23.1.Интегриране на рационални функции

Галина Люцканова

18 септември 2013 г.

Започваме с припомняне на някои от училищните знания:

Определение 23.1.1: Полином от n-та степен наричаме функция от вида:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + .. + a_ix^{n-i} + .. + a_{n-1}x + a_n,$$

където $a_i \in \mathbb{R}$ за $1 \leq i \leq n$ и $a_0 \neq 0$.

Определение 23.1.2: Нека P_n и Q_m са полиноми съответно от степен n и m. Тогава рационална функция наричаме функция от вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$$

Определение 23.1.3: Нека P_n и Q_m са полиноми съответно от степен n и m. Тогава правилна рационална функция наричаме функция от вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

където $n < m$.

Определение 23.1.4: Нека P_n и Q_m са полиноми съответно от степен n и m. Тогава правилна рационална функция наричаме функция от вида:

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

където $n \geq m$.

Предполагам, че е ясно, че всяка неправилна рационалнна функция може да се представи като полином + правилна рационална функция т.е.

$$R(x) = P_{m-n}(x) + \frac{P_s(x)}{Q_m(x)} = P_{m-n}(x) + R_1(x),$$

където $s < m$, а P_{m-n} е полином от степен $n - m$.

Теорема 23.1.1: Всеки полином може да се представи във вида:

$$P_n(x) = a_0(x - x_1)^{\alpha_1}...(x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}..(x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_m},$$

където $\alpha_i,\ \beta_j \in \mathbb{N}$, за $i = 1..k,\ j = 1..m$. Като разбира се полиномите полиномите от втора степен са неразложими т.е. $D = p_j^2 - 4q_j < 0$ и $\alpha_1 + ... + \alpha_k + 2(\beta_1 + ... + \beta_m) = n$. Освен това всеки полином има единствено такова представяне. Тази теорема е следствие от Основна теорема на алгебрата и както вероятно се досещате, няма да я доказваме, защото се доказва в курса по Линейна алгебра.

От тази теорема следва, че $R_1(x)$ има представяне от вида:

$$R_1(x) = \frac{P_s(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{\beta_l}}$$

Теорема 23.1.2: Нека $R_1(x) = \frac{P_s(x)}{Q_m(x)}$ е правилна рационална функция:

$$R_1(x) = \frac{P_s(x)}{(x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k}(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + p_lx + q_l)^{\beta_l}}$$

Тогава тя може да се представи във вида:

$$
\begin{array}{rcl}
R_1(x) & = & \left[\frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} \right] + \\
& + & \left[\frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \cdots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-x_2)^{\alpha_2}} \right] + \\
& + & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + & \left[\frac{A_{k1}}{x-x_k} + \frac{A_{k2}}{(x-x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}} \right] + \\
& + & \left[\frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{1\beta_1}x+N_{1\beta_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}} \right] + \\
& + & \left[\frac{M_{21}x+N_{21}}{x^2+p_2x+q_2} + \frac{M_{22}x+N_{22}}{(x^2+p_2x+q_2)^2} + \cdots + \frac{M_{2\beta_2}x+N_{2\beta_2}}{(x^2+p_2x+q_2)^{\beta_2}} \right] + \\
& + & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots + \\
& + & \left[\frac{M_{l1}x+N_{l1}}{x^2+p_lx+q_l} + \frac{M_{l2}x+N_{l2}}{(x^2+p_lx+q_l)^2} + \cdots + \frac{M_{l\beta_1}x+N_{l\beta_1}}{(x^2+p_lx+q_l)^{\beta_l}} \right] ,
\end{array}
$$

където A_{ij}, M_{st}, N_{st} са неизвестни реални константи за $1 \leq i \leq k$,$1 \leq j \leq \alpha_i$, $1 \leq s \leq l$, $1 \leq t \leq \beta_s$,. Те се намират по метода на неопределените коефициенти

1. привеждаме дясната част под общ знаменател
2. умножаваме двете страни с така получения общ знаменател
3. групираме мономите от една и съща степен и изваждаме коефициентите им пред скоби
4. приравняваме коефициентите от двете страни на тъждеството
5. решаваме системата и намираме неизвестните коефициенти

