22.05.2013г. ДИС - упражнение

$\sum$ редове

$$\sum_{n=-1}^{\infty} a_n$$

$a_n > 0$

Th

1. ако реда е сх то $a_n \to 0$
   ако $a_n \not\to 0$ то редът е рх.
2. $0 \le a_n \le b_n$ при $n \ge 0$
   рх <= сх
   сх => рх
3. ако $a_n = \lambda_n b_n$ (a_n може да бъде представено като $\lambda_n b_n$)
   ако $\lambda_n \to \ell$ и границата $=0$, ако II е сх то и I е сх.
   и границата $\ne 0$ I <=> II, $\sum a_n \sim \sum b_n$
   и границата $= \infty$ I рх => II рх

$$\sum \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^{10}-n}}$$

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^{10}-n}} = \frac{n}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt[5]{1-\frac{1}{n^3}}} \sim \frac{1}{n} \text{ (хармоничния ред)}$$

$\sum \frac{1}{n^\lambda}$ $\quad \lambda \le 1$ рх
$\quad \lambda > 1$ сх

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$-1 < q < 1$

$\sum n^k q^n$ сх

$k > 0$

$-1 < q < 1$

$S_{2n} - \underset{\downarrow\ 0}{S_n} \geq a > 0$ виждало се че този ред не може да бъде сх.

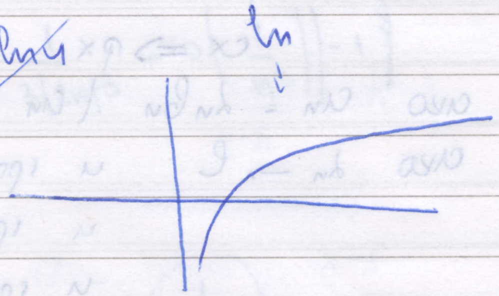
$\sum \frac{1}{n}$

да разгледаме

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln(n+1) - \ln n\right) =$$

$$\cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \cancel{\ln 4} - \cancel{\ln 3} + \ln 5 - \cancel{\ln 4}$$

$\cancel{\ln 3 - \ln 2}$



$$S_n = \ln(n+1) \longrightarrow +\infty$$

$\Rightarrow$ редът е разходящ.

$n \quad \xi_n \quad n+1$

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{\xi_n}\left((n+1) - n\right) = \frac{1}{\xi_n} < \frac{1}{n}$$

(ще изп. Т-ма на Лагранж)

$\Rightarrow$ редът е разходящ.

$$\frac{1}{x^\alpha}$$

$$\sum \left(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{1^\alpha} - \cancel{\frac{1}{2^\alpha}} + \cancel{\frac{1}{2^\alpha}} - \cancel{\frac{1}{3^\alpha}} + \cancel{\frac{1}{3^\alpha}} - \cancel{\frac{1}{4^\alpha}} = 1 - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} = -\alpha \xi^{-\alpha-1} \cdot 1$$

$$\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} = \frac{\alpha}{\xi^{\alpha+1}} \geq \underset{\text{сх}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha+1}}} \qquad \alpha > 0$$

$\sum \frac{1}{(n+1)^p}$ $p>1$ дали е сх или ?

$\Leftarrow \frac{1}{(n+1)^p} = \underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^p}_{\downarrow\, 1} \cdot \frac{1}{n^p} \sim \frac{1}{n^p}$

задача

$\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\downarrow\, 0} \right)$

ако вместо $\frac{\pi}{2}$ имаше, каквото и да е др число, нещата

стават очевидни, но при $\frac{\pi}{2}$ имаме повод за размисъл.

$\sum \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{n}{n+1} \right)$

за да приложим Th за крайните нараствания преобразуваме

$\underbrace{\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{1+\frac{1}{n}}}_{f(x)=}$ $\quad x = \frac{1}{n}$

тук $n = \infty$, но ние взимаме $\left(\frac{1}{x}\right)$ реципрочната, т.е. заместихме ∞ със 0

$f(0) = \frac{\pi}{2}$ такa не ни харесва

на ново:

$f(1) =$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{1+x}}{x^{\alpha}} \longrightarrow \qquad 1 \leftarrow 2$$

Понитал

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{(1+x)^2}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{(1+x)\sqrt{2x+x^2}\,\alpha \cdot x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\underset{\downarrow_0}{x^{\alpha-\frac{1}{2}}}\underset{\downarrow_1}{(1+x)}\underset{\downarrow_2}{\sqrt{2+x}}\,\alpha}$$

D не ни харесва, при $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{1+x}}{x^{\frac{1}{2}}} \longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha_n = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{n}{n+1}\right)}{\frac{1}{n^{1/2}}} \longrightarrow A \neq 0$$

някакъв пример:

$$\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}} \xrightarrow[\alpha = ?]{} A \neq 0$$

$$\alpha_n = \frac{f(n)}{\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}} \longrightarrow A \neq 0$$

$$f_n = \alpha_n \frac{1}{n^{\alpha}} \sim n^{\alpha}$$

задача   дали е сх или рх ?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1\right)$$

полагаме:

$\frac{1}{n}=x$

$$\frac{1}{x}\ln\frac{\frac{2}{x}+1}{\frac{2}{x}-1}-1=\frac{1}{x}\ln\frac{2+x}{2-x}-\frac{x}{x}=\frac{\ln\frac{2+x}{2-x}-x}{x}=$$

$$=\ln\sqrt[x]{\frac{2+x}{2-x}}$$

~~Лопитал~~

$$\cancel{\frac{2-x}{2+x}\cdot\left(\frac{2+x}{2-x}\right)'-1}=\cancel{\frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{2-x+2+x}{(2-x)^2}-1}=\cancel{\frac{-2x}{4-x^2}-1}=$$

$$=\cancel{\frac{-4+x^2-2x}{4-x^2}}=\cancel{\frac{x^2-2x+4-8}{4-x^2}}=\cancel{\frac{(x-2)^2-8}{4-x^2}}$$

Лопитал

$$\frac{2-x}{2+x}\cdot\frac{2+x+2-x}{(2-x)^2}-1=$$

друг начин

Тейлър

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$n.\ln\left|\frac{2+\frac{1}{2n}}{2-\frac{1}{2n}}\right| - 1 \Big\} = n\left[\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1-\frac{2}{2n}\right) - 1\right]$$

ако вземем $x = \frac{x}{x}$

$$n\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(2n)^2} + \frac{1}{3(2n)^3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2(2n)^2} + \frac{1}{3(2n)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1\Big\}$$

$$1 + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1$$

$$a_n = \frac{1}{12}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\frac{a_n}{n^2} = \frac{1}{12} + \frac{o\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \to 0$$

задача

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1+\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}} \to 0$$

общия член клони към - 0

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

полагаме $\frac{1}{\sqrt{n}} = x$

накрая трябва да се замести