Тема 13.

Решаване на системи линейни уравнения чрез метода на Гаус. Матрични уравнения. Приложение и практически задачи

Карл Гаус (1777-1855)

1. Метод на Гаус

Удобен и **универсален** метод за решаване на системи линейни уравнения е *методът на Гаус* (*метод на последователното изключване на неизвестните*).

Нека отново разгледаме системата

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \tag{13.1}$$

Върху разширената ѝ матрица $\bar{A}$ прилагаме елементарни преобразувания **по редовете**, а **стълбовете ѝ можем само да разместваме** (размяната на местата на стълбовете i и j е еквивалентно на размяната на неизвестните x_i и x_j).

С помощта на тези преобразувания привеждаме $\bar{A}$ в трапецовидна форма

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
c_{11} & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1r} & ... & c_{1n} & d_1 \\
0 & c_{22} & c_{23} & ... & c_{2r} & ... & c_{2n} & d_2 \\
0 & 0 & c_{33} & ... & c_{3r} & ... & c_{3n} & d_3 \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & c_{rr} & ... & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & d_{r+1} \\
... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\
0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & d_m
\end{array}\right), \qquad (13.2)$$

където $c_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, ..., r$. Оттук се вижда, че системата (13.1) е съвместима, точно когато $d_{r+1} = d_{r+2} = ... = d_m = 0$.

На всяко елементарно преобразувание на разширената матрица $\bar{A}$ съответства преобразуване на системата, която я привежда в еквивалентна форма. Тези преобразувания са

по редовете:

• разместване на местата на два реда (две уравнения)

• умножаване на даден ред (дадено уравнение) с ненулево число

• прибавяне на ред (уравнение), умножен с число, към друг ред (друго уравнение)

по стълбовете:

• разместване на местата на два стълба (две неизвестни едновременно във всички уравнения).

В случай на съвместимост системата (13.1) е еквивалентна на системата

$$\left| \begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1r}x_r + \ldots + c_{1n}x_n &= d_1 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2r}x_r + \ldots + c_{2n}x_n &= d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_{rr}x_r + \ldots + c_{rn}x_n &= d_r. \end{aligned} \right. \tag{13.3}$$

Като започнем от последното уравнение определяме последователно неизвестните $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_2, x_1$ чрез параметрите $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

Пример 13.1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5. \end{array} \right.$$

Системата е еквивалентна на разширената си матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 5 \end{array} \right).$$

Вместо да работим с уравненията в системата, работим с редовете на $\bar{A}$.

Започваме с елементарни преобразувания по редовете на $\bar{A}$, с помощта на които ще изключим неизвестното x_1 от всички уравнения след първото, т.е. от второто и третото уравнение на системата. За тази цел е удобно елементът в първи ред и първи стълб на $\bar{A}$ (коефициентът пред x_1 в уравнението, което номерираме като първо) да бъде единица.

Прибавяме първия ред на $\bar{A}$, умножен предварително с (-2), към втория ред и умножен предварително с (-4) - към третия ред. Така получаваме еквивалентната матрица (система)

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ \color{red}{2} & 1 & 1 & -1 & 4 \\ \color{red}{4} & 2 & 3 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 1 & -3 \end{array}\right).$$

Сега ще изключим неизвестното x_2 от всички уравнения след второто, т.е. в нашия случай само от третото уравнение. За тази цел прибавяме втория ред, умножен предварително с (-2), към третия. След това бихме могли да умножим втория ред с $\frac{1}{3}$ за улесняване на изчисленията.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & {\color{red}6} & -5 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -3 \end{array}\right).$$

Матрицата $\bar{A}$ е приведена вече в трапедовидна форма. От последния вид на $\bar{A}$ се вижда, че $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(\bar{A}) = 3$. Следователно системата е съвместима. Тъй като рангът на системата 3 е по-малък от броя на неизвестните, който е 4, то системата е неопределена и решението ѝ се описва с помощта на един параметър. Нека този параметър е $x_4 = p$. Сега се връщаме обратно от последния получен матричен запис на $\bar{A}$ към еквивалентната му система ли-

нейни уравнения и изразяваме последователно неизвестните чрез параметъра $x_4 = p$.
Последният ред на матрицата е еквивалентен на уравнението

$$x_3 + 7x_4 = -3,$$

откъдето изразяваме неизвестното $x_3 = -7x_4 - 3 = -7p - 3$.