Разбира се можем да запишем израза горе съкратено:

$$R_1(x) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{s=1}^{l} \sum_{t=1}^{\beta_s} \frac{M_{st}x + N_{st}}{(x^2 + p_s x + q_s)^t}$$

Пример 23.1.1: Така получихме, следния общ вид за една рационална функция:

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j} + \sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{\beta_s} \frac{M_{st}x + N_{st}}{(x^2+p_sx+q_s)^t},$$

където $P_{m-n}(x)$ е полином. Нека $n_1 = m-n$. Сега трябва да интегрираме тази функция:

$$\int R(x)dx = \int P_{n_1}(x)dx + \int \left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}\right]dx + \int \left[\sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{\beta_s} \frac{M_{st}x + N_{st}}{(x^2+p_sx+q_s)^t}\right]dx =$$
$$= \int P_{n_1}(x)dx + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\alpha_i} \int \frac{A_{ij}}{(x-x_i)^j}dx + \sum_{s=1}^{l}\sum_{t=1}^{\beta_s} \int \frac{M_{st}x + N_{st}}{(x^2+p_sx+q_s)^t}dx,$$

Т.е. за намерим интеграл от рационална функция трябва да можем да смятаме интегралите:

$$I_1 = \int P_{n_1}(x)dx$$
$$I_2 = \int \frac{A}{(x-a)^n}dx$$
$$I_3 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx,$$

Надявам се, че сте забелязали, че съм сменила наименованията на константите за по-кратко записване. Сега да започнем с най-лесния интеграл:

$$I_1 = \int P_{n_1}(x)dx = \int [a_0x^{n_1} + a_1x^{n_1-1} + .. + a_ix^{n_1-i} + .. + a_{n_1-1}x + a_{n_1}]dx =$$
$$= \int \left[\sum_{i=0}^{n_1} a_ix^{n_1-i}dx\right] = \sum_{i=0}^{n} \int a_ix^{n_1-i}dx = \sum_{i=0}^{n_1} a_i \int x^{n_1-i}dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{n_1} a_i \frac{1}{n_1-i+1}x^{n_1-i+1} + C = \sum_{i=0}^{n_1} \frac{a_i}{n_1-i+1}x^{n_1-i+1} + C$$

Сега да сметнем I_2 при $n=1$:

$$I_2 = \int \frac{A}{(x-a)}dx = A\int \frac{1}{(x-a)}dx = A\int \frac{1}{(x-a)}d(x-a) =$$
$$= A\ln|x-a| + C$$

Следващото, което ще сметнем е I_2 при $n \neq 1$:

$$I_2 = \int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\int \frac{1}{(x-a)^n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) =$$
$$= \frac{A}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$$

Сега предполагам сте разбрали защо има разлика дали $n = 1$ или $n \neq 1$.

Следващият интеграл, който трябва да сметнем е:

$$I_3 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx,$$

За тази цел да разгледаме знаменателя отделно:

$$x^2+px+q = x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4} + q - \frac{p^2}{4} = \left(x+\frac{p}{2}\right) + q - \frac{p^2}{4}$$

Нека да положим $t = x + \frac{p}{2}$ или $x = t - \frac{p}{2}$. Това полагане е известно като субституция на Хорнер. Тогава за знаменателят получаме:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right) + q - \frac{p^2}{4} = t^2 + q - \frac{p^2}{4} == t^2 + \frac{4q-p^2}{4}$$

Понеже знаем, че полиномът x^2+px+q е неразложим, то $D = p^2-4q < 0$. Нека $d^2 = \frac{4q-p^2}{4} \geq 0$. Сега сведохме изходния интеграл до:

$$I_3 = \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t^2+d^2)^n}d\left(t-\frac{p}{2}\right) = \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{(t^2+d^2)^n}dt =$$
$$= \int \frac{Mt+N-M\frac{p}{2}}{(t^2+d^2)^n}dt = \int \frac{Mt}{(t^2+d^2)^n}dt + \int \frac{N-M\frac{p}{2}}{(t^2+d^2)^n}dt =$$
$$= M\int \frac{t}{(t^2+d^2)^n}dt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}dt$$

1. Нека да пресметнем интеграла I_3 при $n = 1$:

$$I_3 = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = M\int \frac{t}{t^2+d^2}dt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{t^2+d^2}dt$$

