Тема 1.

Вектори. Линейни операции със свободни вектори. Линейни пространства и подпространства. Геометрично векторно пространство

1. Свободен вектор

Определение 1.1. Наредена двойка точки (A, B) се означава с $\overrightarrow{AB}$ и се нарича *насочена отсечка*. Точка A се нарича *начало*, а точка B - *край* на $\overrightarrow{AB}$.

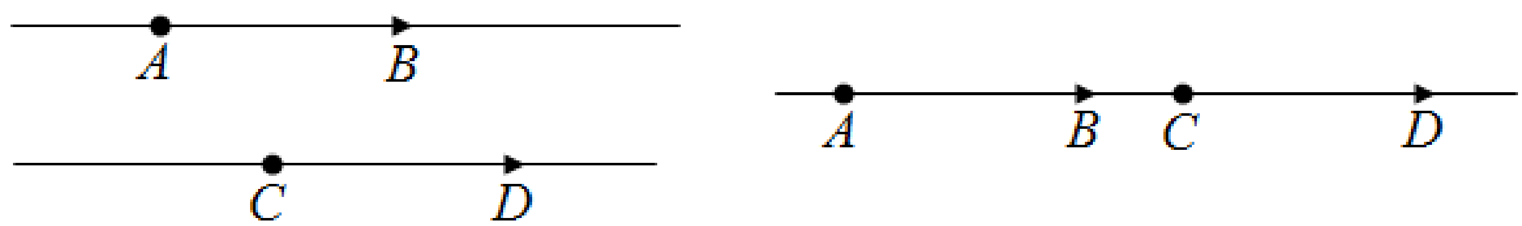
Ако началото и краят съвпадат (т. е. $A \equiv B$), то насочената отсечка $\overrightarrow{AA}$ се нарича *нулева* (в този случай насочената отсечка съвпада с точката A).

На фиг. 1.1 са изобразени насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$.

Фиг. 1.1

Определение 1.2. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *колинеарни*, ако правите AB и CD са успоредни или съвпадат.

Записваме $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

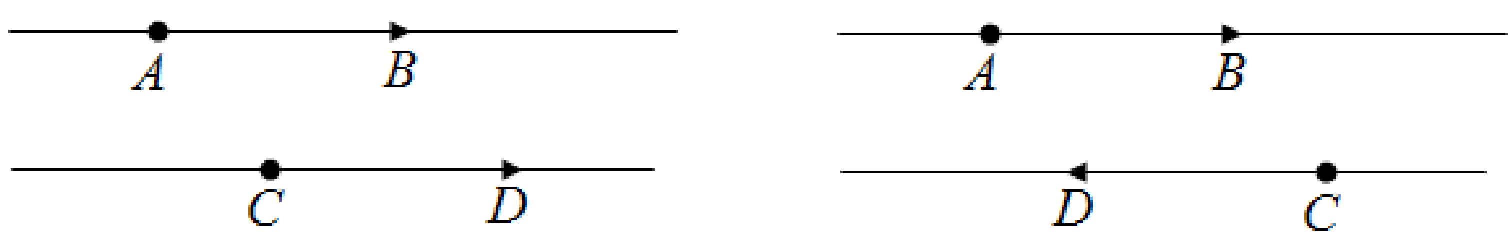


Фиг. 1.2

За точките A, B, C и D също се казва, че са колинеарни, ако лежат върху една права.

