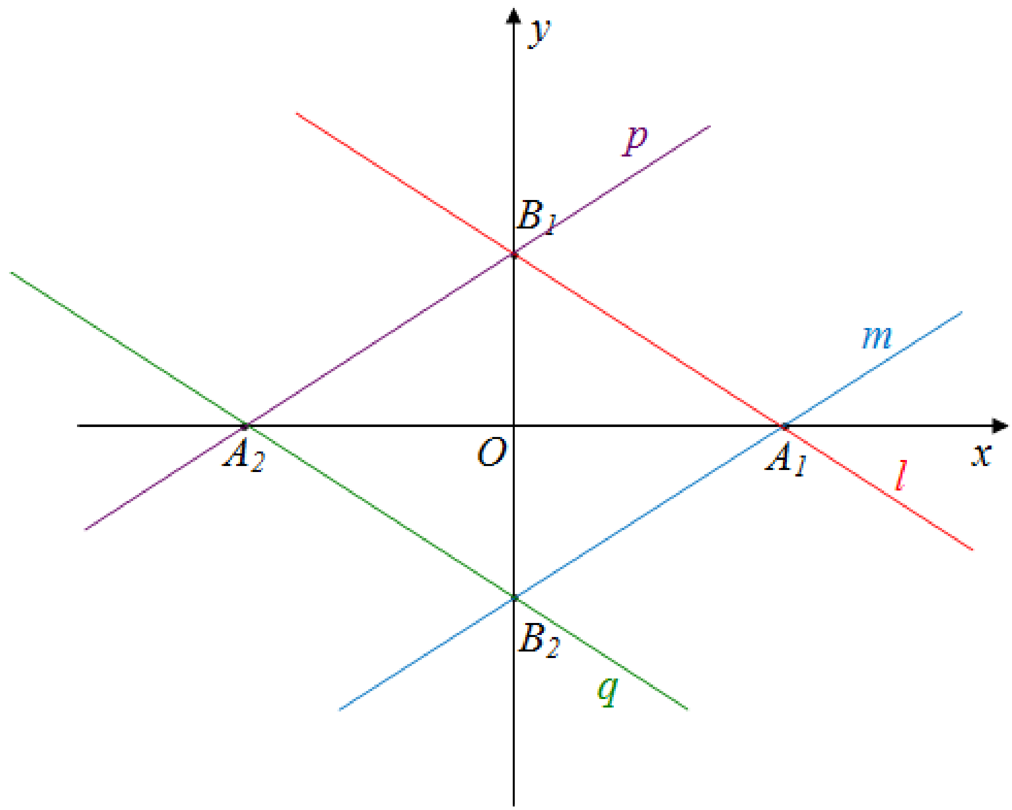
където α е ъгълът, който правата g сключва с положителната посока на абсцисната ос, т. е. $\alpha = \sphericalangle(g, Ox^+)$. Числото n се нарича *отрез на правата* g *от ординатната ос.*



Фиг. 15.4

Пример 15.3. Намерете общото уравнение на права, която отрязва от координатните оси Ox и Oy отсечки с дължини съответно 3 и 2.

Правите, които удовлетворяват това условие, са: l, минаваща през $A_1(3,0)$ и $B_1(0,2)$; m, минаваща през $A_1(3,0)$ и $B_2(0,-2)$; p, минаваща през $A_2(-3,0)$ и $B_1(0,2)$; и q, минаваща през $A_2(-3,0)$ и $B_2(0,-2)$. Тези прави са изобразени относно ортонормирана координатна система на фиг. 15.5.



