Решения на домашна работа № 1 по Линейна алгебра

Задача 1. *Дадени са матриците:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 24 \\ 40 & 14 & 26 \\ 12 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C_1 = \begin{pmatrix} 32 & 16 & 24 \\ 40 & 14 & 26 \\ 72 & 30 & 50 \end{pmatrix}.$$

(а) Да се намерят всички решения на матричното уравнение:

$$AXB = C.$$

(б) Да се намерят всички решения на матричното уравнение:

$$A_1XB = C_1.$$

Решение: (а) Полагаме $Y = AX$ и свеждаме към матричното уравнение $YB = C$. Записваме матриците B и C една под друга,

$$\left(\frac{B}{C}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 32 & 16 & 24 \\ 40 & 14 & 26 \\ 12 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Заменяме първия стълб с половината на втория, втория - с разликата на първия и втория, а третия - с разликата на първия и третия,

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ \hline 8 & 16 & 8 \\ 7 & 26 & 14 \\ 0 & 12 & 8 \end{array}\right).$$

От втория стълб изваждаме $\frac{3}{2}$ по третия и умножаваме трети стълб с $\frac{1}{2}$, за да получим

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 8 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{array}\right).$$

Следователно
$$Y = AX = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 7 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
Чрез елементарни преобразувания по редове
$$\left(\; A \;\middle|\; Y \; \right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 8 & 4 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -9 & -3 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & -8 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + R_2 - \frac{1}{4}R_3 \\ R_2 - \frac{3}{4}R_3 \\ -\frac{1}{4}R_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \\ -R_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$
Следователно
$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неизвестната матрица X може да се намери и с полагане $Z = XB$. Тогава $AZ = C$ се решава с елементарни преобразувания по редове
$$\left(\; A \;\middle|\; C \; \right) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 32 & 16 & 24 \\ 2 & 1 & 1 & 40 & 14 & 26 \\ 1 & -2 & 1 & 12 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 1 & 32 & 16 & 24 \\ 0 & -3 & -1 & -24 & -18 & -22 \\ 0 & -4 & 0 & -20 & -16 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 + R_2 - \frac{1}{4}R_3 \\ R_2 - \frac{3}{4}R_3 \\ -\frac{1}{4}R_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 13 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -9 & -6 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \\ -R_2 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 13 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 & 6 & 7 \end{array}\right).$$
Следователно
$$XB = Z = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$
С елементарни преобразувания по стълбове свеждаме горната половина на
$$\left(\frac{B}{Z} \right) = \left(\begin{array}{rrr} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ \hline 13 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 5 \\ 9 & 6 & 7 \end{array}\right)$$

към E_3. За целта вземаме половината на втория стълб като първи. На мястото на втория стълб записваме разликата на първия и втория стълб, а третият стълб заменяме с разликата на първия и третия,

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 11 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{array}\right).$$

Умножаваме третия стълб с $-\frac{3}{2}$ и го прибавяме към втория. Заменяме третия столб с неговата половина и получаваме

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Оттук

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(б)

- Забелязваме, че редовете на матриците A_1 и C_1 удовлетворяват една и съща линейна зависимост $R_1 + R_2 = R_3$. Изваждането на първия и втория ред от третия е равносилно на ляво умножение с неособената матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

  и свежда даденото матрично уравнение към еквивалентно на него. Третият ред в полученото матрично уравнение е изпълнен само с нули и можем да го изтрием. Да означим с A_2, съответно с C_2 матрицата, получена от A_1, съответно C_1 чрез изпускане на последния ред. Матриците A_2 и C_2 могат да се получат от A, съответно C чрез изпускане на третия ред. Затова решението

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

  на подусловие (а) е едно частно решение на решението на матирчното уравнение от подусловие (б).

- Съгласно алтернативата на Фредхолм, общото решение на (б) е

$$X = X_0 + U,$$

където U е пространството от решения на на хомогенното матрично уравнение

$$A_2 \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Чрез елементарни преобразувания по редове към матрицата A_2 я свеждаме към

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ R_2 - 2R_1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} R_1 + R_2 \\ -R_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

За $\forall 1 \leq i \leq 3$ равенствата

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ u_{3i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

са еквивалентни на

$$u_{1i} = u_{2i} \quad \text{и} \quad u_{3i} = -3u_{2i}.$$

Следователно решенията на $A_1XB = C_1$ са

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ -3u_{21} & -3u_{22} & -3u_{23} \end{pmatrix} \quad \text{за} \quad \forall u_{21}, u_{22}, u_{23}.$$