От втория ред имаме

$$x_2 - x_3 - x_4 = 0,$$

следователно $x_2 = x_3 + x_4 = -6p - 3$.

От първият ред получаваме

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,$$

откъдето изразяваме и $x_1 = 7p + 5$.

Окончателно решенията на системата са

$$(x_1 = 7p+5, \quad x_2 = -6p-3, \quad x_3 = -7p-3, \quad x_4 = p), \quad p \in \mathbb{R}.$$

Една разновидност на метода на Гаус за крамерови системи е методът на Гаус-Жордан, разработен от немския геодезист Вилхелм Жордан. Този метод е аналогичен на метода на Гаус-Жордан за намиране на обратна матрица.

Отново се работи с разширената матрица на системата $\bar{A}$. Чрез елементарни преобразувания върху редовете първо се преобразуват в нулеви елементите под главния диагонал на основната матрица на системата, като елементите в самия главен диагонал трябва да се превърнат в единици. След това се анулират и елементите над главния диагонал. По този начин основната матрица на системата се превръща в единичната матрица

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{array}\right).$$

Тогава стълбът от получените чрез тези преобразувания свободни членове съдържа единственото решение на системата, т. е. $(x_1 = d_1, x_2 = d_2, ..., x_n = d_n)$.

Недостатъкът на тази разновидност на метода на Гаус в сравнение със самия метод е, че той изисква прилагане на до 50% повече елементарни преобразувания върху $\bar{A}$. Затова практическото му приложение се свежда главно до използването му за намиране на обратна матрица.

За неопределени системи може да се прилага комбинация от двата метода.

Ще решим системата линейни уравнения от Пример 12.1

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1, \end{array}\right.$$

като използваме метода на Гаус-Жордан.

Следва поредица от елементарни преобразувания над редовете на $\bar{A}$, чрез които от $\bar{A} = (A|b)$ получаваме еквивалентната ѝ матрица $(E|d)$, където E е единичната матрица, а d е стълбът, съдържащ решението на системата.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & {\color{red}-6} & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & {\color{red}2} & 2 \\ 0 & 1 & {\color{red}-4} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Следователно решението на системата е

$$(x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = \tfrac{3}{2}).$$

2. Матрични уравнения

Уравнения от вида

$$AX = B, \qquad XA = B, \tag{13.4}$$

където матриците A и B са дадени, а матрицата X е неизвестна, се наричат *матрични уравнения.*

Ако A е неособена квадратна матрица от тип $(n \times n)$ ($\det A \neq 0$), а B е матрица от тип $(n \times s)$ за първото уравнение на (13.4) и от тип $(s \times n)$ - за второто уравнение на (13.4), то и за двете уравнения X е матрица от същия тип като B и се получава съответно чрез

$$X = A^{-1}B, \qquad X = BA^{-1}.$$

Ако матрицата A не е квадратна или $\det A = 0$, то A^{-1} не съществува. В такива случаи, за да се реши матричното уравнение (13.4), първо се извършва матричното умножение (съответно

AX или XA) и след сравняване на матриците от двете страни на уравнението се решава получената система.

