21.Изпъкнали функции. Критерии за изпъкналост

Галина Люцканова

16 септември 2013 г.

Нека да разгледаме функцията $f(x)$, която е диференцируема в точката x_0 (вътрешна за дефиниционното и множество). Тогава тя има допирателна в точката $P(x_0, f(x_0))$. Тъй като x_0 е вътрешна за дефиниционното множество, тогава можем да намерим такава околност $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, която да принадлежи на дефиниционното множество. Ако частта от графиката, която отговаря на точките $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, се намира над допирателната в точката P, ще казваме, че $f(x)$ е изпъкнала.

Определение 21.1: Казваме, че $f(x)$ е изпъкнала в интервала $\triangle$, ако за всяко $x_1, x_2 \in \triangle$ е изпълнено $f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$, като $p_1, p_2 \geq 0$ и $p_1 + p_2 = 1$.

Нека да положим $x = p_1x_1 + p_2x_2$. Понеже $p_1 + p_2 = 1$ следователно $p_1 = 1 - p_2$. Сега заместваме в $x = p_1x_1 + p_2x_2$ и получаваме:

$$x = p_1x_1 + p_2x_2 = (1 - p_2)x_1 + p_2x_2 = x_1 + (x_2 - x_1)p_2$$

Следователно имаме

$$x - x_1 = (x_2 - x_1)p_2$$

И при $x_2 \neq x_1$ получаваме

$$p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Тогава за p_1 получаваме:

$$p_1 = 1 - p_2 = 1 - \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x_1 - (x - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$$

Така получихме еквивалентно определение:

Определение 21.2: Казваме, че функцията $f(x)$ е изпъкнала, ако за всяко x_1 и x_2 от дефиниционното множество е изпълнено, че:

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

Твърдение 21.1: Ако $f(x)$ е изпъкнала в интервала $\triangle$, то тя може да се прекъсва само в крайщата на интервала.

Критерий за изпъкналост на функции Една функция е изпъкнала $\Leftrightarrow$ когато е в сила неравенството:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Доказателство:
Една функция е изпъкнала тогава и само тогава, когато:

$$\begin{cases} f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1, p_2 \geq 0 \end{cases}$$

Нека да положим $x = p_1x_1 + p_2x_2$. От полагането е ясно, че x е между x_1 и x_2. Нека $x_1 < x < x_2$. Така получихме еквивалетната система:

$$\begin{cases} x = p_1x_1 + p_2x_2 f(x) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \\ p_1 + p_2 = 1 \\ p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \\ p_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \end{cases}$$

Тези изчисления бяха извършени по-рано в тази лекция. Сега малко да преработим само уравнение 2 от системата. Първо ще заместим в уравнение номер 2, коефициентът 1 пред $f(x)$ с $p_1 + p_2$ и получаваме:

$$(p_1 + p_2)f(x) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$$

След това ще прехвърлим ще групираме всички, съдържащи p_1 от ляво, а другите - от дясно.

$$p_1(f(x) - f(x_1)) \leq p_2(f(x_2) - f(x))$$

Сега заместваме p_1 и p_2 и получаваме:

$$\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(f(x) - f(x_1)) \leq \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}(f(x_2) - f(x))$$

Понеже $x_1 \leq x \leq x_2$, тогава $x_2 - x_1 \geq 0$, $x_2 - x \geq 0$ и $x - x_1 \geq 0$. След преобразувания получаваме:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

Теорема 21.1: Диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала $\iff$ $f'(x)$ е монотонно растяща.

Следствие 21.1: 2 пъти диференцируемата функция $f(x)$ е изпъкнала $\iff f''(x) \geq 0$.

Определение 21.3: Казваме, че $f(x)$ е вдлъбната в интервала $\triangle$, ако за всяко $x_1, x_2 \in \triangle$ е изпълнено $f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq p_1f(x_1) + p_2f(x_2)$, като $p_1, p_2 \geq 0$ и $p_1 + p_2 = 1$.

Твърдение 21.2: $f(x)$ е изпъкнала $\iff -f(x)$ е вдлъбната.

Доказателство:
$f(x)$ е изпъкнала $\iff$

$$\begin{cases} f(p_1x_1 + p_2x_2) \leq p_1f(x_1) + p_2f(x_2) \\ p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$\iff$

$$\begin{cases} -f(p_1x_1 + p_2x_2) \geq -p_1f(x_1) - p_2f(x_2) \\ p_1, p_2 \geq 0 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases}$$

$\iff -f(x)$ е вдлъбната.$\blacksquare$

Теорема 21.2: Диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff$ $f'(x)$ е монотонно намаляваща.

Доказателство:
Диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff$ диференцируемата функция $-f(x)$ е изпъкнала $\iff$ $(-f(x))' = -f'(x)$ е монотонно растяща $\iff$ $f'(x)$ е монотонно намаляваща. ■

Следствие 21.2: 2 пъти диференцируемата функция $f(x)$ е вдлъбната $\iff$ $f''(x) \leq 0$.

Теорема 21.3: $f(x)$ е изпъкнала, ако се намира над всяка своя допирателна.

