Тема 11.

Ранг на система от вектори, матрица и линейно преобразуване

1. Ранг на система от вектори

Определение 11.1. Нека V е векторно пространство и $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е система от вектори на V. ***Ранг на системата*** $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ се нарича максималният брой линейно независими вектори от $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Означаваме $\mathrm{rg}(a_1, a_2, ..., a_k)$.

С други думи рангът на система вектори е броят на векторите във всяка нейна максимално линейно независима подсистема.

Рангът на система, която се състои само от нулевия вектор, е числото нула.

Ако $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е база на V, то рангът на системата е равен на размерността на V, $\mathrm{rg}(a_1, a_2, ..., a_k) = \dim V$.

Намирането на ранга на система от вектори се състои в отделянето на максимално линейно независима подсистема от тези вектори. След въвеждането на понятието ранг на матрица, ще се запознаем с по-удобен от практическа гледна точка метод за определяне на ранга.

Пример 11.1. Намерете ранга на следните системи от вектори:

$$\vec{a}(1,2,3), \quad \vec{b}(2,4,6) \in \mathbb{R}^3,$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Тъй като векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни ($\vec{b} = 2\vec{a}$), то $\operatorname{rg}(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Никои два от векторите (матриците) от втората ситема не са линейно зависими. Затова проверяваме дали трите матрици A, B и C са линейно зависими. Установяваме, че

$$\lambda A + \mu B + \nu C = O \quad \Longleftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0,$$

следователно матриците от втората система са линейно независими и $\operatorname{rg}(A, B, C) = 3$.

2. Ранг на матрица

Нека $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Редовете на A са наредени n-торки от числа, които означаваме с $u_i(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., m$, а стълбовете ѝ са наредени m-торки от числа $v_j(a_{j1}, a_{j2}, ..., a_{jm})^T \in \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, ..., n$. Разместването на редовете на A не променя ранга на системата от вектори $u = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$, както и разместването на стълбовете не променя ранга на системата $v = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Изпълнено е по-силното твърдение

Теорема 11.1. *Разместването на редове (съотв. стълбове) на една матрица не променя ранга на системата от стълбовете (съотв. редовете) на матрицата.*

Определение 11.2. *Елементарни преобразувания на матрица* се наричат преобразуванията:

• разменяне местата на два реда или два стълба;

• умножаване на даден ред или даден стълб с произволно число, различно от нула;

• прибавяне към един ред (съотв. стълб) на произволен друг ред (съотв. стълб), умножен с някакво число.

Елементарните преобразувания, извършени само върху редовете (съотв. стълбовете) на една матрица не променят ранга на редовете (съотв. стълбовете) на матрицата.

Определение 11.3. Всяка матрица от вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1r} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2r} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & a_{3r} & ... & a_{3n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{rr} & ... & a_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

се нарича *трапецовидна* (или с *трапецовидна форма*), ако $a_{ii} \neq 0$ за $i = 1, 2, ..., r$.

Например следните матрици са трапецовидни

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Теорема 11.2. *Рангът на системата от редовете на трапецовидната матрица (11.1) е равен на r.*

Определение 11.4. *Минор от k-ти ред* на една матрица се нарича всяка детерминанта от k-ти ред с елемента, в които се пресичат произволно взети k реда и k стълба на матрицата. Ненулев минор от k-ти ред се нарича *базисен минор на матрица*, ако всеки минор от $(k+1)$-ви ред (ако съществува) е равен на нула.

Теорема 11.3. *Редът на базисния минор на една матрица е равен на ранга на системата от редовете (стълбовете) ѝ.*

Определение 11.5. Редът на базисните минори на една матрица A (който съвпада с ранга на редовете и стълбовете ѝ) се нарича ***ранг на матрицата*** и се означава с $\mathrm{rg}(A)$.

Понятието *ранг на матрица* е въведено през 1879г. от немския математик *Фердинанд Георг Фробениус*, който го дефинирал в смисъла на Определение 11.5. Но идеята за ранг е била използвана и по-рано, още през 1851г. от английския математик *Джеймс Силвестър*.

Теорема 11.4. *Елементарните преобразувания на матрица не изменят нейния ранг.*

Теорема 11.5. *Една детерминанта е равна на нула тогава и само тогава, когато редовете (стълбовете) ѝ са линейно зависими.*

За матрици A и B с еднакъв ранг се казва, че са *еквивалентни*. Често равенството $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$ се заменя с $A \sim B$.

Ако A и B са матрици, при което A е обратима, то

$$\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B), \qquad \mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(B).$$

Тук ще изясним връзката между подобните и еквивалентните матрици. Нека си припомним, че квадратните матрици от един и същи ред A и B се наричат подобни, ако съществува неособена матрица T такава, че $B = T^{-1}AT$. От това определение следва, че матриците A и B имат равни рангове и следователно са еквивалентни. Обратното обаче не винаги е вярно, т. е. не всеки две еквивалентни матрици са подобни (Фиг. 11.1).

Фиг. 11.1

Теореми 11.2 и 11.4 ни дават удобен начин за намиране на ранга на произволна матрица. За целта преобразуваме дадената матрица в трапецовидна форма с помощта на елементарни преобразувания върху редовете и\или стълбовете на матрицата. Тогава получената и изходната матрица са еквивалентни и следователно имат равни рангове.

Намирането на ранга на система от вектори се свежда до намирането на ранга на матрицата от техните координати.

Пример 11.2. Намерете ранга на системата вектори $a_1(1, 1, 0, 2)$, $a_2(1, -1, 3, 3)$, $a_3(2, 0, -1, 2)$, $a_4(-1, 0, 3, 1)$.

Разполагаме координатите на дадените вектори по редовете или стълбовете на матрица и след това чрез елементарни преобразувания по редовете или стълбовете привеждаме тази матрица в трапецовидна (или триъгълна) форма. Това е показано по-долу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\mathrm{rg}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 4$.

3. Ранг на линейно преобразувание

Методът за намиране на ранг на матрица се използва и за определяне на ранга на линейно преобразувание, тъй като е в сила следното твърдение

Теорема 11.6. *Рангът на линейно преобразувание е равен на ранга на матрицата му в произволна база.*

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.