14.Диференциал. Диференциране на съставни функции. Производни на елементарни функции

Галина Люцканова

17 септември 2013 г.

Диференциал

Диференциране на съставни функции Първо какво значи една функция да е съставна? Сега след като разбрахме какво е съставна функция, да се придвижим към целта на нашия параграф диференциране на съставна функция.

Теорема 14.1: Нека $f(x)$ е диференцируема функция във фиксирана точка x_0, като $u_0 = f(x_0)$ и $F(u)$е диференцируема в точка u_0. Тогава $F(f(x))$ е диференцируема в точка x_0 и $F'(f(x)) = F'(u)u'$.

Твърдение 14.1: Нека $y = f(x)$ е диференцируема и обратима и $f'(x) \neq 0$. Тогава обратната функция $f^{-1}(y)$ е диференцируема и нейната производна се смята $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$.

Доказателство:
Понеже $f^{-1}(y)$ е обратната на $f(x)$, $f^{-1}(f(x)) = x$. Диференцираме двете страни и получаваме $(f^{-1}(f(x)))'f'(x) = x' = \lim\limits_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$. ■

Производни на елементарни функции Първо ще поместя таблицата с производните, после ще дам доказателство.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$

2. $(e^x)' = e^x$

3. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

4. $(a^x)' = a^x \ln a$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \ln a$

6. $(\sin x)' = \cos x$

7. $(\cos x)' = -\sin x$

8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

9. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

13. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Доказателство:

3) т.е. трябва да сметнем:

$$(\ln x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0} \ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \lim_{h\to 0} \left[\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \left[\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right] =$$

$$= \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{h\to 0} \left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}\right]$$

Нека да положим $\frac{h}{x} = y$, понеже $h \to 0$, то $y = \frac{h}{x} \to 0$. И така получаваме, че

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \ln\left[\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right] = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

2)Знаем, че $\ln e^x = x$. Диференцираме двете страни на равенството и получаваме:

$$1 = x' = (\ln e^x)' = \frac{1}{e^x}.(e^x)'$$

Така получихме, че $(e^x)' = e^x$.
1)Понеже $x^n = e^{\ln x^n} = e^{n \ln x}$ получаваме, че;

$$(x^n)' = (e^{n\ln x})' = e^{n\ln x}(n\ln x)' = x^n n\frac{1}{x} = nx^{n-1}$$

4)Понеже $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x\ln a}$ получаваме, че;

$$(a^x)' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a$$

5)Понеже $log_a x = \frac{\ln x}{lna}$. Тогава имаме, че:

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{(\ln x)'}{\ln a} = \frac{1}{x}\ln a$$

6)Имаме, че:

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{(x+h)-x}{2}\cos\frac{(x+h)+x}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{2x+h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\frac{2x+h}{2} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\lim_{h\to 0}\cos\frac{2x+h}{2} = 1\cos\frac{2x}{2} = \cos x$$

7)Понеже $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогава с помощта на теоремата за сложна функция можем да пресметнем:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x\cdot(-1) = -\sin x$$

8)

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

9)Понеже $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Тогава с помощта на теоремата за сложна функция можем да пресметнем:

$$(\operatorname{cotg} x)' = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = \frac{1}{\sin^2 x}\cdot(-1) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

10) Понеже $\sin \arcsin x = x$, то диференцирайки равенството получаваме:

$$(\sin \arcsin x' = (x)' = 1$$

$$(\sin \arcsin x)' = \cos \arcsin x (\arcsin x)'$$

така получихме, че

$$1 = \cos \arcsin x (\arcsin x)'$$

или това означава,че

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos \arcsin x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^{\arcsin x}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

11)Доказахме накрая на тема 3), че $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Тогава имаме, че $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$. Сега диференцираме двете страни на равенството и получаваме:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = 0 - (\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

12)Понеже от тема 3) знаем, че $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$. Нека да диференцираме двете страни на тъждаството и получаваме:

$$(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x))' = (x)'$$

$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \cdot (\operatorname{arctg} x)' = 1$$

Така получихме:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\frac{\sin^2(\operatorname{arctg} x) + \cos^2(\operatorname{arctg} x)}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

13)Доказахме накрая на тема 3), че $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$. Тогава имаме, че $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} x$. Сега диференцираме двете страни на равенството и получаваме:

$$(\operatorname{arccotg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = 0 - (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

■

Хиперболични функции

Обратни хиперболични функции