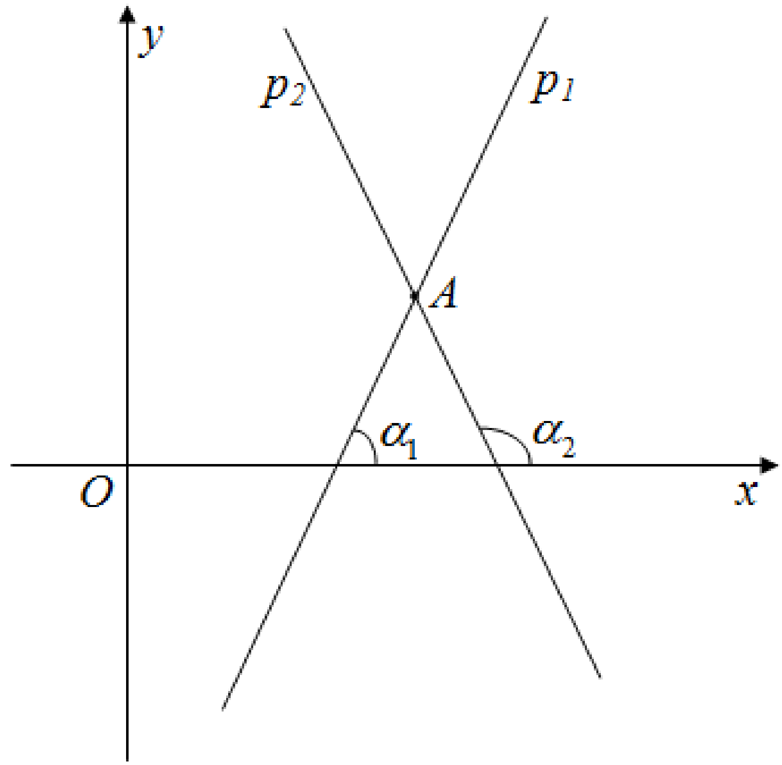
Фиг. 15.5

$$l: \ 2x + 3y - 6 = 0, \qquad m: \ 2x - 3y - 6 = 0,$$
$$p: \ 2x - 3y + 6 = 0, \qquad q: \ 2x + 3y + 6 = 0.$$

Пример 15.4. Намерете уравнението на права p, минаваща през точката $A(\sqrt{3}, 1)$, която сключва ъгъл 60° с оста Ox.

Декартовото уравнение на правата е $p : y = kx + n$. Ще намерим k и n. Използваме условието, че търсената права сключва ъгъл, равен на 60° с оста Ox. Тъй като не е указано, че този ъгъл се образува от правата p и положителната посока на Ox, трябва да разгледаме два случая: в първия случай $\alpha_1 = \sphericalangle(p, Ox^+) = 60^\circ$, а във втория $\sphericalangle(p, Ox^-) = 60^\circ$, т. е. $\alpha_2 = \sphericalangle(p, Ox^+) = 120^\circ$ (фиг. 15.6). В първия случай имаме $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \sqrt{3}$, а във втория $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 = -\sqrt{3}$. Така дотук получихме $p_1 : y = \sqrt{3}x + n_1$ и $p_2 : y = -\sqrt{3}x + n_2$. Сега заместваме координатите на т. A в уравненията на правите p_1 и p_2 и така получаваме, че отрезите на двете прави от оста Oy са съответно $n_1 = -2$ и $n_2 = 4$.

Окончателно правите $p_1 : y = \sqrt{3}x - 2$ и $p_2 : y = -\sqrt{3}x + 4$ са решения на задачата.



Фиг. 15.6

4. Взаимно положение на две прави. Сноп прави

Теорема 15.2. *Ако спрямо произволна координатна система са дадени правите*

$$g_1: \; A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$g_2: \; A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

тогава:

1) g_1 *и* g_2 *съвпадат, точно когато*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

2) g_1 *и* g_2 *са успоредни, точно когато*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2};$$

3) *g_1 и g_2 се пресичат, точно когато*

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

Доказателство. Нека разгледаме системата от уравненията на двете прави

$$\left| \begin{array}{l} g_1: \; A_1x + B_1y = -C_1 \\ g_2: \; A_2x + B_2y = -C_2. \end{array} \right. \tag{15.3}$$