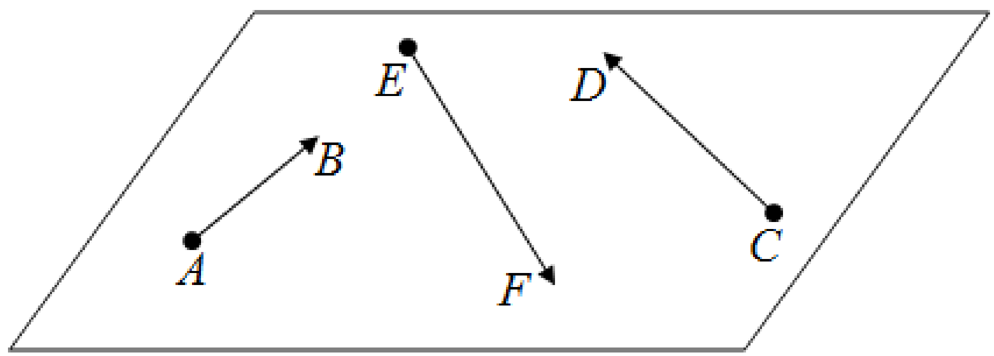
Ако лъчите $AB^{\rightarrow}$и $CD^{\rightarrow}$са еднопосочно успоредни, то насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *еднопосочно колинеарни* и записваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.
Ако лъчите $AB^{\rightarrow}$и $CD^{\rightarrow}$са разнопосочно успоредни, то насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *разнопосочно колинеарни* и записваме $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$.

На фиг. 1.3. са изобразени еднопосочно колинеарните насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (в ляво) и разнопосочно колинеарните насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ (в дясно).



Фиг. 1.3

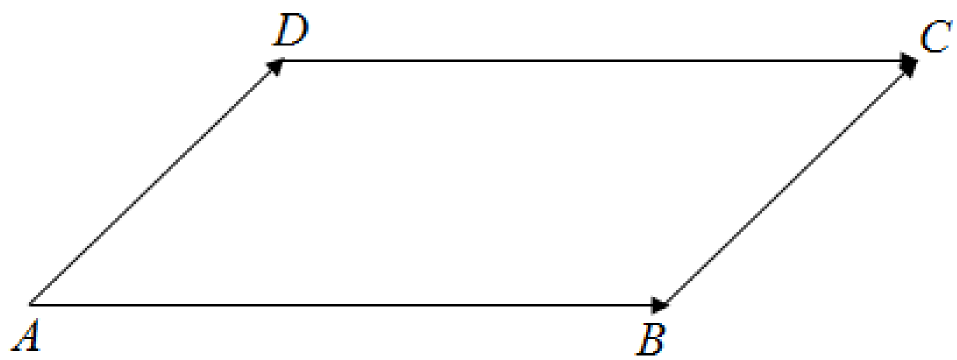
Определение 1.3. Насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{EF}$ се наричат *компланарни*, ако правите AB, CD и EF лежат в една равнина или са успоредни на една равнина. Точките A, B, C, D, E и F, лежащи в една равнина, също се наричат компланарни.



Фиг. 1.4

Определение 1.4. Ненулевите насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ се наричат *равни*, ако:
1) отсечките AB и CD имат равни дължини;
2) насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ са еднопосочно колинеарни, т. е. $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Следствие. Фигурата $ABCD$ е успоредник, точно когато $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ или $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (като при това четирите точки не са колинеарни).



Фиг. 1.5

Равенството на насочени отсечки е *релация на еквивалентност* и като такава притежава свойствата:
1) *рефлексивност* - $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$;
2) *симетричност* - ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$;
3) *транзитивност* - ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
за произволни насочени отсечки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Отбелязваме, че всяка релация, притежаваща свойствата 1), 2) и 3) е релация на еквивалентност.

Нека V е множеството на всички насочени отсечки. Релацията на еквивалентност "равенство на насочени отсечки" разбива V на непресичащи се *класове на еквивалентност*. Ако $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са множествата от всички насочени отсечки, съответно равни на $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, то $\vec{a}$ и $\vec{b}$ или нямат нито един общ елемент, или съвпадат. Втората възможност е налице, точно когато $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Така достигаме до следващото важно определение

Определение 1.5. Всеки клас $\vec{a}$ от равни насочени отсечки се нарича ***свободен вектор***. Всеки елемент на $\vec{a}$ се нарича представител на $\vec{a}$. Ако $\overrightarrow{AB}$ е представител на $\vec{a}$, то вместо $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$ записваме $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.

Ако A е произволна точка, а $\vec{a}$ е произволен свободен вектор, то съществува единствена точка B такава, че $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. Построяването на представителя $\overrightarrow{AB}$ се нарича *пренасяне* на $\vec{a}$ в т. A.
Нулев свободен вектор се нарича множеството от всички нулеви насочени отсечки и означаваме с $\vec{o}$.

