Домашно задание 2

Първи курс,
специалност *Математика, Приложна Математика и Статистика*

9 януари 2015 г.

Задача 1. В линейно пространство V с базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ е даден линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 8 & -9 & 0 & 4 \\ -4 & 4 & -1 & -2 \\ 12 & -12 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Да се намери базис на V, в който матрицата на φ е диагонална, както и матрицата на оператора в този базис.

Задача 2. В линейно простраство V с базис $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_4$ е даден линейният оператор φ

$$\begin{aligned} \varphi(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + x_3\boldsymbol{e}_3 + x_4\boldsymbol{e}_4) = (-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4)\boldsymbol{e}_1 + (x_1 + 2x_2 + x_4)e_2 \\ +(3x_1 + 3x_2 - 3x_3)\boldsymbol{e}_3 + (-x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4)\boldsymbol{e}_4 \end{aligned}$$

Да се пресметнат $d(\varphi)$ и $rk(\varphi)$. Да се намерят базиси на образа и ядрото на φ.

Задача 3. Нека $V = \mathbb{Q}^4[x]$ е линейното пространство на полиномите с рационални коефициенти от степен ненадвишаваща 3, а $\varphi : V \to V$ е изображението

$$\varphi(f) = -f'' - 5f' \text{ за всеки полином } f \in V.$$

(а) Да се докаже, че φ е линеен оператор.

(б) Да се намери матрицата на оператора φ спрямо базиса 1, x, x^2 и x^3.

(в) Да се намери матрицата на оператора φ спрямо базиса $x+1$, $x-1$, x^2+x+1 и $(x+1)^3$, както и матрицата на смяната.

(г) Да се намерят координатите на $f = x^3 + x + 1$ в двата базиса.

(д) Да се определи дали полиномът $f = x^3 + x + 1$ принадлежи на образа $\operatorname{im}\varphi$.

Задача 4. Линейното подпространство U на $\mathbb{R}^4$ е пространството от решения на уравнението:

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0,$$

а $W = \ell(a_1, a_2, a_3)$ е линейната обвивка на векторите:

$$\boldsymbol{a}_1(1, 2, 1, -1),\ \boldsymbol{a}_2 = (0, 1, 0, -1), a_3 = (1, -1, 1, -4).$$

Да се конструира линеен оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, такъв че:
(а) $\operatorname{im}\varphi = U$;
(б) $\operatorname{im}\varphi = W$;
(в) $\ker\varphi = U$;
(г) $\ker\varphi = W$.

Задача 5. Линейният оператор $\varphi : V \to V$ в крайномерно пространство V има единствена собствена стойност λ. Да се докаже, че ако матрицата на φ е диагонална в някой базис на V, то матрицата на оператора е диагонална в който и да е базис на V.

Задача 6. Нека φ е линеен оператор в $\mathbb{R}^2$ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

спрямо стандартния базис.

(а) Да се докаже, че φ не може да се представи с диагонална матрица чрез смяна на базиса.

(б) Нека $\boldsymbol{v}$ е собствен вектор на φ, отговарящ на собствена стойност λ, а w е решение на уравнението

$$\varphi(w) - \lambda w = v.$$

Да се докаже, че $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ е базис на $\mathbb{R}^2$ и да се намери матрицата на оператора в този базис.