Задача 2. *Да се пресметне детерминантата:*

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x^n & x^{n-1} & \dots & x & 1 \\ (x+1)^n & (x+1)^{n-1} & \dots & x+1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+n)^n & (x+n)^{n-1} & \dots & x+n & 1 \end{vmatrix}$$

Решение: Транспонираме без променяме детерминантата

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} x^n & (x+1)^n & \dots & (x+n)^n \\ x^{n-1} & (x+1)^{n-1} & \dots & (x+n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x+1 & \dots & x+n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Преместваме последния ред на първо място чрез n транспозиции на съседни редове. Преместваме попадналия на последно място ред

$$x \quad x+1 \quad \dots \quad x+n$$

на второ място чрез $n-1$ транспозиции на съседни редове и т.н. докато получим

$$\Delta_{n+1} = (-1)^{n+(n-1)+\dots+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x & x+1 & \dots & x+n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^n & (x+1)^n & \dots & (x+n)^n \end{vmatrix}.$$

Използваме, че детерминантата на Вандермонд

$$W(a_1,\dots,a_m) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \dots & a_m^{m-1} \end{vmatrix} = \prod_{m\geq i>j\geq 1}(a_i-a_j)$$

и пресмятаме, че

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} W(x, x+1, \dots, x_n) = \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n\geq i>j\geq 0}[(x+i)-(x+j)] = \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{n\geq i>j\geq 0}(i-j) = \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[\prod_{n>j\geq 0}(n-j)\right]\left[\prod_{n-1>j\geq 0}(n-1-j)\right]\dots\left[\prod_{1>j\geq 0}(1-j)\right] = \\ (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!(n-1)!\dots 2!1!. \end{aligned}$$

Задача 3. *Да се намерят стойностите на параметрите λ и μ, за които векторът*

$$v = (0,-3,-33,\mu)$$

се изразява като линейна комбинация на векторите

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,-2,1), \\ v_2 &= (0,3,5,-2), \\ v_3 &= (1,5,3,-1), \\ v_4 &= (3,4,14,\lambda), \end{aligned}$$

Решение: Векторът v е в линейната обвивка на векторите $v_1,\dots v_4$ точно когато системата линейни уравнения

$$\begin{pmatrix} v_1^t & v_2^t & v_3^t & v_4^t \end{pmatrix} x = v^t$$

има решение $x \in M_{4\times 1}(F)$. При това, $v = x_1v_1 + \dots + x_4v_4$. С елементарни преобразувания по редове решаваме горната система линейни уравнения

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 3 & 14 & -33 \\ 1 & -2 & -1 & \lambda & \mu \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-2R_1 \\ R_2+R_3 \\ R_4-R_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 8 & 8 & 18 & -36 \\ 0 & -2 & -2 & \lambda-3 & \mu \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2-\frac{1}{2}R_3 \\ \frac{1}{2}R_3 \\ 2R_4+\frac{1}{2}R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -11 & 15 \\ 0 & 4 & 4 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda+3 & 2\mu-18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ R_3+4R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -35 & 42 \\ 0 & 0 & 0 & 2\lambda+3 & 2\mu-18 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{1}{35}R_3 \\ R_4+\frac{2\lambda+3}{35}R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu+\frac{12}{5}\lambda-\frac{72}{5} \end{array}\right).$$

Необходимо условие за съвместимост на тази система е

$$0 = 2\mu + \frac{12}{5}\lambda - \frac{72}{5} = \frac{2}{5}(5\mu + 6\lambda - 36),$$

което се свежда до

$$5\mu + 6\lambda = 36.$$

При това условие имаме

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 11 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1-3R_3 \\ R_2-11R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & \frac{18}{5} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -\frac{9}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{6}{5} \end{array}\right).$$

Следователно решенията на системата при $5\mu + 6\lambda = 36$ са

$$x_1 = \frac{18}{5} - x_3, \quad x_2 = -\frac{9}{5} - x_3, \quad x_4 = -\frac{6}{5}$$

за произволни x_3 и

$$v = \frac{18}{5}v_1 - \frac{9}{5}v_2 - \frac{6}{5}v_4 + x_3(-v_1 - v_2 + v_3).$$

Непосредствено се вижда, че $v_3 = v_1 + v_2$ и

$$v = \frac{18}{5}v_1 - \frac{9}{5}v_2 - \frac{6}{5}v_4.$$

Задача 4. *(а) Да се докаже, че сумата на две различни равнини през началото (т. е., линейни подпространства от размерност 2) в $\mathbb{R}^3$ е цялото пространство $\mathbb{R}^3$.*

(б) Каква е най-малката размерност на линейно пространство в което две линейни подпространства от размерност n се пресичат в една точка?