Под дължина на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на отсечката AB. Под дължина на свободния вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ разбираме дължината на произволен негов представител, т. е. дължината на насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ и означаваме с $|\vec{a}|$.

Очевидно дължината на нулевия вектор е числото нула, т.е. $|\vec{o}| = 0$.

Ако $\vec{a}$ е свободен вектор с представител насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, то свободният вектор с представител $\overrightarrow{BA}$ се означава с $(-\vec{a})$ и се нарича *противоположен свободен вектор* на $\vec{a}$. Следователно е изпълнено

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}.$$

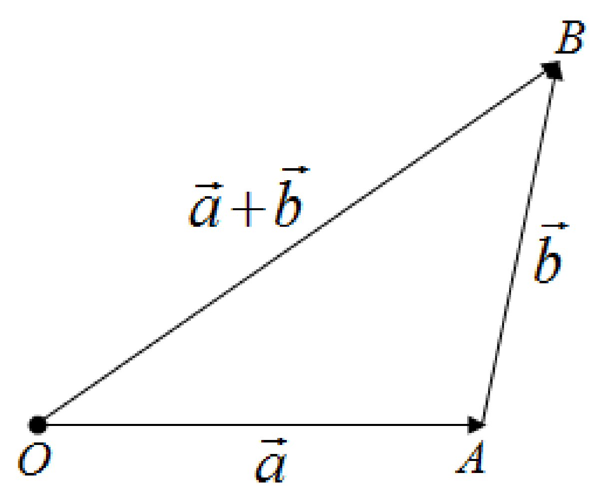
Свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ се наричат колинеарни, ако съответните им представители са колинеарни. Нулевият вектор е колинеарен на всеки друг свободен вектор.

Свободните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ се наричат компланарни, ако съответните им представители са компланарни.

2. Линейни действия със свободни вектори

Събиране на свободни вектори

Определение 1.6. (правило на триъгълника) Събиране на два свободни вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е действие, което им съпоставя свободния вектор $\vec{a}+\vec{b}$, наречен тяхна сума, определен по следния начин:
ако O е произволна точка и $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$, то $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OB}$.

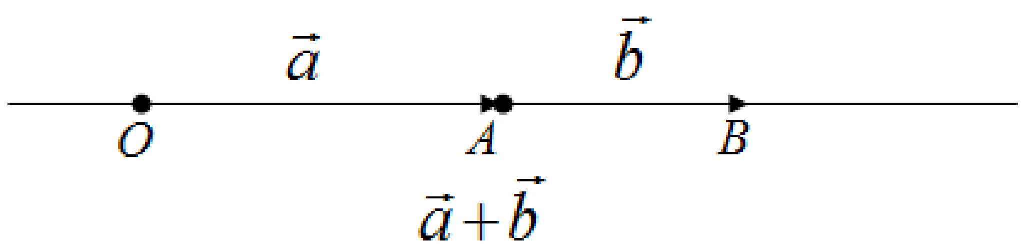


Фиг. 1.6

Релация на Шал за насочени отсечки: За произволни три точки A, B и C е изпълнено равенството

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Ако $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{a} + \vec{b} \parallel \vec{a} \parallel \vec{b}$.



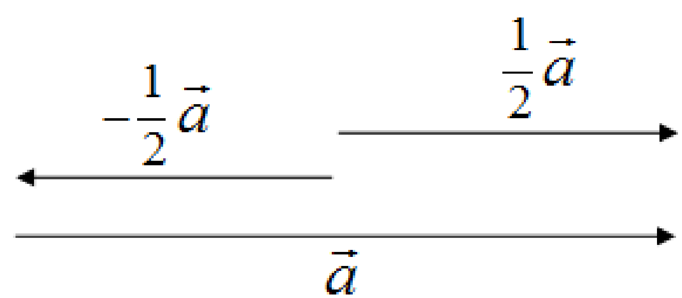
Фиг. 1.7

Умножение на свободен вектор с число

Определение 1.7. Умножение на реално число λ със свободен вектор $\vec{a}$ е действие, което им съпоставя свободен вектор $\lambda\vec{a}$, наречен тяхно произведение, определен по следния начин:

ако $\lambda = 0$ или $\vec{a} = \vec{o}$, то $\lambda\vec{a} = \vec{o}$;

в противен случай $\lambda\vec{a}$ е с дължина $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|.|\vec{a}|$ и е еднопосочно или разнопосочно колинеарен на $\vec{a}$ в зависимост от това дали $\lambda > 0$ или $\lambda < 0$.

