ВТОРО КОНТРОЛНО ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИЙ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ
спец. ПРИЛОЖНА МАТЕМАТИКА
25.01.2013 г.

Задача 1. (5т.)

Нека V е множеството, състоящо се от всички аритметични прогресии от реални числа $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$, където $a_{i+1} - a_i = a_{i+2} - a_{i+1}, \ \ i \geq 1$. Да се докаже, че:

а) V е линейно пространство над $\mathbb{R}$, относно операциите събиране на редици и умножение на редици с реално число.

б) Докажете, че редиците $p = (1, 1, 1, 1, \dots)$ и $q = (0, 1, 2, 3, \dots)$ принадлежат на V и са линейно независими.

в) Намерете базис на V и определете размерността му.

г) Докажете, че редиците $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots)$ и $u = (u_1, u_2, u_3, u_4, \dots)$, където $v_k = 2k - 1, \ \ u_k = 2(k-1)$ образуват базис на V.

Решение: Нека означим с $d(a) = a_{i+1} - a_i = a_{i+2} - a_{i+1} \ \ i \geq 1$. С индукция ще докажем, че $a_i = (i-1)d(a) + a_1 \ \ i \geq 1$. За $i = 1$ получаваме $a_1 = 0d(a) + a_1$, аналогично при $i = 2$ имаме $a_2 = d(a) + a_1$. Допускаме, че $a_n = (n-1)d(a) + a_1$. Проверяваме за $n+1$: $a_{n+1} = a_n + d(a) = (n-1)d(a) + a_1 + d(a) = nd(a) + a_1$. Така получихме, че произволна редица от V се представя във вида $a = (a_1, a_1 + d(a), a_1 + 2d(a), \dots, a_1 + (n-1)d(a), \dots)$.

а) Знаем, че множеството на безкрайните редици над $\mathbb{R}$ образува линейно пространство относно обичайните операции събиране на редици и умножение на редици с реално число. Целта е да покажем, че V е негово линейно подпространство. Очевидно V е непразно множество (например $0 = (0, 0, 0, 0, \dots) \in V, \ \ d(0) = 0$). Нека $a = (a_1, a_1 + d(a), a_1 + 2d(a), \dots, a_1 + (n-1)d(a), \dots)$ и $b = (b_1, b_1 + d(b), b_1 + 2d(b), \dots, b_1 + (n-1)d(b), \dots)$ са 2 редици от V. Трябва да проверим, че $a + b \in V$ и $\lambda a \in V, \ \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Получаваме:

1) $a + b = (a_1 + b_1, a_1 + b_1 + (d(a) + d(b)), a_1 + b_1 + 2(d(a) + d(b)), \dots, a_1 + b_1 + (n-1)(d(a) + d(b)), \dots) \in V$;

2) $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_1 + \lambda d(a), \lambda a_1 + 2\lambda d(a), \dots, \lambda a_1 + (n-1)\lambda d(a), \dots) \in V$.

От 1) и 2) следва, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$.

б) Трябва да проверим, че $p = (1, 1, 1, 1, \dots)$ и $q = (0, 1, 2, 3, \dots)$ принадлежат на V и са линейно независими. Очевидно $d(p) = 0, \ \ p_1 = 1$ и $d(q) = 1, \ \ q_1 = 0$, т.е. p и q са от търсения вид на аритметичните прогресии, т. е. $p,\ q \in V$. Нека $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Образуваме линейната комбинация $\lambda p + \mu q = 0$, трябва да докажем, че p и q са линейно независими, т. е. единствената линейна комбинация от вида е тривиалната такава $(\lambda = \mu = 0)$. Сравнявайки първите координати отляво и отдясно, получаваме $\lambda + 0\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

в) От дефиницията, която дадохме на елементите на V се вижда, че всяка аритметична прогресия a се определя от първата си координата a_1 и разликата $d(a)$. В същото време доказахме, че редиците p и q са линейно независими над V. Логично е да проверим дали образуват базис. Нека $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, ще направим проверката $\alpha p + \beta q = a$, където a е произволен вектор от V. Получаваме:
$(\alpha, \alpha+\beta, \alpha+2\beta, \dots, \alpha+(n-1)\beta, \dots) = (a_1, a_1+d(a), a_1+2d(a), \dots, a_1 + (n-1)d(a), \dots) \Rightarrow \alpha = a_1,\ \beta = d(a) \Rightarrow V = l(p,q)$.