Пример 13.2. Да се решат матричните уравнения

$$1) \qquad AX = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$2) \qquad XA = B, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1) За матрицата A е изпълнено $\det A = -2 \neq 0$, следователно съществува A^{-1} и тя има вида

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Тогава X получаваме като умножим двете страни на уравнението с A^{-1} отляво, т. е.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Първо установяваме, че $\det A = 0$. Тъй като A е матрица от тип (2×2), а B - от тип (3×2), то и X трябва да е от тип (3×2). Следователно матрицата X се състои от шест елемента

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix},$$

където x_i, $i = 1, 2, ..., 6$, са неизвестни. Извършваме умножението XA, както следва

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_4 \\ x_2 & x_5 \\ x_3 & x_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_4 & 2x_1 + 4x_4 \\ x_2 + 2x_5 & 2x_2 + 4x_5 \\ x_3 + 2x_6 & 2x_3 + 4x_6 \end{pmatrix}$$

и сравняваме получената матрица с B. Така достигаме до следната система линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} & x_1 + 2x_4 = 1 \\ & 2x_1 + 4x_4 = 2 \\ & x_2 + 2x_5 = 3 \\ & 2x_2 + 4x_5 = 6 \\ & x_3 + 2x_6 = 2 \\ & 2x_3 + 4x_6 = 4. \end{aligned} \right.$$

Първите две, вторите две и третите две уравнения са линейно зависими помежду си. Следователно системата се свежда до следната система три уравнения и шест неизвестни:

$$\left| \begin{array}{l} x_1 + 2x_4 = 1 \\ x_2 + 2x_5 = 3 \\ x_3 + 2x_6 = 2. \end{array} \right.$$

Ако изберем $x_4 = p$, $x_5 = q$ и $x_6 = s$ за параметри, получаваме $x_1 = 1 - 2p$, $x_2 = 3 - 2q$ и $x_3 = 2 - 2s$. По този начин намерихме

$$X = \begin{pmatrix} 1 - 2p & p \\ 3 - 2q & q \\ 2 - 2s & s \end{pmatrix}, \quad p, q, s \in \mathbb{R}.$$

Пример 13.3. (Задачата е дадена на Държавен изпит за спец. Математика, 2010г.) Решете системата в зависимост от стойностите на реалния параметър a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ a & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-1 \\ -6a \\ a-3 \end{pmatrix}.$$

Използвайки метода на Гаус, последователно получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a-1 \\ a & -1 & 1 & -6a \\ 3 & 5 & 3a & a-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a-1 \\ 0 & -1-2a & 1-a^2 & -a(6+a) \\ 0 & -1 & 0 & -2a \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & a-1 \\ 0 & 1 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 3a(a-1) \end{array}\right)$$

Рангът на системата се изменя в зависимост от стойностите на параметъра a. Имаме следните три случая:

- при $a = -1$ рангът на основната матрица на системата е равен на 2, а този на разширената е 3. Следователно системата няма решение.

- при $a = 1$ ранговете на основната и разширената матрица са равни на 2, т.е. рангът на системата е 2 (рангът не е максимален) и следователно системата се решава с 1 параметър. Общото решение в този случай може да бъде записано в следния вид

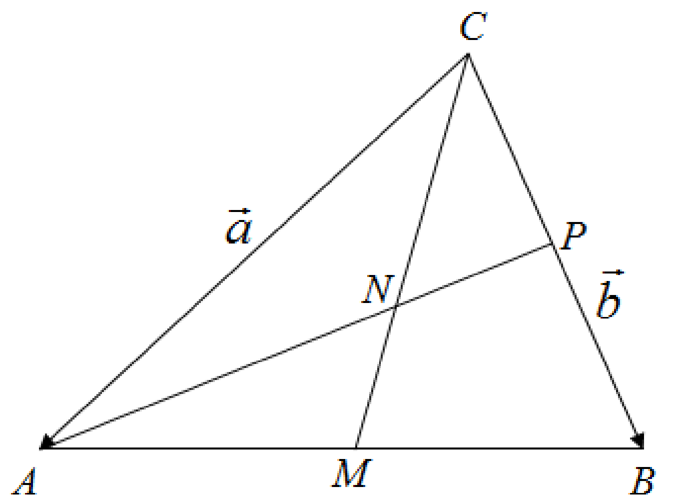
$$x = -4 - p, \qquad y = 2, \qquad z = p, \qquad p \in \mathbb{R}.$$