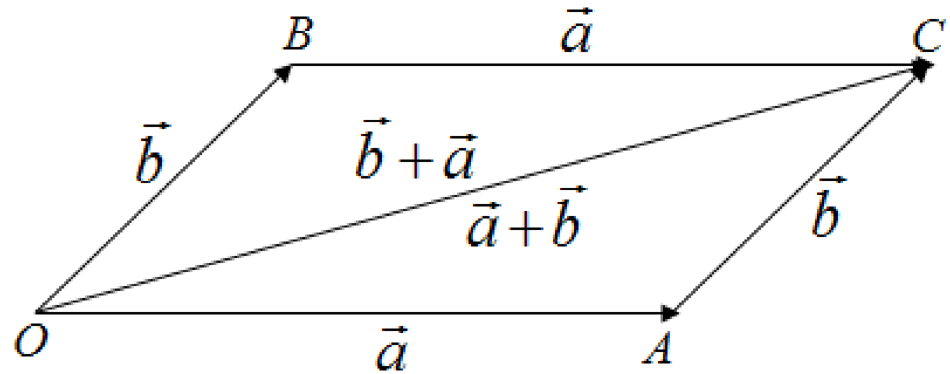


Фиг. 1.8

Теорема 1.1. *Линейните действия със свободни вектори притежават следните свойства:*
1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(комутативност при събиране)*;
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(асоциативност при събиране)*;
3. *съществува свободен вектор* $\vec{o}$ *такъв, че* $\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$ *за всеки свободен вектор* $\vec{a}$;
4. *за всеки свободен вектор* $\vec{a}$ *съществува свободен вектор* $(-\vec{a})$ *такъв, че* $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{o}$;
5. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ *(дистрибутивност относно числов множител)*;
6. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$ *(дистрибутивност относно векторен множител)*;
7. $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$ *(асоциативност при умножение с число)*;
8. $1\vec{a}=\vec{a}$,
където $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ *са произволни свободни вектори, а* λ,μ – *произволни реални числа.*

Доказателство.

1. Избираме представители на свободните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нека това бъдат съответно насочените отсечки $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (фиг. 1.9).



Фиг. 1.9 **Правило на успоредника за събиране на свободни вектори**

Допълваме ъгъла AOB до успоредника $OACB$. Тогава, съгласно правилото на триъгълника за събиране на насочени отсечки имаме

от $\triangle OAC$: $\quad \vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}$;

от $\triangle OBC$: $\quad \vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}$.

Следователно $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, т.е. събирането на свободни вектори е комутативно.

От горното доказателство следва *правилото на успоредника за събиране на насочени отсечки* (свободни вектори) (фиг. 1.9)

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}.$$

3. Линейно (векторно) пространство

Определение 1.8. Непразно множество V се нарича ***линейно (векторно) пространство над числовото поле*** $\mathbb{K}$, ако е снабдено с две действия - *събиране*, което на всеки два елемента $a, b \in V$ съпоставя елемент $a + b \in V$, наречен сума на a и b и *умножение с число*, което на всеки елемент $a \in V$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ съпоставя елемента $\lambda a \in V$, наречен произведение на λ и a, при което за произволни $a, b, c \in V$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ са изпълнени следните свойства (аксиоми):

1. $a + b = b + a$ *(комутативност при събиране)*;
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ *(асоциативност при събиране)*;
3. *съществува елемент* o *такъв, че* $a + o = a$ *за всеки елемент* a; *елементът* o *се нарича нулев елемент*;
4. *за всеки елемент* a *съществува елемент* $(-a)$ *такъв, че* $a + (-a) = o$; *елементът* $(-a)$ *се нарича противоположен елемент на* a;

5. $\lambda(a+b) = \lambda a + \lambda b$ *(дистрибутивност относно множител от* $\mathbb{K}$*)*;
6. $(\lambda+\mu)a = \lambda a + \mu a$ *(дистрибутивност относно множител от* V*)*;
7. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ *(асоциативност при умножение с множител от* $\mathbb{K}$*)*;
8. $1a = a$.