Основната и разширената матрица на системата са съответно

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}, \qquad A^* = \left(\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1 & -C_1 \\ A_2 & B_2 & -C_2 \end{array} \right).$$

Условията за двете прави да съвпадат, да са успоредни или да се пресичат са еквивалентни съответно на следните условия за системата (15.3) - да е неопределена (има безброй много решения),

да е несъвместима (няма решения) или да е определена (има едно решение).
Системата (15.3) е неопределена, точно когато $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 1$. Това условие е еквивалентно на наличието на линейна зависимост между редовете на A^*, т. е. двата реда да са пропорционални, т. е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.
Системата (15.3) е несъвместима, точно когато $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A^*)$. Това е възможно само когато $\mathrm{rg}(A) = 1$, а $\mathrm{rg}(A^*) = 2$, т. е. редовете на A са пропорционални, но редовете на A^* не са линейно зависими, т. е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.
Системата (15.3) е определена, точно когато $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^*) = 2$, т. е. точно когато детерминантата на основната матрица е различна от нула. Това е изпълнено, точно когато $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. В този случай системата (15.3) е крамерова и единственото ѝ решение (пресечната точка на правите) се намира чрез формулите на Крамер,

както следва:

$$x = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \qquad y = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}.$$

Определение 15.1. Множеството от всички прави в равнината, минаващи през една точка, се нарича *сноп прави*, а дадената точка - *център на снопа.*

Теорема 15.3. *Нека*

$$g_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad g_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

са две различни прави от сноп с център точката S. Тогава всяка права от снопа има уравнение

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

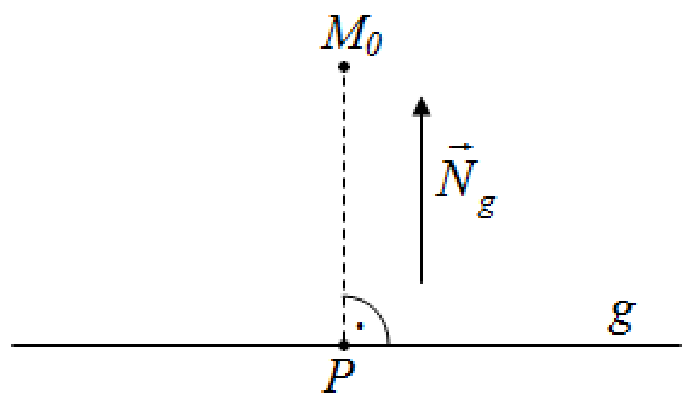
5. Разстояние от точка до права

Теорема 15.4. *Точките $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат в една и съща полуравнина относно правата $g : Ax + By + C = 0$, точно когато числата $g(M_1) = Ax_1 + By_1 + C$ и $g(M_2) = Ax_2 + By_2 + C$ имат еднакви знаци.*

Нека правата $g : Ax+By+C = 0$ е зададена относно ортонормирана координатна система. Тогава векторът $\overrightarrow{N}(A, B)$ е нормален за правата g. Единичният нормален вектор $\vec{n}$ се получава като

$$\vec{n} = \frac{\overrightarrow{N}}{|\overrightarrow{N}|} = (n_1, n_2) = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right).$$

Ще изведем формула за разстоянието $d(M_0, g)$ от точка $M_0(x_0, y_0)$ до правата g.