- при $a \neq \pm 1$ системата има максимален ранг (т.е. рангът е равен на 3) и следователно е крамерова, т.е има единствено решение

$$x = -\frac{4a+1}{a+1}, \qquad y = 2a, \qquad z = -\frac{3a}{a+1}.$$

Пример 13.4. *Приложение на СЛУ в аналитичната геометрия.* Ще изброим някои от приложенията на СЛУ в аналитичната геометрия: намиране на пресечна точка на две прави, пресечница на две равнини, пресечна точка на права и равнина и др. Тези приложения ще разгледаме в следващите теми, а тук ще се спрем на една задача, която може да бъде решена с помощта на теоремата на Талес, теоремите на Чева и Ван Обел или чрез метода на базите (или координатните системи), който ние ще приложим.

Даден е $\triangle ABC$. Точка M е среда на AB, т. N лежи на CM, като $CN : NM = 3 : 2$, а P е пресечната точка на AN и BC. Намерете отношението $BP : PC$.



Първо избираме два линейно независими вектора за база в равнината на $\triangle ABC$. Нека това бъдат векторите $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$.

Векторите $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{CB}$ са колинеарни, т. е.

$$\overrightarrow{CP} = x.\overrightarrow{CB} = x.\vec{b}. \tag{13.5}$$

Сега ще получим второ представяне на вектора $\overrightarrow{CP}$ относно избраната база.

От друга страна

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \overrightarrow{AP}. \qquad (13.6)$$

Векторите $\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{AN}$ са колинеарни и следователно

$$\overrightarrow{AP} = y.\overrightarrow{AN} = y.\left(\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{CA}\right) = y.\left(\overrightarrow{CN} - \vec{a}\right). \qquad (13.7)$$

Имаме $CN : NM = 3 : 2$, откъдето получаваме $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM}$, а тъй като M е среда на отсечката AB, то следва, че

$$\overrightarrow{CN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CM} = \frac{3}{10}\left(\vec{a} + \vec{b}\right).$$

Тогава след заместване на $\overrightarrow{CN}$ от последното равенство в (13.7) имаме

$$\overrightarrow{AP} = \frac{y}{10}\left(3\vec{b} - 7\vec{a}\right).$$

Сега от горното равенство и (13.6) получаваме

$$\overrightarrow{CP} = \vec{a} + \frac{y}{10}\left(3\vec{b} - 7\vec{a}\right) = \frac{10-7y}{10}\vec{a} + \frac{3y}{10}\vec{b}. \qquad (13.8)$$

Тъй като $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ е база, то всеки вектор се представя еднозначно като линейна комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следователно коефициентите пред еднаквите вектори в (13.5) и (13.8) трябва да бъдат равни. Така получаваме системата