Решение: (а) Ако означим двете равнини с V_1 и V_2, имаме:

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) \tag{1}$$

По условие, $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$ и $\dim(V_1 \cap V_2) \leq 1$. Следователно

$$\dim(V_1 + V_2) \geq 3.$$

Оттук следва, че $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$.

(б) В този случай знаем, че $\dim V_1 = \dim V_2 = n$ и $\dim V_1 \cap V_2 = 0$. Съгласно (1),

$$\dim V_1 + V_2 = 2n.$$

Ако V_1 и V_2 са линейни подпространства в $\mathbb{R}^k$ то $V_1 + V_2$ е линейно подпространство на $\mathbb{R}^k$ и

$$k \geq \dim(V_1 + V_2) = 2n.$$

Задача 5. *Линейните подпространства V_1 и V_2 на $\mathbb{R}^4$ са зададени като пространствата от решения на хомогенни системи линейни уравнения*

$$V_1 : \left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. \qquad V_2 : \left| \begin{array}{ccccc} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

а $W_1 = l(a_1, a_2, a_3)$ и $W_2 = l(a_4, a_5)$ са линейни обвивки на векторите

$$a_1 = (1, 2, 3, 1), \quad a_2 = (2, 1, 3, 1), \quad a_3 = (-3, -2, -5, -2),$$

$$a_4 = (1, 2, 1, 0), \quad a_5 = (0, 0, 2, 1).$$

Да се намерят базиси на линейните пространства:

(а) $V_1 \cap V_2$ и $V_1 + V_2$;

(б) $W_1 \cap W_2$ и $W_1 + W_2$;

(в) $V_1 \cap W_1$ и $V_1 + W_2$;

Решение: (а) Сечението $V_1 \cap V_2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

получена чрез обединяване на уравненията на V_1 и V_2. Чрез елементарни преобразувания по редове към матрицата на коефициентите

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_4 \\ R_1 - R_4 \\ R_2 \\ R_3 - R_4 \\ R_5 - 2R_4 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -\frac{1}{4}R_4 \\ R_2 + \frac{1}{2}R_4 \\ R_3 + \frac{3}{4}R_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_4 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} R_1 - R_3 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

свеждаме хомогенната линейна система към

$$\left|\begin{array}{ll} x_1 & = -x_4 \\ x_2 & = 0 \\ x_3 & = 0 \end{array}\right.$$

с фундаментална система решения

$$b = (1, 0, 0, -1).$$

Следователно $V_1 \cap V_2$ има базис b.

За да намерим базис на $V_1 + V_2$ трябва да пресметнем първо базиси на V_1 и на V_2. Чрез елементарни преобразувания по редове към матрицата на коефициентите на хомогенната линейна система, задаваща V_1 получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 - 3R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оттук

$$\left|\begin{array}{lll} x_1 & = 7x_2 & -x_4 \\ x_3 & = -3x_2 & \end{array}\right.$$

и векторите

$$c_1 = (7, 1, -3, 0), \quad c_2 = (-1, 0, 0, 1)$$

образуват базис на V_1. Аналогично, чрез елементарни преобразувания по редове към матрицата на хомогенната линейна система, задаваща V_2 получаваме

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откъдето

$$\left|\begin{array}{lll} x_1 & = -x_3 & -x_4 \\ x_2 & = 0 & \end{array}\right.$$

и векторите

$$c_3 = (-1, 0, 1, 0), \quad c_4 = (-1, 0, 0, 1)$$

образуват базис на V_2. Сумата $V_1 + V_2 = l(c_1, c_2, c_3, c_4)$ се поражда от обединението на пораждащите системи на V_1 и V_2 и

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Непосредствено се вижда, че $c_2 = c_4$, така че c_1, c_2, c_3 образуват базис на $V_1 + V_2$.

(б) За да намерим базис на $W_1 + W_2 = l(a_1, \ldots, a_5)$ е необходимо да отделим максимална линейно независима подсистема на $a_1, \ldots, a_5$. Един от начините за решаване на тази задача е чрез образуване на подходящи линейни комбинации на $a_1, \ldots, a_5$, равни на нулевия вектор.

$$\begin{array}{r} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} a_1 \\ a_2 - 2a_1 \\ a_3 + 3a_1 \\ a_4 - a_1 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

От последната матрица се вижда, че $a_5 = -(a_4 - a_1) = a_1 - a_4$, така че $W_1 + W_2 = l(a_1, a_2, a_3, a_4)$. По-нататък, матрицата

$$\begin{array}{r} a_1 \\ a_1 + a_2 + a_3 \\ a_1 - a_4 \\ a_2 - 2a_1 + 3(a_1 + a_2 + a_3) \end{array} \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

е от ранг 4, така че $\dim(W_1 + W_2) = \mathrm{rk}(a_1, \ldots, a_4) = 4$ и $a_1, \ldots, a_4$ е базис на $W_1 + W_2$. Съгласно линейната зависимост $a_1 - a_4 - a_5 = \mathcal{O}$, произволна четворка вектори измежду $a_1, \ldots, a_5$, съдържаща a_2 и a_3 е базис на $W_1 + W_2$.