Сега за да сметнем първия интеграл внасяме t под знака на диференциала, а за втория прилагаме от предната следната формула (доказана е в тема 22):

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+C$$

Така получаваме:

$$\begin{aligned}
I_3 &= M\int \frac{t}{t^2+d^2}dt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{t^2+d^2}dt = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{1}{t^2+d^2}d(t^2) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{d}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{d}\right) + C = \\
&= \frac{M}{2}\int \frac{1}{t^2+d^2}d(t^2+d^2) + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\frac{1}{d}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{d}\right) + C = \\
&= \frac{M}{2}\ln(t^2+d^2) + \frac{N-M\frac{p}{2}}{d}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{d}\right) + C
\end{aligned}$$

Сега остава да не забравим да заместим $t = x + \frac{p}{2}$ и $d = \sqrt{\frac{4q-p^2}{4}} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{M}{2}\ln\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right] + \frac{N-M\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}}\right) + C = \\
&= \frac{M}{2}\ln\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right] + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

2. Нека $n \neq 1$.

$$I_3 = M\int \frac{t}{(t^2+d^2)^n}dt + \left(N - M\frac{p}{2}\right)\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}dt$$

Сега ще сметнем двата интеграла по-отделно. За да сметнем първия интеграл внасяме t под знака на диференциала:

$$\begin{aligned}
J &= \int \frac{t}{(t^2+d^2)^n}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}d(t^2) == \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t^2+d^2)^n}d(t^2+d^2) = \\
&= \frac{1}{2}\int (t^2+d^2)^{-n}d(t^2+d^2) = \frac{1}{2(1-n)}(t^2+d^2)^{1-n} + C,
\end{aligned}$$

Последното, което остана да сметнем е:

$$K_n = \int \frac{1}{(t^2+d^2)^n} dt$$

За целта ще заместим $1 = \frac{d^2+t^2-t^2}{d^2}$

$$\begin{aligned}
K_n &= \int \frac{1}{(t^2+d^2)^n} dt = \frac{1}{d^2} \int \frac{d^2+t^2-t^2}{(t^2+d^2)^n} dt = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(\int \frac{d^2+t^2}{(t^2+d^2)^n} dt - \int \frac{t^2}{(t^2+d^2)^n} dt \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(\int \frac{1}{(t^2+d^2)^{n-1}} dt - \int t \frac{t}{(t^2+d^2)^n} dt \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \int t \frac{t}{(t^2+d^2)^n} dt \right)
\end{aligned}$$

Сега внасяме t под знака на диференциала във втория интеграл и след това правим интегриране по части:

$$\begin{aligned}
K_n &= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \int t \frac{t}{(t^2+d^2)^n} dt \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{1}{2} \int \frac{t}{(t^2+d^2)^n} dt^2 \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{1}{2} \int t(t^2+d^2)^{-n} d(t^2+d^2) \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)} \int t d(t^2+d^2)^{1-n} \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{1}{2(1-n)} \left[t(t^2+d^2)^{1-n} - \int (t^2+d^2)^{1-n} dt \right] \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{t(t^2+d^2)^{1-n}}{2(1-n)} + \frac{1}{2(1-n)} \int (t^2+d^2)^{1-n} dt \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(K_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+d^2)^{n-1}} + \frac{1}{2(1-n)} K_{n-1} + D \right) = \\
&= \frac{1}{d^2} \left(\left(1 + \frac{1}{2(1-n)} \right) K_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+d^2)^{n-1}} + D \right) = \\
&= \frac{3-2n}{2d^2(1-n)} K_{n-1} - \frac{t}{2d^2(1-n)(t^2+d^2)^{n-1}} + E
\end{aligned}$$

Така получихме, че $K_n = F(t) + GKn - 1$ и можем рекурентно на пресмятаме интегралите от по-ниските степени. За ваша радост това нямам намерение да го правя, тъй като записването няма да ни доведе до кой знае какво.

Предполагам, че всеки би си казал как ще запомня тези формули. Добрата новина е, че не трябва да ги помним, а просто да ги преизвеждаме всеки път по този метод. Та ако не се сещаме някаква хитринка, чрез която да се справим с интегрирането рационална функция, трябва да знаем, че винаги има метод, който ще подейства.