Фиг. 15.7

Нека P е ортогоналната проекция на M_0 върху g. Тогава съществува число δ така, че

$$\overrightarrow{PM_0} = \delta \vec{n}.$$

Следователно $d(M_0, g) = |\overrightarrow{PM_0}| = |\delta \vec{n}| = |\delta|.|\vec{n}| = |\delta|$, тъй като векторът $\vec{n}$ е единичен. Ако $P(p, q)$, то $\overrightarrow{PM_0}(x_0 - p, y_0 - q)$ и тогава

$$x_0 - p = \delta n_1, \qquad y_0 - q = \delta n_2,$$

откъдето следва $p = x_0 - \delta n_1$, $q = y_0 - \delta n_2$. Тъй като точката P лежи на правата g, то нейните координати удовлетворяват уравнението на правата, т. е.

$$Ap + Bq + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad A(x_0 - \delta n_1) + B(y_0 - \delta n_2) + C = 0.$$

От последното равенство следва

$$\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Тогава *разстоянието от точка* $M_0(x_0, y_0)$ *до правата* $g : Ax + By + C = 0$ се определя от формулата

$$d(M_0, g) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Числото δ се нарича *ориентирано разстояние от точка* $M_0(x_0, y_0)$ *до правата* g.

Пример 15.5. Нека относно ортонормирана координатна система Oxy в равнината са дадени правите

$$m : \left| \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \end{array} \right., \qquad p :\ 3x + 4y - 1 = 0.$$

Намерете точка M от правата m, която се намира на разстояние $d(M, p) = 2$ от правата p.

Тъй като $M \in m$, то тази точка трябва да има координати от вида $M(1+2\lambda, -1-\lambda)$. Ще намерим стойностите на параметъра λ, за които $d(M, p) = 2$.

Съгласно формулата за разстояние от точка до права имаме

$$d(M, p) = \frac{|3(1 + 2\lambda) + 4(-1 - \lambda) - 1|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|2\lambda - 2|}{5} = \frac{2}{5}|\lambda - 1|.$$

Тогава $d(M, p) = 2$, точно когато

$$|\lambda - 1| = 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = -4.$$

След заместване на получените стойности за параметъра λ в уравнението на правата m, получаваме двете точки от тази права, които удовлетворяват условието на задачата: $M_1(13, -7)$ и $M_2(-7, 3)$.

Пример 15.6. Намерете уравненията на всички прави от снопа прави с център точката $S(1,-1)$, които са на разстояние $\frac{\sqrt{2}}{2}$ от точката $M(2,-1)$.

Можем да зададем всяка права от снопа, ако знаем уравненията на две произволни прави от този сноп. Най-удобно е да използваме правите, минаващи през центъра на снопа $S(1,-1)$, които са успоредни на координатните оси. Това са правите $s_1 : x = 1$ и $s_2 : y = -1$. Общите им уравнения са съответно $s_1 : x - 1 = 0$ и $s_2 : y + 1 = 0$. Тогава произволна права l от разглеждания сноп има уравнение от вида

$$l: \ \lambda(x-1) + \mu(y+1) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0).$$

Следователно общото уравнение на l е

$$l: \ \lambda x + \mu y + (\mu - \lambda) = 0.$$

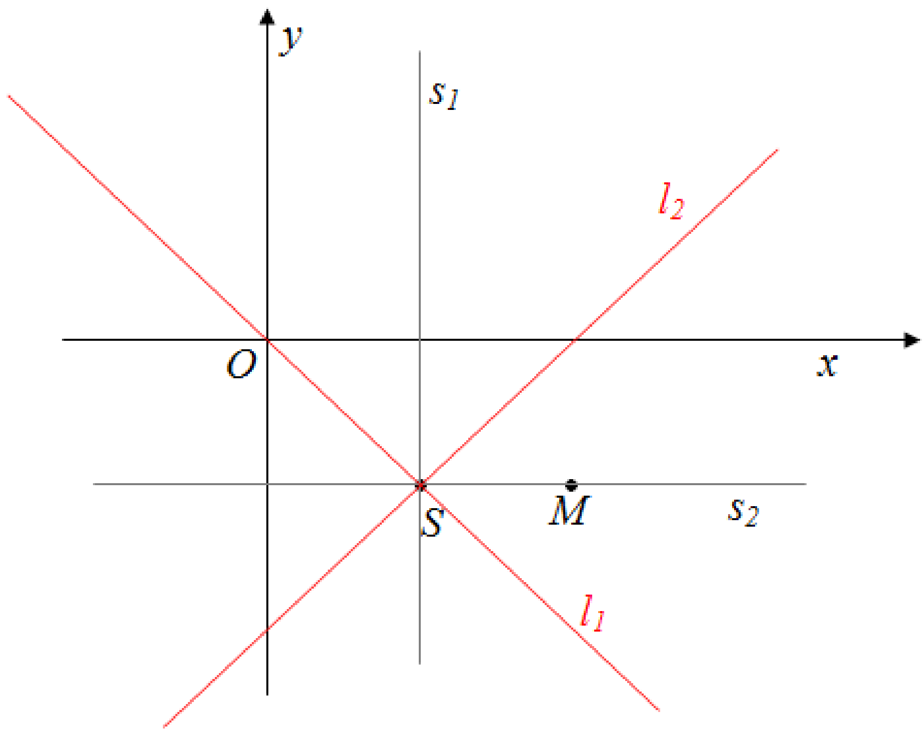
От условието $d(l, M) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ получаваме