Друг начин за избор на максимална линейно независима подсистема на $a_1, \ldots, a_5$ е чрез намиране на коефициентите $x \in M_{5 \times 1}$ на линейните комбинации на $a_1, \ldots, a_5$, равни на нулевия вектор. Наредените петорки x са решенията на хомогенната линейна система уравнения с матрица от коефициенти

$$A = \left(\begin{array}{ccccc} a_1^t & a_2^t & a_3^t & a_4^t & a_5^t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

С елементарни преобразувания по редове към A получаваме

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - R_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_4 \\ R_2 \\ R_3 - R_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ R_3 - 3R_2 \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ R_2 - \frac{1}{2}R_4 \\ R_3 + \frac{3}{2}R_4 \\ \frac{1}{2}R_4 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Следователно $x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5$, откъдето $0 = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = x_1 + x_4$, така че решенията на тази хомогенна линейна система са $(-x_4, 0, 0, x_4, x_4)$ за произволни x_4. С други думи, единствената линейна комбинация на $a_1, \ldots, a_5$, равна на нулевия вектор е $-a_1 + a_4 + a_5 = \mathcal{O}$ с точност до пропорционалност. В резултат, произволна четворка вектори измежду $a_1, \ldots, a_5$, не съдържаща едновременно a_1, a_4 и a_5 е базис на $W_1 + W_2$.

Да забележим, че a_1, a_2, a_3 са линейно независими, а оттам и базис на W_1. Аналогично, a_4 и a_5 не са пропорционални и образуват базис на W_2. Следователно

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2) = 3 + 2 - 4 = 1.$$

За да намерим базис на $W_1 \cap W_2$ трябва да представим W_1 и W_2 като пространства от решения на хомогенни линейни системи. За целта образуваме хомогенната линейна система с матрица от коефициенти

$$A_1 = \left(\begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right).$$

Чрез елементарни преобразувания по редове

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & -5 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_1 + R_2 + R_3 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ R_3 \\ R_2 + 3R_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} R_1 - 2R_2 + R_3 \\ \\ \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

свеждаме към

$$x_1 = -x_3,$$

$$x_2 = -x_3,$$

$$x_4 = 0$$

и намираме базис $(1, 1, -1, 0)$ на пространството от решения. Следователно W_1 е пространството от решения на хомогенното линейно уравнение

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Хомогенните линейни уравнения, задаващи W_2 са базис на пространството от решения на хомогенната линейна система с матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нейното общо решение е

$$\left| \begin{array}{lcrr} x_1 & = & -2x_2 & -x_3 \\ x_4 & = & & -2x_3 \end{array} \right.$$

и векторите $(-2, 1, 0, 0)$, $(-1, 0, 1, -2)$ образуват базис на пространството от решения. В резултат, W_2 е пространството от решения на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrr} 2x_1 & -x_2 & & & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Сечението $W_1 \cap W_2$ е пространството от решения на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ 2x_1 & -x_2 & & & = 0 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

чиито уравнения се получават чрез обединяване на уравненията на W_1 и W_2. Решенията на тази система са $(x_1, 2x_1, 3x_1, x_1)$ за произволно x_1 и векторът $(1, 2, 3, 1)$ е базис на $W_1 \cap W_2$.

(в) Сечението $V_1 \cap W_1$ е пространството от решения на хомогенната линейна система уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = 0 \\ & 3x_2 & +x_3 & & = 0 \\ x_1 & -4x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. ,$$

получена чрез обединение на уравненията на W_1 и V_1. Нейното решение е

$$(-4x_2, x_2, -3x_2, 11x_2)$$

и векторът $(-4, 1, -3, 11)$ е базис на $V_1 \cap W_1$.

За да намерим базис на $V_1 + W_2$ използваме, че $V_1 = l(c_1, c_2)$, $W_1 = l(a_4, a_5)$. Матриците

$$\begin{array}{r} c_1 \\ c_2 \\ a_4 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r} c_2 \\ c_1 + 7c_2 \\ a_4 + c_2 \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} c_2 \\ c_1 + 7c_2 \\ a_4 + c_2 - 2(c_1 + 7c_2) \\ a_5 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

са от максимален ранг 4, така че векторите c_1, c_2, a_4, a_5 са линейно независими и образуват базис на $V_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.