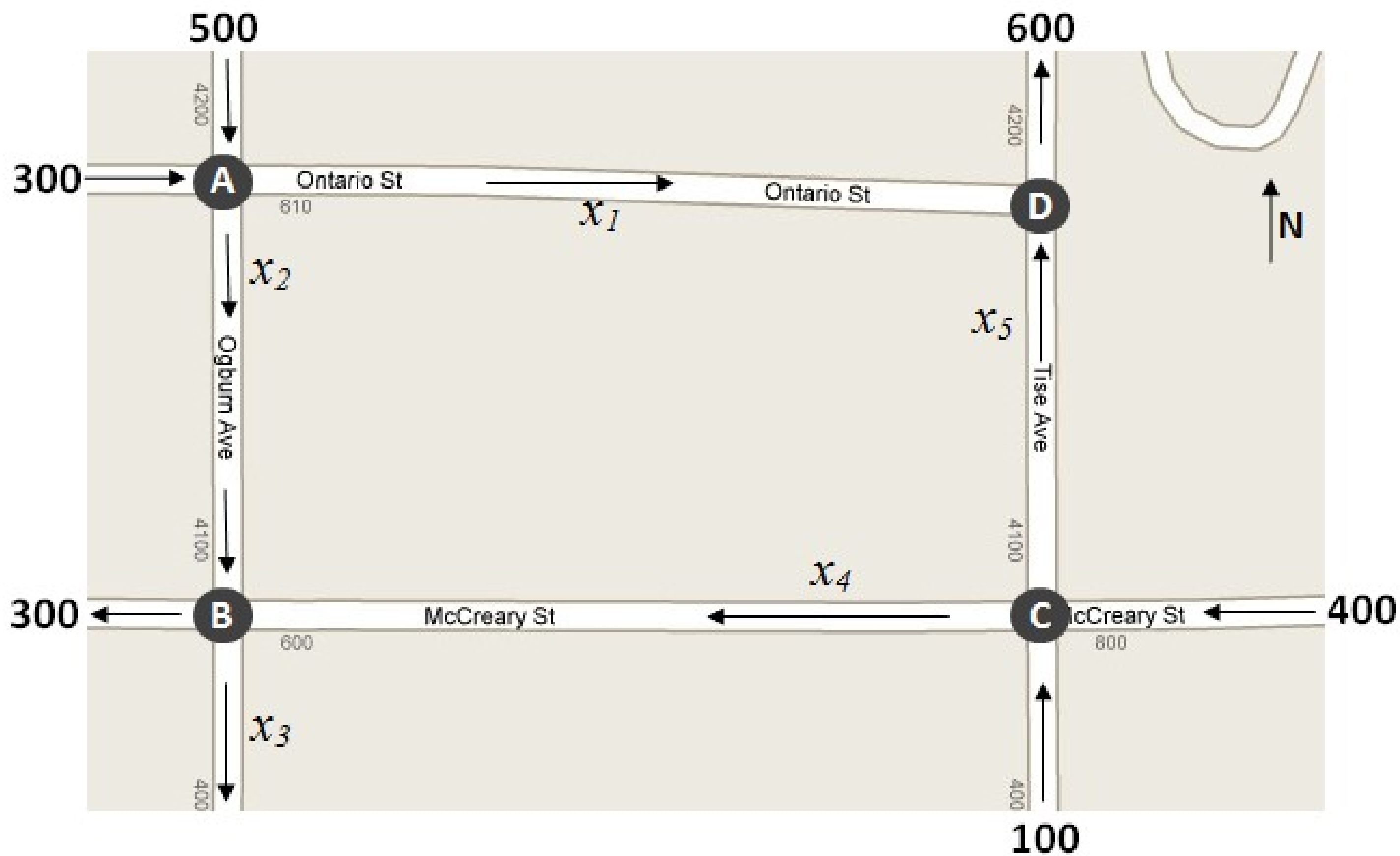
$$\left| \begin{array}{l} \frac{10-7y}{10} = 0 \\ \frac{3y}{10} = x, \end{array} \right.$$

чието решение е $\left(x = \frac{3}{7}, y = \frac{10}{7}\right)$. От (13.5) следва, че $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CB}$, т. е. $BP : PC = 4 : 3$.

Пример 13.5. *Приложение на СЛУ за управляване на потоци в мрежи (транспортни мрежи, електрически вериги и др.)* Всяка мрежа се състои от възли и връзки между възлите, по които потокът тече с указана посока и количеството през всеки възел (за единица време). Такава структура се нарича още насочен граф. Задачата на анализа на мрежи е да се определи потокът през всеки възел, ако е налична само част от информацията (като например, количеството на входящия поток).

Правилото, което се прилага при анализа на потока в транспортна мрежа е следното: количеството на входящия и изходящия поток през всеки възел, както и за мрежата като цяло, трябва да бъде еднакво.