Елементите на V се наричат *вектори*. Действията събиране на вектори и умножение на число с вектор се наричат *линейни действия (операции)*.

Забележка. Ще разглеждаме предимно случая, когато $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Тогава V се нарича *реално векторно пространство*.

Ако $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ - полето на комплексните числа, то V се нарича *комплексно векторно пространство*.

Някои следствия от аксиомите 1-8.

Следствие 1.1. *Нулевият елемент на всяко векторно пространство е единствен.*

Следствие 1.2. *Противоположният елемент на всеки елемент на векторно пространство е единствен.*

Следствие 1.3. $0a = o$ *за всяко* $a \in V$.

Следствие 1.4. $(-1)a = -a$ *за всяко* $a \in V$.

Следствие 1.5. *Ако* $\lambda a = o$, *то или* $\lambda = 0$, *или* $a = o$.

Следствие 1.6. *Ако* a *и* b *са произволни вектори от* V, *то уравнението* $a + x = b$ *има единствено решение* $x \in V$, *което се определя от* $x = b + (-a)$ *и се нарича разлика на векторите* a *и* b *(означаваме с* $b - a$*).*

Определение 1.9. Непразното подмножество W на векторното пространство V ($\emptyset \neq W \subseteq V$) се нарича *векторно подпространство* на V, ако W е векторно пространство относно линейните действия, дефинирани над елементите на V. В такъв случай записваме $W \leq V$.

Определение 1.10. Нека V е векторно пространство над полето $\mathbb{K}$, а $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ е произволна система (съвкупност) от вектори на V. Вектор от вида

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$$

се нарича *линейна комбинация* на векторите $a_1, a_2, ..., a_k$, а числата $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ се наричат *коефициенти* на тази линейна комбинация.

Твърдение 1.1. *Непразното подмножество W на векторното пространство V е векторно подпространство на V, точно когато е изпълнено едно от следните еквивалентни условия:*

1) *W е затворено относно линейните действия над елементите на V, т. е. за произволни $a, b \in W$ и $\lambda \in \mathbb{K}$ имаме: $a + b \in W$ и $\lambda a \in W$;*

2) *W е затворено относно взимането на линейни комбинации на елементи на W, т. е. за всеки $a, b \in W$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ имаме $\lambda a + \mu b \in W$.*

Множеството $\{o\}$ е векторно пространство и се нарича *нулево векторно пространство.*

Очевидно за всяко векторно пространство V е изпълнено $V \leq V$, $\{o\} \leq V$. Тези векторни подпространства се наричат *тривиални* векторни подпространства на V.

Примери за векторни пространства и подпространства

Пример 1.1. Всяко числово поле $\mathbb{K}$ е векторно пространство над себе си. Следователно векторни пространства са множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ и множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ относно естествените операции събиране и умножение с число, дефинирани над тези числови множества.

Нека разгледаме множеството $\mathbb{R}^2 = \{z = (x, y) | x, y \in \mathbb{R}\}$. Дефинираме следните операции:

$$\begin{aligned} &(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \\ &(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Множеството $\mathbb{R}^2$ с операциите (1.1) се нарича множество на комплексните числа и се бележи с $\mathbb{C}$.

Ако $a \in \mathbb{R}$, то $a = (a, 0) \in \mathbb{C}$, т. е. $\mathbb{R}$ е подмножество на $\mathbb{C}$. Имаме $\omega = (0, 0) = 0$ и $\varepsilon = (1, 0) = 1$. Комплексното число $i = (0, 1)$ се нарича *имагинерна единица на* $\mathbb{C}$. Съгласно (1.1) имаме

$$i^2 = i.i = (0,1).(0,1) = -1.$$

Тогава за произволно комплексно число $z = (x, y)$ е в сила

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1).(0, y) = x + iy.$$

Изразът $z = x + iy$ се нарича *алгебричен вид* на комплексното число z. Геометричното му представяне е точка в декартовата равнина с координати (x, y).