Доказахме, че p и q образуват базис на V, тогава $\dim V = 2$

г) От предходната подточка получихме, че V е двумерно пространство, т. е. достатъчно е да докажем, че u и v са линейно независими над V, тогава те ще образуват базис. Нека първо проверим дали u и v са вектори от V. Дадено е $v = (v_1, v_2, v_3, v_4, \dots)$, където $v_k = 2k - 1$.

$$v_{k+1} - v_k = 2(k+1) - 1 - (2k-1) = 2$$
$$v_{k+2} - v_{k+1} = 2(k+2) - 1 - (2(k+1) - 1) = 2$$

Получихме, че $d(v) = 2$, тук $v_1 = 2.1 - 1 = 1$. Така $v = (1, 3, 5, 7, \dots)$. Аналогично за u получаваме $d(u) = 2,\ u_1 = 0$ и $u = (0, 2, 4, 6, \dots)$.

Остана да проверим дали u и v са линейно независими. Нека $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. Образуваме линейната комбинация $\lambda u + \mu v = 0$ или $(\mu, 2\lambda + 3\mu, 4\lambda + 5\mu, \dots) = (0, 0, 0, \dots) \Leftrightarrow \mu = \lambda = 0$, т. е. u и v са линейно независими, следователно образуват базис на V.

Критерий: Всяка подточка дава по 1,25т.

Задача 2. (5т.) В тримерното линейно пространство V с базис e_1, e_2, e_3 е даден линеен оператор φ преобразуващ векторите a_1, a_2, a_3 във векторите b_1, b_2, b_3.

а) Да се намери матрицата на оператора φ спрямо стандартния базис e_1, e_2, e_3 на V. Да се намерят координатите на вектора $\varphi(v)$ спрямо същия базис.

б) Да се намерят базиси на ядрото и образа на φ, ako:

$$\begin{array}{llll} a_1 = & 2e_1 + e_2 + e_3 & b_1 = & 3e_1 + 2e_2 + 3e_3 \\ a_2 = & -e_1 \qquad - e_3 & b_2 = & -2e_1 - e_2 - 2e_3 \\ a_3 = & e_1 + 2e_2 & b_3 = & e_1 + 2e_2 + e_3\ ; \end{array}$$

$$v = 3e_1 - 2e_2 - 3e_3.$$

Решение: а) Ще докажем, че векторите a_1, a_2, a_3 образуват базис на V.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \cdots \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A) = 3.$$

Получихме, че векторите a_1, a_2, a_3 са линейно независими, т. е. образуват базис на тримерното линейно пространство V. Тогава изображението $\tau(e_i) = a_i,\ i = 1, 2, 3$ е обратим линеен оператор (преобразува базис на V в друг базис, $\exists A^{-1}$) с матрица в стандартния базис A. Нека $\sigma(e_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3$ е линеен оператор с матрица в стандартния базис

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Дадено е, че φ е линейният оператор, който действа по правилото $\varphi(a_i) = b_i,\ i = 1, 2, 3$. Очевидно е изпълнено равенството $\varphi\tau = \sigma \Rightarrow \varphi = \sigma\tau^{-1}$. Ако матрицата на φ в базиса e_1, e_2, e_3 е C, то тогава $C = BA^{-1}$.

Намираме $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Сега ще пресметнем C:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Може да намерим C, решавайки матричното уравнение $C.A = B$.

Търсим образа на v под действието на оператора φ. Получаваме:

$$\varphi(v) = C.v = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

б) $\mathrm{Ker}\varphi$ е пространството от решенията на хомогенната система $CX = \mathbf{O}$. Търсим ФСР, $r(C) = 2$, т.е. базис на $\mathrm{Ker}\varphi$ ще се образува от един вектор, например $u_1 = (1, 1, -1)$.

По стълбовете на матрицата C стоят съответно векторите $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)$. Тогава $\mathrm{Im}\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3)) = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2))$, т. е. базис на $\mathrm{Im}\varphi$ образуват например векторите $\varphi(e_1) = (1, 0, 1)$ и $\varphi(e_2) = (0, 1, 1)$.

Забележка: Това са отговорите за варианти 1 и 3, за варианти 2 и 4 по аналогичен начин получаваме съответно:

а) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\varphi(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

б) $\mathrm{Ker}\varphi = (0)$; $\mathrm{Im}\varphi = V$, т. е. базис на образа е например стандартния такъв.

Критерий:

а) За намиране на матрицата C на оператора φ - 2,5т. За намиране на $\varphi(v)$ - 0,5т.

б) За намиране на всеки от базисите на ядрото и образа по 1т.