15.Теорема на Рол. Теорема на крайните нараствания. Теорема на Коши. Основна теорема на интегралното смятане

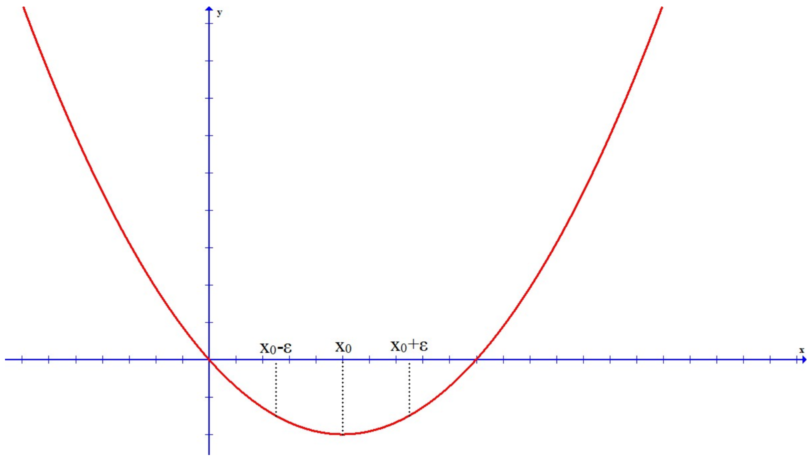
Галина Люцканова

10 септември 2013 г.

Определение 15.1: Казваме, че $f(x)$ има локален максимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение 15.2: Казваме, че $f(x)$ има локален минимум в някоя вътрешна точка x_0 от своята дефиниционна област, ако съществува околност $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ на точката x_0(съдържаща се в дефиниционната област), такава че за всички x_0 в тази околност е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.
Локалните максимуми и локалните минимуми ще наричаме локални екстремуми.

Пример 15.1: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2 - 2x$ върху $\mathbb{R}$.



От графиката може да се види, че в точка x_0 имаме локален минимум, защото:

1. точката $x_0 \in \mathbb{R}$

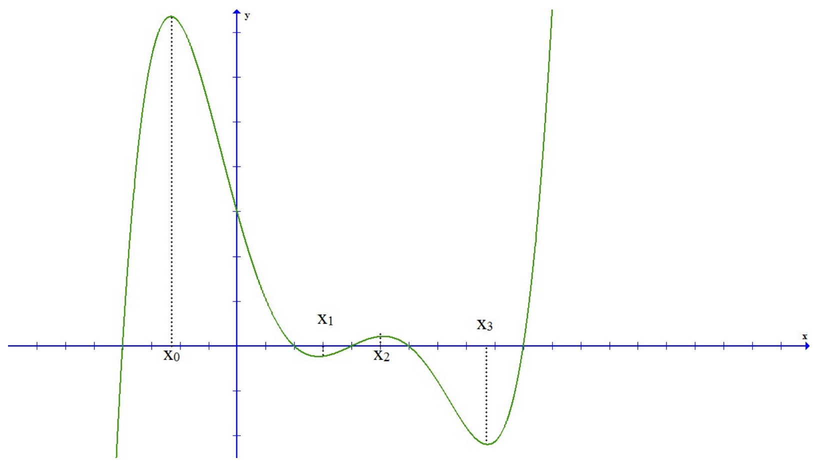
2. тъй като дефиниционното множество е $\mathbb{R}$, то тя е вътрешна за множеството

3. каквото и $\varepsilon > 0$ да вземем до е изпълнено $f(x) \geq f(x_0)$.

В интерес на истината точката на локален минимум може да се намери със знания от училище. Да представим $f(x)$ в следния вид $f(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 + 1$. От училище ни е известно, че $(x-1)^2 \geq 0$, тогава точката, в която достигаме минималната стойност е решение на уравнението $f(x) = (x-1)^2 = 0$ или това е точката $x = 1$.