Множеството $\mathbb{C}$ е числово поле и векторно пространство над себе си относно естествените операции с комплексни числа, т. е. операциите (1.1).

Относно операциите събиране и умножение с реално число имаме $\mathbb{R} \leq \mathbb{C}$. Обаче относно същите операции $\mathbb{Q}$ не е подпространство на $\mathbb{R}$, тъй като, можем да съставим линейна комбинация на елементи от $\mathbb{Q}$ с реални коефициенти (например ирационални), която да не принадлежи на $\mathbb{Q}$.

Множеството на естествените числа $\mathbb{N}$ не е векторно пространство относно операциите събиране на естествени числа и умножение с естествено число, тъй като не са изпълнени аксиоми 3 и 4 (не съществува нулев елемент, противоположният елемент на всеки елемент от $\mathbb{N}$ не принадлежи на $\mathbb{N}$). Множеството на целите числа $\mathbb{Z}$ също не е векторно пространство над себе си, тъй като не е поле.

Пример 1.2. Множеството $\mathbb{R}^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, на *наредените n-торки от реални числа* е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране и умножение с реално число, дефинирани съответно чрез:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n),$$
$$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

за произволни $(x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Нулевият елемент на $\mathbb{R}^n$ е наредената n-торка $(0, 0, ..., 0)$. Тогава противоположният елемент на $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ е $(-x_1, -x_2, ..., -x_n)$.

В частност, $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Пример 1.3. Множеството от свободните вектори е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране на свободни вектори и умножение на свободен вектор с число. Това пространство се нарича *геометрично векторно пространство*.

Векторите, колинеарни с дадена права, образуват едно векторно подпространство на геометричното векторно пространство.

Същото важи и за векторите, компланарни с дадена равнина.

Пример 1.4. Множеството $\mathrm{C}[a,b]$ от всички реални непрекъснати функции в интервала $[a,b]$, $a,b\in\mathbb{R}$ е реално векторно пространство относно следните операции:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \qquad (\lambda f)(x)=\lambda f(x),$$

където $f(x),g(x)\in\mathrm{C}[a,b]$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Нулевият елемент на $\mathrm{C}[a,b]$ е нулевата функция, т. е. числото 0. Противоположният елемент на $f(x)\in\mathrm{C}[a,b]$ е $-f(x)$.

Пример 1.5. Множеството $\mathbb{R}_n[x]$ на полиномите на x с реални коефициенти от степен $\leq n$, $n\in\mathbb{N}$, е векторно пространство над $\mathbb{R}$ относно операциите събиране на полиноми и умножение на полином с реално число. Ако $f(x)=a_nx^n+...+a_1x+a_0$ и $g(x)=b_nx^n+...+b_1x+b_0$ са елементи на $\mathbb{R}_n[x]$, а $\lambda\in\mathbb{R}$, то:

$$f(x)+g(x)=(a_n+b_n)x^n+...+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0),$$
$$\lambda f(x)=\lambda a_nx^n+...+\lambda a_1x+\lambda a_0.$$

$\mathbb{R}_n[x]$ е векторно подпространство на пространството $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ на всички непрекъснати функции, дефинирани над $\mathbb{R}$.

В следващата тема ще разгледаме още един пример на реално векторно пространство, което играе важна роля в математиката.

Използвана литература

1. Д. Мекеров, Н. Начев, Ст. Миховски, Е. Павлов, *Линейна алгебра и аналитична геометрия*, Пловдив, 1997.

2. L. Hogben, *Handbook of linear algebra*, CRC, 2007.

3. D. C. Lay, *Linear algebra and its applications*, University of Maryland.

4. C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, SIAM.

5. G. Strang, *Linear algebra and its applications*, 3rd ed., MIT, 1988.