$$d(l, M) = \frac{|2\lambda - \mu + \mu - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

След повдигане на квадрат горното равенство е еквивалентно на уравнението $\lambda^2 - \mu^2 = 0$, чиито решения са $\lambda = \mu$ и $\lambda = -\mu$. Заместваме тези решения в общото уравнение на l и така получаваме двете прави l_1 и l_2, които удовлетворяват условието на задачата:

$$l_1 : \; x + y = 0, \qquad\qquad l_2 : \; x - y - 2 = 0.$$

В горните уравнения сме разделили на λ или μ, тъй като $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. Получените прави са изобразени на фиг. 15.8.



Фиг. 15.8

Ъглополовящата на един ъгъл в равнината е множеството от точки, равноотдалечени от раменете на ъгъла. Лесно се съобразява, че ъглополовящата на единия от ъглите между две пресичащи се прави е множеството от точки, чиито ориентирани разстояния до правите са с еднакви знаци, а на другия ъгъл се състои от точките с различни по знак ориентирани разстояния до тези прави.

Ако са дадени пресичащите се прави

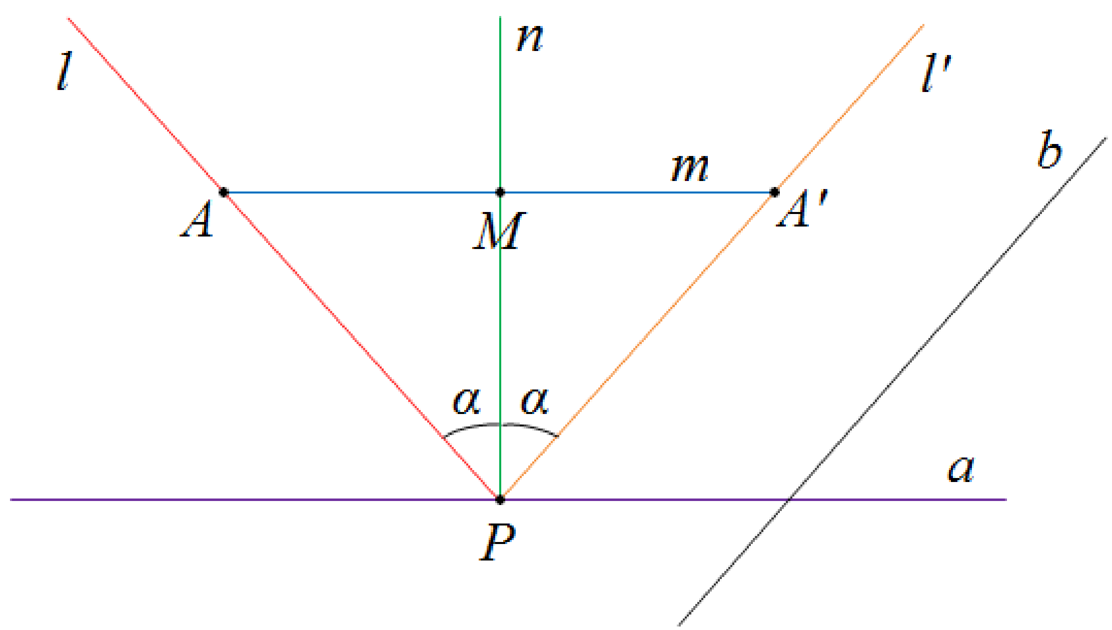
$$g_1 : \ A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad g_2 : \ A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то ъглополовящите на ъглите между тях са правите

