20.Локални екстремуми. Необходими и достатъчни условия

Галина Люцканова

11 септември 2013 г.

Да напомним определенията за локални екстремуми и теоремата на Ферма:

Определение 20.1: Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 20.2: Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.

Теорема 20.1 (на Ферма) : Нека $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

Теорема 20.2: Нека $f(x)$ е диференцируема в $(-\infty, +\infty)$ и съществуват $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Нека $L = \sup f(x)$. Тогава

1. $L = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
2. $L = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3. L се достига във вътрешна стационарна точка, т.е. $f'(x) = 0$ (т.е. L се достига в локален екстремум)

Доказателство:

Какво значи това правило? Много просто, то означава, че супремумът се достига или когато функцията клони към $\pm\infty$, или в точка на локален екстремум. Това трябва да е някакси ясно от представата ни за локалните екстремуми.

Твърдение 20.1: Нека $f(x)$ е 2 пъти диференцируема в околност на точката x_0. Ако $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то $f(x)$ има локален екстремум и

1. той е локален минимум, ако $f''(x_0) > 0$
2. той е локален максимум, ако $f''(x_0) < 0$

Доказателство:

Теорема 20.3: Нека $f(x)$ е n пъти диференцируема в околност на точката x_0. Ако $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)} = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогава

1. Ако n е четно, то $f(x)$ има локален екстремум в точката x_0 и
   (а) той е локален минимум, ако $f^{(n)}(x_0) > 0$
   (б) той е локален максимум, ако $f^{(n)}(x_0) < 0$
2. n е нечетно, то f(x) няма локални екстремуми в точката x_0

Доказателство: