

## 27. Теорема на Лайбниц-Нютон. Правило за пресмятане на определен интеграл

Галина Люцканова

20 септември 2013 г.

**Теорема 27.1 ( на Лайбниц-Нютон ) :** Нека  $f(t)$  е непрекъснатата в интервала  $[a, b]$  и  $x \in [a, b]$  и  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , то  $F(x)$  е диференцируема и  $F'(x) = f(x)$ .

### Доказателство:

Тъй като  $f(t)$  е непрекъснатата в интервала  $[a, b]$ , то  $f(t)$  е непрекъснатата в интервала  $[a, x] \subseteq [a, b]$ , то  $f(t)$  е интегрируема в интервала  $[a, x]$ . Тогава можем да разгледаме  $\int_a^x f(t)dt$ . Тя е функция само на  $x$  ( виж предната тема ), нека да означим  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ . Нека да разгледаме диференчното частно:

$$\begin{aligned} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt}{h} = \\ &= \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \end{aligned} \tag{1}$$

Но по теоремата за средните стойности:

$$\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)(x - (x+h)) = f(\xi)h$$

като  $\xi \in [x, x + h]$  и след като заместим в (1):

$$\frac{F(x + h) - F(x)}{h} = \frac{f(\xi)h}{h} = f(\xi),$$

Да пуснем  $h \rightarrow 0$ . Тъй като  $x \leq \xi \leq x + h$ , то  $\xi \rightarrow x$  и тогава:

$$F'(x) = \lim_{x \rightarrow F(x+h)-F(x)} h = \lim_{x \rightarrow x_0} f(\xi) = f(x) \blacksquare$$

**Формула на Лайбниц-Нютон** Нека  $f(t)$  е непрекъснатата в интервала  $[a, b]$  и  $x \in [a, b]$  и  $\Phi$  е примитивна за  $f(x)$ , то тогава:

$$\int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) = |\Phi(x)|_a^b$$

**Доказателство:**

Понеже  $\Phi$  е примитивна на  $f(x)$  т.е.  $\Phi'(x) = f(x)$ . Нека  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .

От теоремата на Лайбниц-Нютон следва, че  $F(x)$  също е примитивна на  $f(x)$  т.е.  $F'(x) = f(x)$ . Така получаваме  $\Phi'(x) = f(x) = F'(x)$ , т.е.  $F(x) = \Phi(x) + C$ . Тогава  $F(a) = \Phi(a) + C$ . Но от дефиницията на  $F(x)$  имаме, че:

$$F(a) = \int_a^a f(x) = f(\xi)(a - a) = 0$$

Така изкарахме, че:

$$0 = \Phi(x) + C \Rightarrow C = -\Phi(a)$$

т.е.  $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$ . Понеже искаме да сметнем  $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ , то нека да го заместим в  $F(x) = \Phi(x) - \Phi(a)$ :

$$F(b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

И така получихме, каквото искахме:

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a). \blacksquare$$