$$l_1 : \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},$$

$$l_2 : \frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Пример 15.7.(Държавен изпит, Софийски университет, 2006г.) Светлинен лъч в равнината с начало точката $A(-\frac{1}{2}, 3)$ след отразяването си от правата $a : 3x - 4y + 1 = 0$ става успореден на правата $b : 10x - 5y + 1 = 0$. Намерете уравненията на падащия лъч l и отразения l'.



Фиг. 15.9

Падащият лъч l, отразеният лъч l' и правата n, перпендикулярна на a (нормалата на a), минават през една и съща точка P от правата a. Удобно е да представим координатите на т. P като функции на една променлива. Затова от общото уравнение на a преминаваме към скаларно параметричното. Нормалният вектор на a има координати $\overrightarrow{N}_a(3, -4)$, следователно един колинеарен вектор на a е $\vec{a}(4, 3)$. Една точка от правата a е, например, т. $B(1, 1)$ (след проверка в уравнението на a непосредствено се установява, че координатите на B удовлетворяват това уравнение). Тогава скаларно параметричното уравнение на правата a е

$$a : \left| \begin{array}{l} x = 1 + 4s \\ \\ y = 1 + 3s, \end{array} \right.$$

където s е реален параметър (параметърът на правата).

Следователно точката P има координати $P(1 + 4s, 1 + 3s)$.

Ъгълът на падане α на лъча l е равен на ъгъла на отразяване. Следователно нормалата на n е ъглополовяща на ъгъла между правите l и l'. Тогава, ако т. A' е ортогонално симетричната т. A (от падащия лъч l) относно n, то A' лежи на отразения лъч l'. Пресечната точка M на правата $m = AA'$ с правата n е среда на отсечката AA'.

Намираме уравнението на правата m през т. A и перпендикулярна на n (т.е. успоредна на a). Нормалният вектор на m е нормален и за a, т.е. $\overrightarrow{N}_m(3, -4)$. Следователно

$$m:\ 3(x+\frac{1}{2}) - 4(y-3) = 0$$

или окончателно

$$m:\ 6x - 8y + 27 = 0.$$

Построяваме и уравнението на правата n, минаваща през т. P и перпендикулярна на a. Колинеарният вектор $\vec{a}(4,3)$ на правата a е нормален за n. Следователно

$$n:\ 4(x-1-4s)+3(y-1-3s)=0,$$

т.е.

$$n:\ 4x+3y-7-25s=0.$$

Решавайки системата от уравненията на двете прави m и n, намираме координатите на пресечната им точка M. Получаваме $M(\frac{8s-1}{2}, 3+3s)$. Сега отчитаме, че M е среда на отсечката AA'. Следователно $M=\frac{1}{2}(A+A')$, откъдето получаваме $A'=2M-A$. Така за координатите на т. A' намираме $A'(8s-\frac{1}{2}, 6s+3)$.

Точката A' лежи на правата l', която минава през т. P и е успоредна на правата b (съгл. условието на задачата). Построяваме уравнението на l'

$$l': \ 10(x-1-4s)-5(y-1-3s)=0.$$

Така намираме

$$l': \ 2x-y-1-5s=0.$$

Координатите на т. A' трябва да удовлетворяват уравнението на l'. Следователно след заместването им в уравнението на правата l' получаваме следното уравнение за параметъра s

$$5s-5=0,$$

откъдето $s=1$, т.е. при $s=1$ от уравнението на правата a се получават координатите на т. P. След заместване на $s=1$ в скаларно параметричното уравнение на правата a получаваме $P(5,4)$. Сега вече можем да намерим уравненията на правите l и l'. Построяваме правата l по двете точки, през които знаем, че минава - т. A и т. P и така намираме

$$l:\ 2x - 11y + 34 = 0.$$

В уравнението на правата l' заместваме $s = 1$ и получаваме

$$l':\ 2x - y - 6 = 0.$$

6. Уравнение на окръжност в равнина

Окръжност е множество от точки в равнината, равноотдалечени от дадена точка. Тази точка се нарича *център на окръжността*, а разстоянието от точките върху окръжността до нея - *радиус на окръжността*.

Нека относно ортонормирана координатна система е дадена точка $C(a, b)$ и числото $r > 0$. Нека $M(x, y)$ е произволна точка, лежаща върху окръжността k с център C и радиус r. Тогава $|\overrightarrow{CM}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$. Като повдигнем последното равенство на квадрат получаваме уравнението

$$k: \ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2, \tag{15.4}$$

което се нарича *общо уравнение на окръжност с център* $C(a, b)$ *и радиус* r.

Подробният запис на (15.4) е

$$k: \ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 = r^2.$$

От (15.4) се вижда, че уравнението на окръжност, за разлика от уравнението на права, не е линейна, а квадратна зависимост между променливите x и y.

От друга страна обаче не всяко квадратно уравнение на променливите x и y, т. е. уравнение от вида

$$c: \ a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

задава окръжност (горното уравнение задава крива от втора степен, която може да бъде елипса, хипербола или парабола, или друг вид крива). За да бъде кривата c окръжност, тя трябва да е от вида

$$x^2 + y^2 + mx + ny + l = 0, \tag{15.5}$$

т. е. $a_{11} = a_{22} \neq 0$ и $a_{12} = 0$. Освен тези две условия трябва да бъде изпълнено и още едно условие, което е следствие от $r > 0$.

В равенството (15.5) отделяме точни квадрати, както следва

$$x^2 + 2\frac{m}{2}x + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{4} + y^2 + 2\frac{n}{2}y + \frac{n^2}{4} - \frac{n^2}{4} + l = 0.$$

От горното равенство получаваме

$$\left(x + \tfrac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \tfrac{n}{2}\right)^2 = \tfrac{m^2}{4} + \tfrac{n^2}{4} - l. \tag{15.6}$$

Следователно третото условие за уравнението (15.5) да бъде уравнение на окръжност е

$$\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - l > 0.$$

Тогава, ако сравним уравнението (15.6) с (15.4) следва, че за центъра C и радиуса r на окръжността, определена от (15.6), е в сила:

$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right), \qquad r = \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - l}.$$

Пример 15.8. Уравнението

$$c_1: \ 3x^2 - 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$$

не задава окръжност.

Уравнението

$$c_2: \ x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$$

определя окръжност с център $C(-1, 5)$ и радиус $r = 5$.

Уравнението

$$c_3: \ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 6 = 0$$

задава *имагинерна окръжност* с реален център $C(-1, 1)$ и имагинерен радиус $r = 2i$.

Пример 15.9. Да се намери уравнението на окръжност k през точките $A(2,-2)$, $B(7,3)$, $D(5,-1)$.

Геометричен подход. Един начин да решим задачата е да построим два диаметъра на търсената окръжност и намирайки пресечната им точка, да получим координатите на центъра на k.

Нека M и N са среди съответно на хордите AB и BD. Тогава $M(\frac{9}{2},\frac{1}{2})$ и $N(6,1)$. През всяка от точките M и N построяваме права, перпендикулярна на съответната хорда. Следователно построените прави са диаметри на k.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.