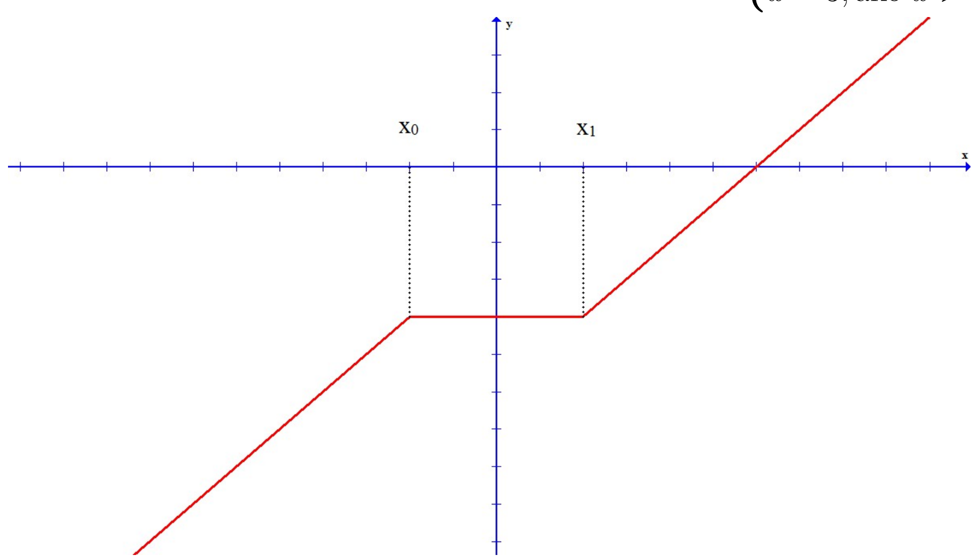
Пример 15.2: Да разгледаме графиката на функцията $f(x) = x^2 - 2x$, но този път не върху $\mathbb{R}$, а върху $[1, +\infty)$. Сега можете да забележите на графиката, че тогава нямаме локален минимум, защото x_0 не е вътрешна точка за $[1, +\infty)$, а левият край на интервала, в който е дефинирана функцията.

Пример 15.3: Сега просто един чертеж:



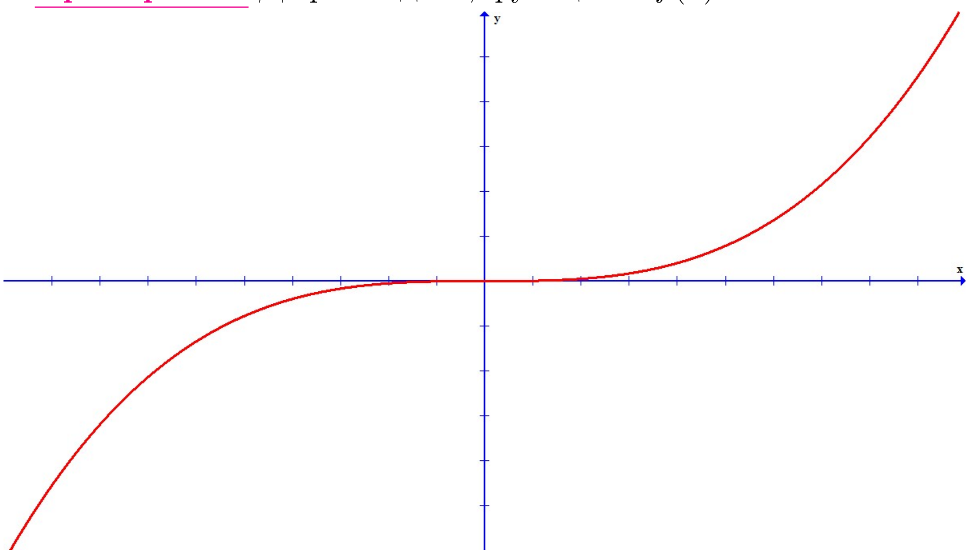
На чертежа в точките x_0 и x_2 имаме локален максимум, а в точките x_1 и x_3 имаме локален минимум. Както надявам се, забелязвате от чертежа не можем да твърдим, че най-голямата стойност на функцията е в неиния локален максимум, а най-малката - в нейния локален минимум. То и затова се нарича локален максимум, защото само на локално ниво е максимум.

Пример 15.4: Да разгледаме функцията $f(x) = \begin{cases} x-1, \text{ако } x < -1 \\ -2, \text{ако } x \in [-1,1] \\ x-3, \text{ако } x > 1 \end{cases}$



Надявам се, че забелязвате, че точката x_0 е точка на локален максимум, а x_1 е точка на локален минимум. В нашия случай $x_1 - x_0 = 2$, но какво се случва, ако това разтояние е много много малко?

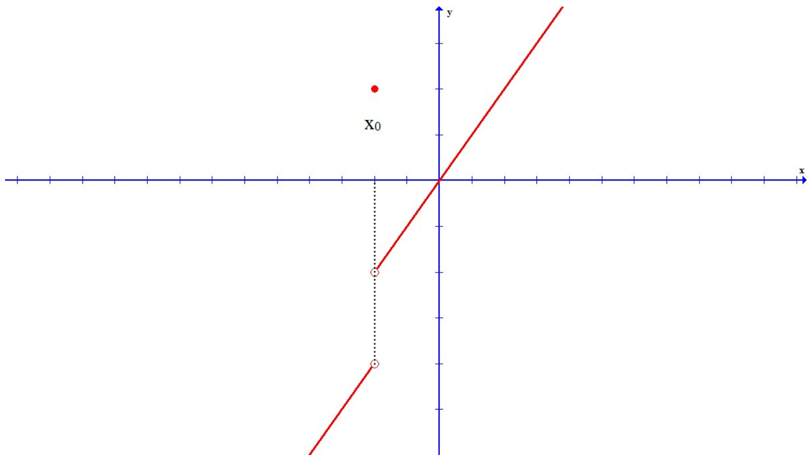
Пример 15.5: Да разгледаме, функцията $f(x) = x^3$.



На графиката забелязваме, че точката $(0, 0)$ не е локален екстремум.

Пример 15.6: Не е задължително да говорим само за непрекъснати функции. Да начертаем графиката на следната функция

$$f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ако } x < -1 \\ 1, \text{ако } x = -1 \\ x - 2, \text{ако } x > -1 \end{cases}$$

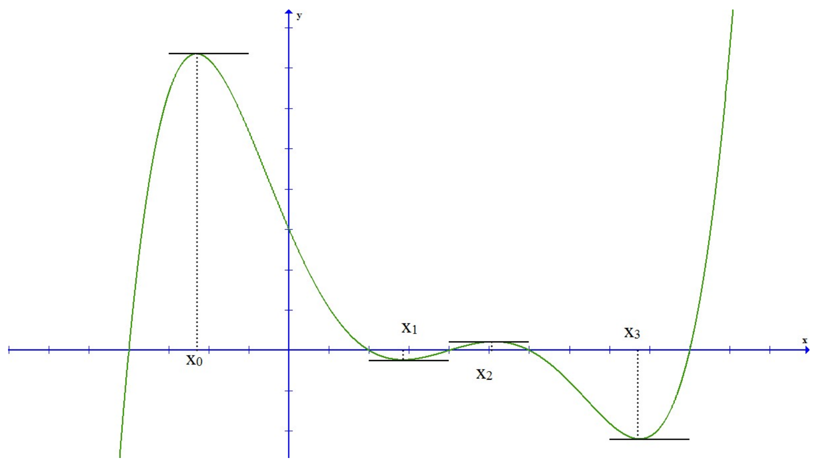


Може с лекота да се докаже, че точката -1 е точка на прекъсване. Ние просто ще го забележим от графиката на функцията. Интересен е фактът, че -1 е точка на локален максимум на функцията.

Сега след много показни примери се надявам, че е станало ясно какво е локален екстремум. Сега ще преминем към формулировката и доказателството на една основополагаща теорема:

Теорема 15.1 (на Ферма) : Нека $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и има локален екстремум в точката x_0. Тогава $f'(x_0) = 0$.

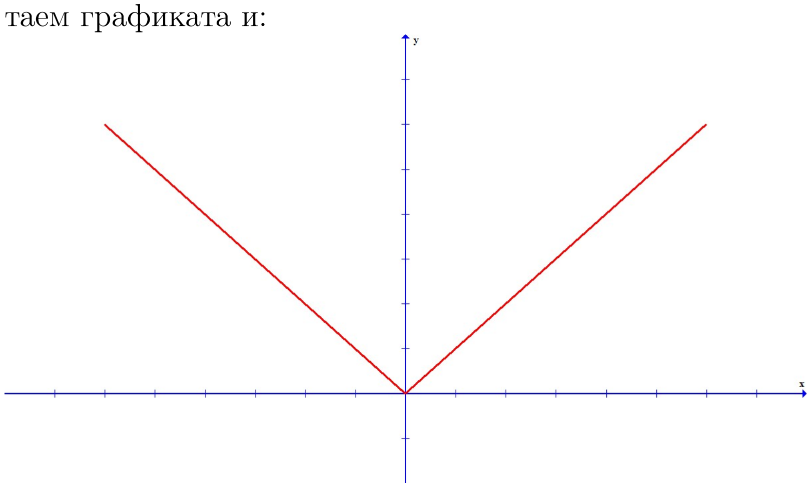
Доказателство:
Малко разяснения към теоремата. Първо да си спомним какво означава понятието производна? Еми това е тангенса на ъгъла α, който сключва допирателната с абцисата. Нашата теорема ни твърди, че ако функция има локален екстремум в точка x_0, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha = 0$. Знаем, че в този случай $\alpha = k\pi$, където $k \in \mathbb{N}$. Е, това означава, че $\alpha = 0°$ или $\alpha = 180°$, ако $\alpha \in [0°, 360°)$. Тази наши сметки доведоха до мисълта, че ъгълът между абцисата и допирателната към функцията в точка x_0 е $0°$ или $180°$, което просто си означава, че допирателната е успоредна на абцисата. Да видим дали това наистина изглежда логично като разгледаме следната графика:



Сега да минем към доказателството на теоремата.
Забележки:

1. Изискването за диференцируемост е съществено, защото то ни осигурява съществуването на производната т.е. ако функцията не е диференцируема в точка на локален екстремум, то тогава производната и в тази точка може да не е 0.

Пример 15.7: Да разгледаме функцията $f(x) = |x|$. Да начертаем графиката и:



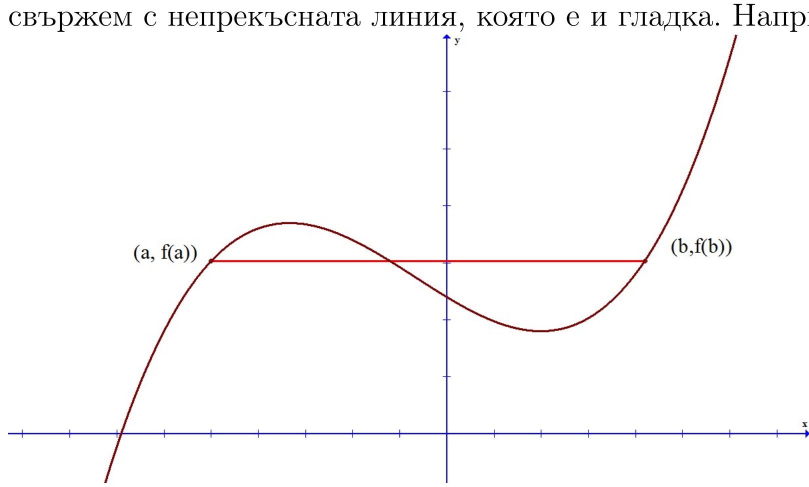
От изображението виждаме, че 0 е точка на локален екстремум. Вече сме доказали, че не съществува производна в 0 (защото $f'_+(0) = 1 \neq -1 = f'_-(0)$), което както се сещате е проблем.

2. Обратното твърдение не е вярно т.е Ако $f(x)$ е диференцируема в точка x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогава има локален екстремум в точката x_0.

Пример 15.8: Да разгледаме функцията $f(x) = x^3$ отново. В предишен пример обсъдихме, че точката 0 не е точка на локален екстремум за функцията. Сега да сметнем производната и $f'(x) = 3x^2$, тогава $f'(0) = 0$.

Теорема 15.2 (на Рол) : Нека $f(x)$ е непрекъсната в затворения интервал $[a, b]$, е диференцируема в (a, b) и $f(a) = f(b)$. Тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такава че $f'(\xi) = 0$.

Доказателство:
Малко разяснения по теоремата, както обикновено преди да пристъпим към доказателството на теоремата. Да вземем две точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (или точката $(b, f(a))$, защото $f(a) = f(b)$). Сега трябва да ги свържем с непрекъсната линия, която е и гладка. Например



Разбира се има много начини, по които можем да ги свържем. Но да не забравяме, че тръгваме от едно ниво и трябва да се върнем на него. Това означава, че или ще се движим само направо, или ще се отклоним например нагоре и после ще трябва да се върнем в обратна посока до това ниво. Това означава, че ще имаме локален екстремум, което означава, че производната в тази точка ще е 0.
Сега да минем към доказателството.

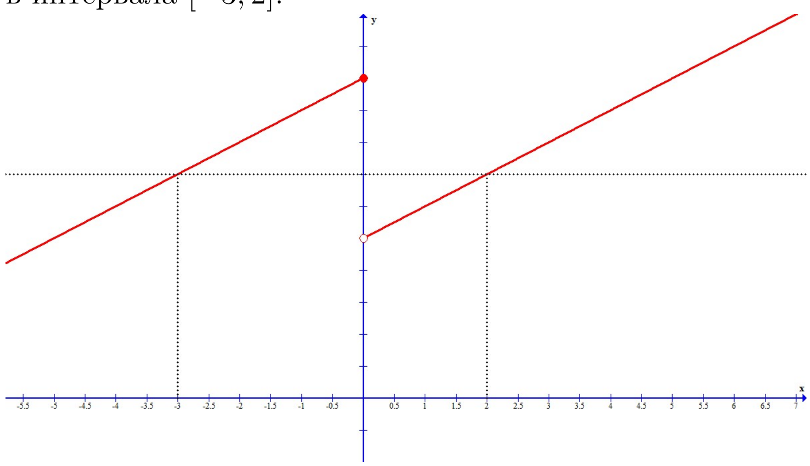
Забележки:

1. Защо е необходимо функцията да е непрекъсната?

   Пример 15.9: Да разгледаме функията

   $$f(x) = \begin{cases} x + 10, \text{ако } x \leq 0, \\ x + 5, \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

   в интервала $[-3, 2]$.

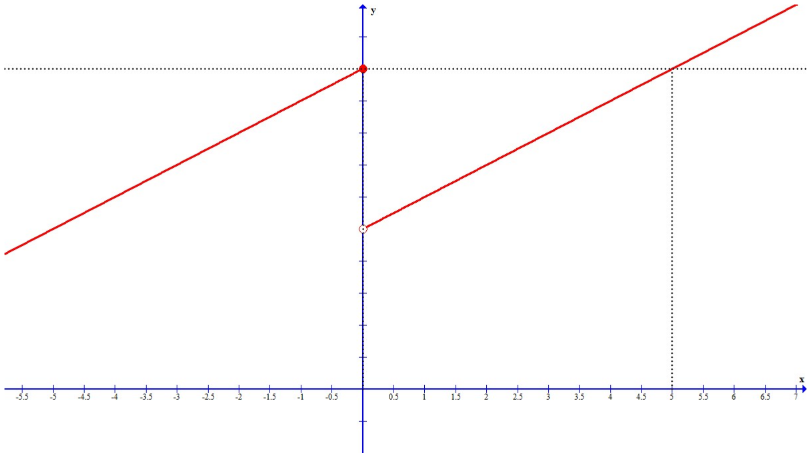
   Тя няма локален екстремум в интервала $[-3, 2]$.

2. Добре, а защо трябва да е непрекъсната в затворения интервал? Не може ли да е непрекъсната в отворения интервал?

   Пример 15.10: Да разгледаме пак същата функцията

   $$f(x) = \begin{cases} x + 10, \ \text{ако } x \leq 0, \\ x + 5, \ \text{ако } x > 0 \end{cases}$$

   само че в интервала $(0, 5)$.



Тя е непрекъсната в интервала $(0,5)$, но е прекъсната в интервала $[0,5]$. Функцията няма локален екстремум в интервала $[0,5]$.

3. Защо искаме функцията да е диференцируема в отворения интервал (a,b), а не в затворения?

Теорема 15.3 (за крайните нараствания) : Нека $f(x)$ е непрекъсната в $[a,b]$ и диференцируема в (a,b). Тогава съществува точка $\xi \in (a,b)$, такава че $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$. (Теоремата е още известна с наименованието теорема на Лагранж)

Доказателство:

Теорема 15.4 (на Коши) : Нека $f(x)$ и $g(x))$ са непрекъснати в $[a,b]$ и диференцируеми в (a,b). Ако $g'(x) \neq 0$, то съществува точка $\xi \in (a,b)$, такава че $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.
Забележка:

1. Не може ли тогава $g(b)-g(a)=0$? Да допуснем, че е възможно т.е. $g(b)=g(a)$. Тогава по теоремата на Рол следва, че съществува точка x_0, за която е изпълнено $g'(x_0)=0$. Противоречие.

2. Ако $g(x)=x$, то $g'(\xi)=1$ и получаваме теремата на Лагранж за крайните нараствания.

Доказателство:

Теорема 15.5 (основна терема на интегралното смятане) : Нека $f'(x) = 0$ за всяко $x \in (a, b)$. Тогава $f(x) = c$ за всяко $x \in (a, b)$ (където c е константа).

Доказателство:

Твърдение 15.1: Нека $f'(x) > 0$ за всяко x в интервал $\triangle$. Тогава $f(x)$ е строго растяща в $\triangle$.

Доказателство:

Теорема 15.6 (на Дарбу) : Нека $f(x)$ приема положителни и отрицателни стойности. Тогава съществува ξ, такова че $f'(xi) = 0$.

Доказателство: