23.3.Интегриране на някои ирационални функции

Галина Люцканова

18 септември 2013 г.

Ирационална функция е рационална функция, в която е позволено повдигането на произволна степен.

Важно нещо е, че не всички интеграли могат да бъдат пресметнати явно (чрез формулите за интегриране). Обикновено целта при пресмятане на ирационални функции е да ги сведем към рационални. Но стига толкова приказки да се захващаме с класове функции, които могат да бъдат пресметнати:

1. Първо ще се занимаем с ирационална функция, в които участват променливата x и няколко нейни радикала (т.е. $\sqrt[q]{x^p}$, където q е цяло положително число, p е цяло число) т.е. говорим за следната задача:

$$I = \int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})dx,$$

   където p_i,q_i са цели числа за $1 \leq i \leq n$ и без ограничение на общността можем да приемем, че $q_i > 0$ за $1 \leq i \leq n$. Функции от този вид винаги могат да бъдат интегрирани. Нека k е най-малкото общо кратно на $q_1, q_2, ..., q_n$ и тогава $k = c_i q_i$, където очевидно c_i е цяло. Нека положим $x = t^k$ следователно $x^{\frac{1}{k}} = t$. За произволен радикал ще получим

$$x^{\frac{p_i}{q_i}} = x^{p_i} x^{\frac{1}{q_i}} = x^{\frac{kp_i}{k}} x^{\frac{c_i}{c_i q_i}} = (x^{\frac{1}{k}})^{kp_i} x^{\frac{c_i}{k}} = t^{kp_i} (x^{\frac{1}{k}})^{c_i} = t^{kp_i} t^{c_i} = \\ = t^{kp_i + c_i}.$$

Нека да означим $m_i = kp_i + c_i$. Тъй като k, p_i, c_i са цели числа, то и m_i е също цяло число. Така преобразувахме подинтегралната функция до рационална и получаваме следния интеграл:

$$I = \int R(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})dx = \int R(t^k, t^{m_1}, t^{m_2}, ..., t^{m_n})kt^{k-1}dt,$$

2. Същият метод може да се ползва при функции от по-сложен вид, а именно при интегриране на функции от вида:

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right)dx,$$

Предполагам, че ви преви впечатление, че единствената разлика между предната и тази задача е, че радикалите на x са заменени с радикали на някоя дробно-линейна функция на x. Да напомня отново, чеp_i,q_i са цели числа за $1 \leq i \leq n$ и без ограничение на общността можем да приемем, че $q_i > 0$ за $1 \leq i \leq n$. Нека отново k е най-малкото общо кратно на числата $q_1, q_2, ..., q_n$. В този случай правим полагането $t^k = \frac{ax+b}{cx+d}$ и можем да изразим x чрез t. Тогава получаваме:

$$\begin{aligned} t^k &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ (cx+d)t^k &= ax+b \\ ct^kx + dt^k &= ax+b \\ (ct^k - a)x &= b - dt^k \\ x &= \frac{b-dt^k}{ct^k-a} \end{aligned}$$

След полагането както може да се види от доказателството от предната част, ще получим $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_i}{q_i}} = t^{m_i}$. Така преобразувахме подинтегралната функция до рационална и получаваме следния интеграл:

$$I = \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx =$$

$$= \int R\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{m_1}, t^{m_2}, ..., t^{m_n}\right) d\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}\right) =$$

$$= \int R\left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}, t^{m_1}, t^{m_2}, ..., t^{m_n}\right) \left(\frac{b-dt^k}{ct^k-a}\right)' dt$$

3. Интеграли, съдържащи квадратична ирационалност от квадратен двучлен или по-просто интеграли от вида:

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

като променливата x и радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ са подложени само на рационални действия. Интеграли от този вид винаги могат да бъдат пресметнати със субституциите на Ойлер. Тяхната идея е следната да положим корена като някаква линейна функция на x, но такава линейна функция, че да можем x да се изрази спрямо t с дробнолинеен израз. Да види как става това:

   (a) Първа субституция на Ойлер. Тя се използва, ако $a > 0$ и се дава с равенството:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$$

   Нека да изразим x чрез t:

$$\begin{aligned} \sqrt{ax^2+bx+c} &= \sqrt{a}x + t \\ ax^2+bx+c &= ax^2 + 2\sqrt{a}xt + t^2 \\ bx + c &= 2\sqrt{a}xt + t^2 \\ (b - 2\sqrt{a}t)x &= t^2 - c \\ x &= \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \end{aligned}$$

   И какво хубаво нещо излезе от това полагане? Получихме:

$$x = \frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t = \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t,$$

което свежда нашия интеграл до:

$$
\begin{aligned}
I &= \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \\
&= \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}, \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t\right) d\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\right) = \\
&= \int R\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}, \sqrt{a}\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t} + t\right) \left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\right)' dt
\end{aligned}
$$

Полученият интеграл е интеграл от рационална функция, защото аргументите на функцията R са рационални и защото производната на рационална функция (в случая $\left(\frac{t^2-c}{b-2\sqrt{a}t}\right)'$) е също рационална функция.

(б) Втора субституция на Ойлер. Тя се използва, ако $c > 0$ и се дава с равенството:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$$

Нека да изразим x чрез t:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{ax^2+bx+c} &= xt + \sqrt{c} \\
ax^2+bx+c &= x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c \\
ax^2+bx &= x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} \\
ax+b &= xt^2 + 2t\sqrt{c} \\
(a-t^2)x &= 2t\sqrt{c} - b \\
x &= \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}
\end{aligned}
$$

Така изкарахме:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} \\
\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c} &= \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}t + \sqrt{c},
\end{aligned}
$$

което свежда нашия интеграл до:

$$
\begin{aligned}
I &= \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx = \\
&= \int R\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}t+\sqrt{c}\right) d\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right) = \\
&= \int R\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}t+\sqrt{c}\right)\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)' dt
\end{aligned}
$$

Полученият интеграл е интеграл от рационална функция, защото аргументите на функцията R са рационални и защото производната на рационална функция (в случая $\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}\right)'$) е също рационална функция.

(в) Трета субституция на Ойлер. Тя се използва, ако $D = b^2 - 4ac > 0$,т.е. когато уравнението $ax^2+bx+c=0$ има 2 реални различни корена x_1 и x_2, което означава, че:

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Трета субституция на Ойлер се дава с равенството:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1)$$

Нека да изразим x чрез t:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} &= t(x-x_1) \\
a(x-x_1)(x-x_2) &= t^2(x-x_1)^2 \\
a(x-x_2) &= t^2(x-x_1) \\
ax - ax_2 &= t^2x - t^2x_1 \\
(a-t^2)x &= ax_2 - t^2x_1 \\
x &= \frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}
\end{aligned}
$$

Така изкарахме:

$$x = \frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = t(x-x_1) = t(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2} - x_1),$$

което свежда нашия интеграл до:

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx =$$
$$= \int R\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}, t(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2} - x_1)\right) d\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}\right) =$$
$$= \int R\left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}, t(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2} - x_1)\right) \left(\frac{ax_2 - t^2x_1}{a-t^2}\right)' dt$$

Полученият интеграл е интеграл от рационална функция, защото аргументите на функцията R са рационални и защото производната на рационална функция (в случая $\left(\frac{ax_2-t^2x_1}{a-t^2}\right)'$) е също рационална функция.

И тук аз ще заявя, че със субстутуциите на Ойлер можем да сметнем всеки интеграл от вида:

$$I = \int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx,$$

като променливата x и радикалът $\sqrt{ax^2+bx+c}$ са подложени само на рационални действия.

Все пак да го проверим:

(а) $a, c > 0$ -можем да ползваме първа и втора субституция на Ойлер със сигурност

(б) $a > 0 > c$ - можем да ползваме първа и трета субституция на Ойлер

(в) $c > 0 > a$ - можем да ползваме втора и трета субституция на Ойлер

(г) $a, c < 0$ - тук трябва да ползваме трета субституция на Ойлер. Добре, а ако се случи се дискриминантата е отрицателна? Еми тогава очевидно $ax^2 + bx + c < 0$, което пък означава няма допустимото множество не съдържа реални числа.

4. Интеграли от биномен диференциал (диференциален бином) или интеграли от вида:

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

където коефициентите a, b са произволни реални числа,а степенните показатели m, n, p са произволни рационални числа.

(а) Нека p е цяло число. Тогава ние получаваме интеграл от първи тип (с тях започнахме подтемата)

(б) Нека p не е цяло число, но $\frac{m+1}{n}$ е цяло число. Тогава правим субституцията $t = a + bx^n$. Сега да изразим x спрямо t:

$$\begin{aligned}
t &= a + bx^n \\
t - a &= bx^n \\
bx^n &= t - a \\
x^n &= \frac{t-a}{b} \\
x &= \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} \\
dx &= d\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\left(\frac{t-a}{b}\right)' = \frac{1}{n}\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{b}dt
\end{aligned}$$

Нека сега да заместим в интеграла:

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx = \int \left(\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^m t^p \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1}\frac{1}{nb}dt =$$

$$= \frac{1}{nb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} t^p \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{1}{n}-1} dt = \frac{1}{nb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m}{n}+\frac{1}{n}-1} t^p dt =$$

$$= \frac{1}{nb}\int\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^p dt$$

Понеже поискахме $\frac{m+1}{n}$ да е цяло число, то и $\frac{m+1}{n} - 1$ ще е цяло число, което пък от своя страна означава, че изразът $\left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}$ ще е рационален, та в случая оставаме само с един ирращионален израз, а именно t^p, където p е рационално число. Тогава $p = \frac{k}{l}$, където k и l са цели числа и нека $l > 0$. За да решим интеграла, остава да направим последно полагане, а именно $t = u^l$(тогава $t^p = (u^l)^p = (u^l)^{\frac{k}{l})} = u^{\frac{lk}{l})} = u^k$ и тогава получаваме:

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{nb}\int \left(\frac{t-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} t^p dt =$$
$$= \frac{1}{nb}\int \left(\frac{u^l-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} u^k d(u^l) = \frac{l}{nb}\int \left(\frac{u^l-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} u^{l+k-1} du$$

Тъй като поискахме $\frac{m+1}{n}$ да е цяло число, така нашия израз $\left(\frac{u^l-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1}$ е рационален и понеже u^{l+k-1} е рационален (k и l са цели числа), то получихме, че цялата функция че цялата подинтегрална функция е рационална, а такива интеграли вече можем да смятаме.

(в) Нека p не е цяло число, $\frac{m+1}{n}$ не е цяло число, но $\frac{m+1}{n}+p$ е цяло число. Тогава нека да извадим x^n пред скоби и получаваме:

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^m \left(x^n\left(ax^{-n}+b\right)\right)^p dx =$$
$$= \int x^m(x^n)^p \left(\left(ax^{-n}+b\right)\right)^p dx = \int x^{m+np}\left(\left(ax^{-n}+b\right)\right)^p dx$$

Сега нека да положим $m_1 = m+np$, $n_1 = -n$, $p_1 = p$ и така получаваме:

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p dx = \int x^{m+np}\left(\left(ax^{-n}+b\right)\right)^p dx = \int x^{m_1}\left(\left(ax^{n_1}+b\right)\right)^{p_1}$$

Сега ще сведем задачата до предния случай, за тази цел трябва да докажем, че $\frac{m_1+1}{n_1}$ е цяло число. Да го проверим:

$$\frac{m_1+1}{n_1} = \frac{m+np+1}{-n} = \frac{m+np+1}{-n} = -\left(\frac{m+1}{n}+p\right)$$

Понеже в този случай сме поискали $\frac{m+1}{n}+p$ да е цяло число, то получихме, че $\frac{m_1+1}{n_1}$ ще е цяло число и взимайки впредвид предния случай, ние знаем, че полагането $ax^{-n}+b=t$ ще ни доведе до интеграл, който можем да сметнем.

Изобщо при пресмятането на интеграли, смятаме интеграла за пресметнат като намерим отговор, изразен чрез една или няколко елементарни функции. Но не винаги интегралите могат да се сметнат по такъв начин. Доказано е, че останалите интеграли от диференциален бином, неспадащи към нито един от тези три случая, не могат да бъдат изразени чрез елементарни функции. Разбира се има още много такива интеграли като например:

$$\int e^{x^2}dx, \int \sin x^2 dx, ...$$

Така че не винаги като не можете да решите даден интеграл, това се дължи на някакъв ваш пропуск. Просто понякога интегралите не могат да се решат явно.