Нека разгледаме част от транспортната мрежа на град Грийнсбъро, Северна Каролина, САЩ, показана на фиг. 13.1. Количеството на потока е на моторни превозни средства за един час. За простота на модела предполагаме, че всички разглеждани улици са еднопосочни. Ще определим потока през всеки възел при наличните данни.



Фиг. 13.1

Възел	Входящ поток	Изходящ поток
A	800	$x_1 + x_2$
B	$x_2 + x_4$	$x_3 + 300$
C	500	$x_4 + x_5$
D	$x_1 + x_5$	600

Освен това количеството на входящия и изходящия поток на цялата мрежа, които се равняват съответно на 1300 и x_3+900, трябва да бъдат равни помежду си.

Съставяме системата линейни уравнения от пет уравнения (условия) за петте неизвестни x_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$,

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 800 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 300 \\ x_4 + x_5 = 500 \\ x_1 + x_5 = 600 \\ x_3 = 400. \end{array}\right.$$

Решението на горната система е

$$x_1 = 600 - x_5, \quad x_2 = 200 + x_5, \quad x_3 = 400, \quad x_4 = 500 - x_5,$$
$$x_5 \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Сега можем да анализираме получените резултати.

Тъй като улиците са еднопосочни, стойността на всеки поток трябва да е положителна. Това налага ограничения върху стойността на параметъра x_5: $0 \leq x_5 \leq 500$.

Освен това, тъй като x_5 е параметър (степен на свобода), частта от улицата, на която съответства x_5 (Tise Avenue), може да бъде затворена, без да се наруши целия поток. Обаче това не важи за частта от модела, съответстваща на x_3, тъй като имаме $x_3 = 400$, т. е. фиксирана стойност за този поток.

Пример 13.6. *Приложение на СЛУ за изравняване (балансиране) на химични уравнения.* Известен е законът за запазване на масата - в резултат на химичните реакции не се разрушават съществуващи вече атоми и не се образуват нови.

Нека разгледаме процеса на окисляване на амоняка до азотен окис и вода

$$NH_3 + O_2 \longrightarrow NO + H_2O.$$

Записано в този вид горното уравнение не е вярно, тъй като количествата на атомите на изходните вещества в реакцията - азот (N), кислород (O) и водород (H), не са равни на количествата на същите атоми в продуктите на реакцията. Затова нека

$$(x_1)NH_3 + (x_2)O_2 \longrightarrow (x_3)NO + (x_4)H_2O.$$

Задачата ни е да намерим най-малката възможна цяла положителна стойност на количествата вещества x_1, x_2, x_3, x_4 така, че уравнението да бъде балансирано. За тази цел приравняваме количествата атоми от двете страни на уравнението

$$\begin{aligned} N: &\quad x_1 = x_3 \\ H: &\quad 3x_1 = 2x_4 \\ O: &\quad 2x_2 = x_3 + x_4. \end{aligned}$$

По този начин получаваме системата хомогенни линейни уравнения

$$\left| \begin{aligned} & x_1 - x_3 = 0 \\ & 3x_1 - 2x_4 = 0 \\ & 2x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

Решаваме получената система чрез метода на Гаус

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вторият ред на последната матрица е еквивалентен на уравнението

$$3x_3 - 2x_4 = 0.$$

Полагаме $x_4 = p$ и получаваме $x_3 = \frac{2p}{3}$. След това от третия ред намираме $x_2 = \frac{5p}{6}$, а от първия $x_1 = \frac{2p}{3}$. Така установихме, че общото решение на системата е

$$\left(\frac{2p}{3}, \frac{5p}{6}, \frac{2p}{3}, p\right).$$

При $p = 6$ получаваме най-малкото възможно целочислено решение на системата, което е $(4, 5, 4, 6)$, т. е.

$$4NH_3 + 5O_2 \longrightarrow 4NO + 6H_2O.$$

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.