Доказателство:

Твърдение 21.3: Нека $f(x)$ е вдлъбната в $(0, +\infty)$, $f(0) = 0$, тогава $\frac{f(x)}{x}$ е намаляваща.

Доказателство:

Неравенство на Юнг: Нека неравенствата $a, b > 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ са изпълнени. Тогава $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.

Доказателство:
Да разгледаме функцията $f(x) = e^x$. Понеже $f'(x) = (e^x)' = e^x$ и $f''(x) = e^x > 0$, то $f(x)$ е изпъкнала функция. Тогава по еквивалентното определение за изпъкналост имаме:

$$e^{\frac{1}{p}x_1 + \frac{1}{q}x_2} \leq \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2},$$

тъй като $\frac{1}{p}, \frac{1}{q} > 0$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Нека $e^{x_1} = a^p$ и $e^{x_2} = b^q$. Тогава получаваме след логаритмуване на двете страни $x_1 = \ln(e^{x_1}) = \ln(a^p) = p \ln a$ и

$x_2 = \ln(e^{x_2}) = \ln(b^q) = q\ln b$. Така получихме:

$$e^{\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b} \leq \frac{1}{p}e^{x_1} + \frac{1}{q}e^{x_2} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Сега да пресметнем лявата страна:

$$e^{\frac{1}{p}p\ln a + \frac{1}{q}q\ln b} = e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln ab} = ab$$

Така доказахме неравенството:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$$

при условия $a, b > 0$, $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ■.

Неравенство на Хьолдер: За произволни положителни реални числа $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ е изпълнено неравенството:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Доказателство:

Нека да положим

$$A_i = \frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}}, 1 \leq i \leq n$$

$$B_i = \frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}}, 1 \leq i \leq n.$$

Така получихме, че $A_i, B_i > 0$, защото $a_i, b_i > 0$. Нека $p, q > 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Така условията а неравенството на Юнг са изпълнени и получаваме:

$$A_i B_i \leq \frac{A_i^p}{p} + \frac{B_i^q}{q}, 1 \leq i \leq n.$$

Събираме всички неравенства и получаваме:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_i B_i) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p}{p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^q}{q}.$$

Сега да пресметнем дясната страна на полученото неравенство:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \right)^p = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\left((\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}\right)^p} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p} \sum_{i=1}^{n} a_i^p = 1.$$

$$\sum_{i=1}^{n} B_i^q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \right)^q = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\left((\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}\right)^q} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1.$$

Така получихме, че

$$\sum_{i=1}^{n} (A_i B_i) \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i^p}{p} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} B_i^q}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Така изкарахме, че:

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n} (A_i B_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{b_i}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} = \frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p)^{\frac{1}{p}}} \frac{1}{(\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^q)^{\frac{1}{q}}} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Така получихме:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

което се опитвахме да докажем. ■

Неравенство на Коши-Буняковски-Шварц: За произволни реални числа $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$ е изпълнено неравенството:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Доказателство:

Неравенство на Йенсен: $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е изпъкнала в интервала I $\iff$ ако за всеки набор от n числа $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ да съществуват числа $q_1, q_2, \ldots, q_n \geq 0$ със сума $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$, такива че да е в сила неравенството:

$$q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_n f(x_n) \geq f\left(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_n x_n\right)$$

Доказателство:

1. Нека k на брой q_i са равни на 0. Без ограничение на общността можем да смятаме, че това са последните k q_i т.е. нека $q_1, q_2, ..., q_{n-k} > 0$, а $q_{n-k+1}, ..., q_n = 0$. Тогава неравенството се преобразува до вида:

   $$q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_{n-k} f(x_{n-k}) \geq f\left(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_{n-k} x_{n-k}\right)$$

   и имаме, че $q_1 + q_2 + \cdots + q_{n-k} = 1$. Това означава, че този случай може да бъде сведен към n-k на брой числа $q_i > 0$

2. $q_i > 0$ за всяко $1 \leq i \leq n$. Сега ще проведем доказателството по индукция по броя на числата n:

   (a) n=1 имаме, че $q_1 = 1$, т.е. за неравенството получаваме

   $$q_1 f(x_1) \geq f\left(q_1 x_1\right),$$

   което е еквивалентно на

   $$f(x_1) \geq f(x_1 t),$$

   което пък винаги е изпълнено.

(б) n=2, тогава получаваме определението за изпъкналост.

(в) Нека да допуснем, че неравенството е изпълнено за $n = k$, ще докажем, че тогава то е изпълнено и за $n = k + 1$.Това означава, че имаме:

$$q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2) + \cdots + q_k f(x_k) \geq f\left(q_1 x_1 + q_2 x_2 + \cdots + q_k x_k\right)$$

и трябва да докажем, че е изпълнено:

$$q'_1 f(x_1) + q'_2 f(x_2) + \cdots + q'_{k+1} f(x_{k+1}) \geq f\left(q'_1 x_1 + q'_2 x_2 + \cdots + q'_{k+1} x_{k+1}\right).$$

За тази цел ще образуваме веригата от неравенства: