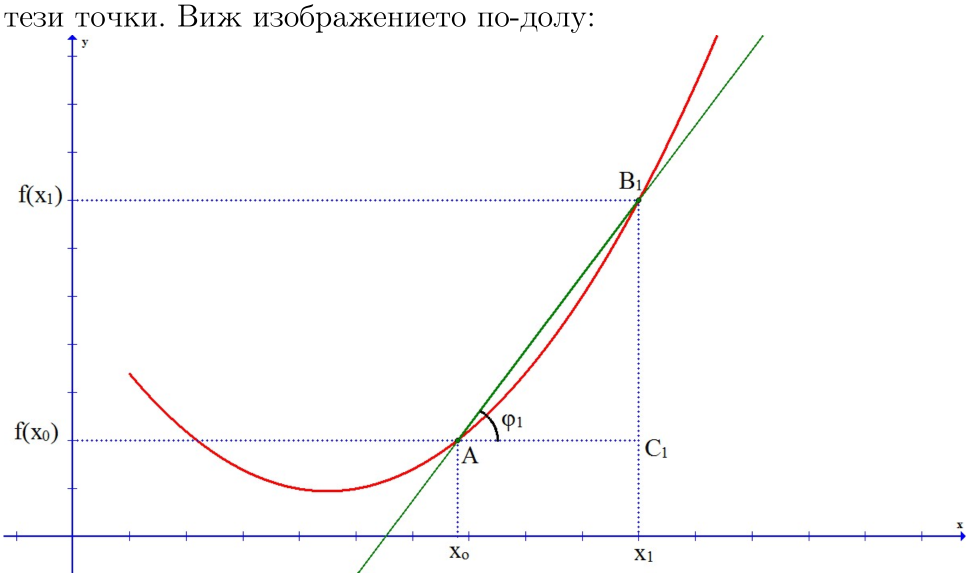
13.Производни. Физичен и геометричен смисъл. Свойства

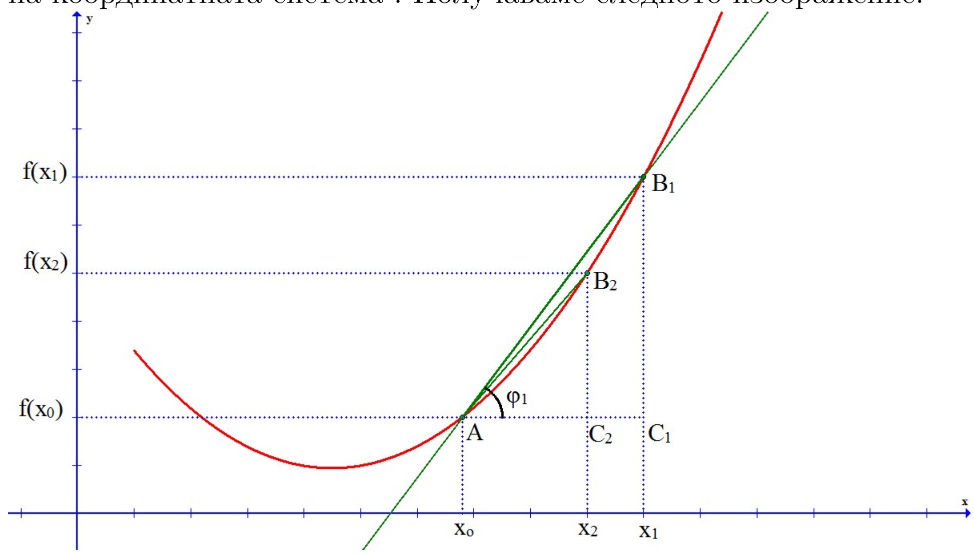
Галина Люцканова

17 септември 2013 г.

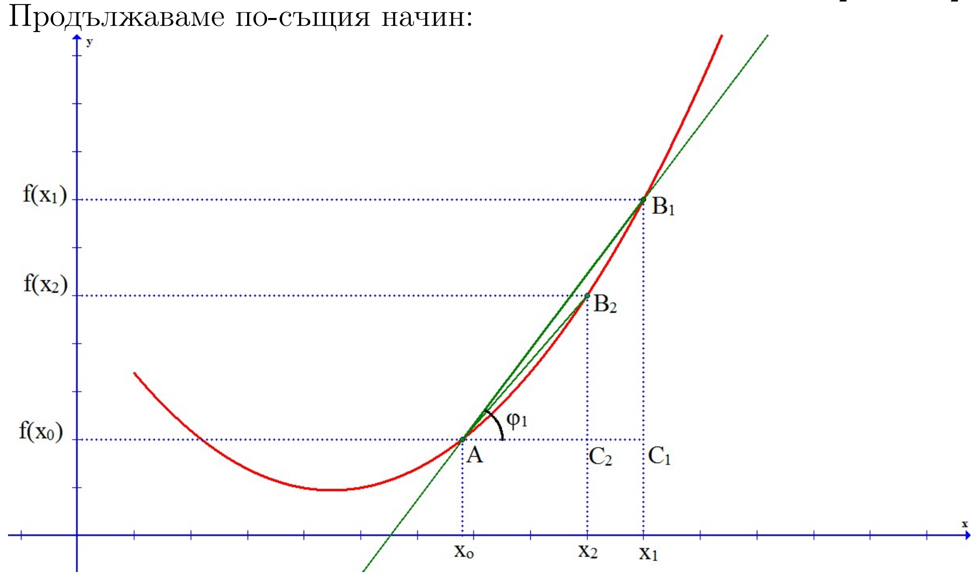
Геометрична интерпретация на производна Преди всяко ново понятие е логично да се разбере защо е въведено то. Та както обикновено ще тръгнем от далеч и с малки стъпчици ще се придвижваме към производните. Ще започнем от нещо чисто геометрично. Нека имаме графика на някаква непрекъсната функция $f(x)$ (всъщност имаме и други условия, които ще станат ясни по-нататък). Избираме си някакви точки A и B_1 от графиката на функцията $f(x)$ (нека B е отдясно на A). Проектираме тази точки върху абцисата и ординатата и прекарваме права през тези точки. Виж изображението по-долу:



Сега да разгледаме $\triangle AB_1C_1$. Знаем, че $B_1C_1 = f(x_1) - f(x_0)$, а $AC_1 = x_1 - x_0$. Тогава можем да пресметнем $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{B_1C_1}{AC_1} = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. Дотук добре. Нека да вземем точка x_2, такава че $x_0 < x_2 < x_1$, издигаме препендикуляр от x_2 към графиката на функцията, като пресечната точка я наричаме B_2 (тя е по-близо до A) и я проектираме върху ординатата на координатната система . Получаваме следното изображение:



Като отново можем да пресметнем в $\triangle AB_2C_2$ $\operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{B_2C_2}{AC_2} = \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$. Продължаваме по-същия начин:



И така нататък. По този начин образуваме редица от точки $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, която надявам се, че сте забелязали клони към x_0, защото редицата е строго намаляваща

$$x_0 < ..... < x_n < .... < x_3 < x_2 < x_1$$

и е отграничена отдолу от x_0, което значи че е сходяща и по едно твърдение от тема 5, клони към x_0. Тъй като функцията $f(x)$ е непрекъсната, то тогава $\lim x_0 f(x) = f(x_0)$ по определението за непрекъснатост на функция. Това пък означава, че редицата от точки $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ клони към A (т.е. точките B започват да се доближават безкрайно много до точката А). Но когато две точки от графиката са безкрайно близки, прекараната права през тях се доближава безкрайно много до допирателната на графиката. А какво се случи с редицата от ъглите $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ еми тя клони отгоре към α, т.е. към ъгъла, който допирателната сключва с абцисната ос. Тогава така желания $\operatorname{tg}\varphi_n$ ще клони отгоре към $\operatorname{tg}\alpha$. Така общо получихме:

Определение 13.1: Ще казваме, че функцията $f(x)$ има производна отдясно в точката x_0 (ще бележим $f'_+(x_0)$), ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Определение 13.2: Ще казваме, че функцията $f(x)$ има производна отляво в точката x_0 (ще бележим $f'_-(x_0)$), ако съществува границата $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Логиката за въвеждане на производната отляво е същата. То тогава е логично, от това, което знаем за граници.

Определение 13.3: Ако съществуват $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ са равни помежду си, то съществува иска производна, която я бележим с $f'(x_0)$ или еквивалентен запис $\frac{df(x)}{dx}\big|_{x=x_0}$.

Досега разбрахме,че производната се дефинира по следния начин $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Нека да положим $h = x - x_0$ (или еквивалентно $x = x_0 + h$), тогава получаваме еквивалентната дефиниция $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Физична интерпретация

Примери за функции, които нямат производна, в определена точка

Свойства на производните:

1. Ако $f(x) = c = const \Rightarrow f'(x) = 0$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. Ако $g(x) \neq 0$, то $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$

Доказателство:

1. Ако $f(x) = c = const$, то $f(x+h) = c$. Остава да сметнем

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = (c-c) \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

2. Нека $h(x) = f(x) + g(x)$, тогава $h(x+h) = f(x+h) + g(x+h)$. Сега трябва да пресметнем:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{h(x+h) - h(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - (f(x) + g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(h) + (g(x+h) - g(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} + \\ &+ \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

   Аналогично се извежда $(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x)$

3. Нека $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, тогава $h(x+h) = f(x+h) \cdot g(x+h)$. Сега

трябва да пресметнем:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{h(x+h)-h(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-(f(x)g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)f(x+h)-f(x)g(x)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+\lim_{h\to 0}f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

4. Първо ще докажем, че $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$.
   За целта ще въведем функция $h(x) = \frac{1}{g(x)}$, тогава $h(x+h) = \frac{1}{g(x+h)}$.Сега ще пресметнем $h'(x)$:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x)-g(x+h)}{h}\cdot \\
&\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{g(x)g(x+h)} = -g'(x)\frac{1}{g^2(x)} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$

   И сега пресмятаме по 3):

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)}+f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g(x)}+ \\
&+f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}
\end{aligned}$$