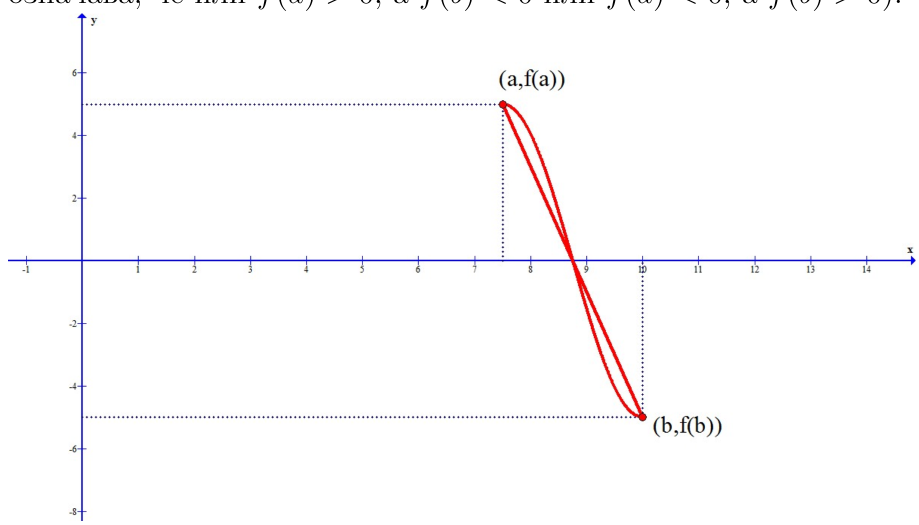
12.Непрекъснати функции в краен и затворен интервал. Равномерна непрекъснатост

Галина Люцканова

4 септември 2013 г.

Теорема 12.1 (на Ферма) : Ако $f(x)$ е непрекъсната в интервала (a, b), като $f(a)$ и $f(b)$ имат различни знаци, тогава съществува $\xi \in (a, b)$, такова че $f(\xi) = 0$.

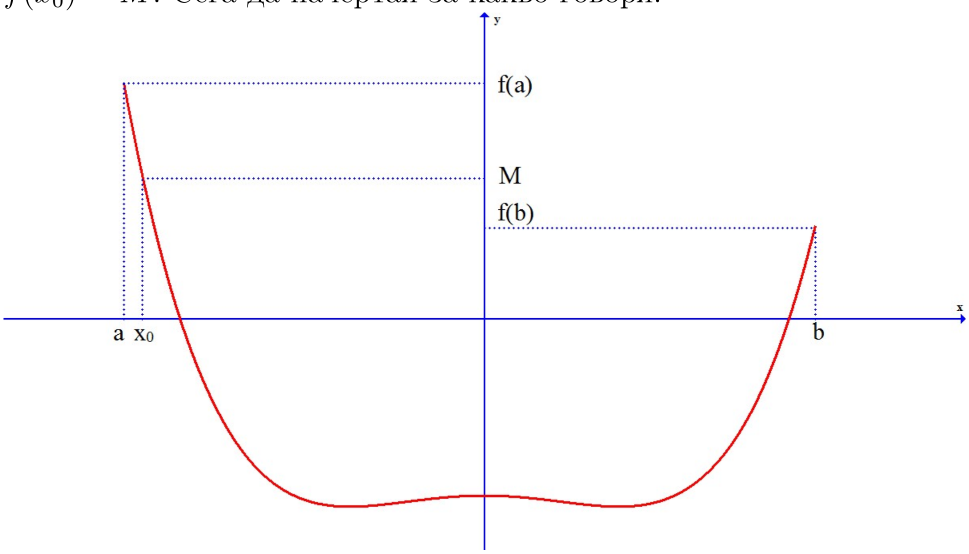
Доказателство:
Преди същинското доказателство нека да дадем малко разяснения по теоремата. Теоремата ни твърди следното, ако вземем две точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$, като едната точка е над абсцисата, другата е под нея(което означава, че или $f(a) > 0$, а $f(b) < 0$ или $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$):



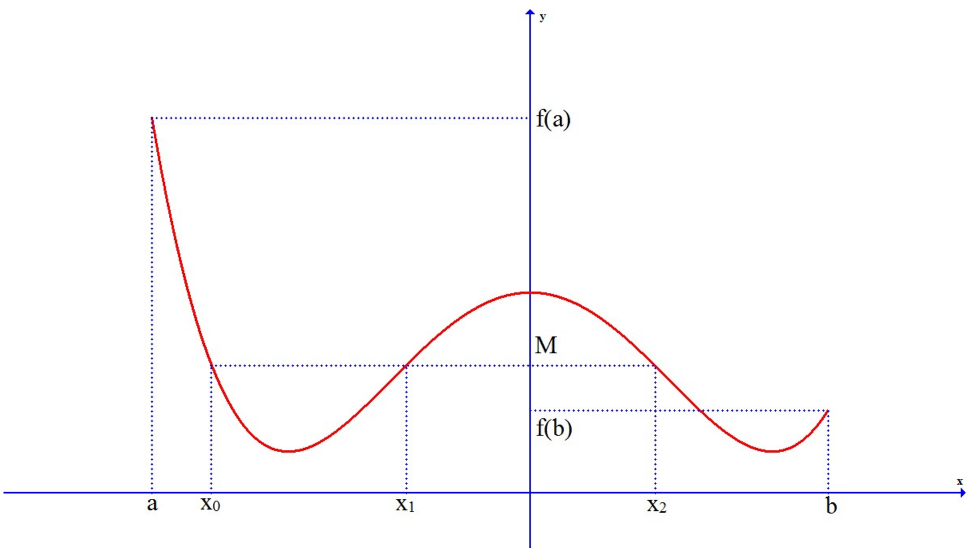
и ги свържем с непрекъсната линия, то тази линия ще пресича абцисата. Казано така, това направо си е супер логично. А сега да го докажем

Следствие 12.1: Нека $f(x)$ е непрекъсната в (a, b). Тогава $f(x)$ пробягва всички стойности между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказателство:
Първо нека $f(a) > f(b)$. А сега да разясним какво казва това следствие? Много просто, ако вземем някаква непрекъсната функция (да напомня отново това е функция, която може да се нарисува без да се вдига моливът от листа) и вземем някаква число M, което да е между $f(a)$ и $f(b)$ ($f(a) > M > f(b)$), тогава ще съществува поне едно x_0, такова че $f(x_0) = M$. Сега да начертая за какво говоря:



На тази графика съществува точно 1 точка, която удовлетворява условието. Нека все пак да покажем, че може повече от една точка да го удовлетворява. Например:



Следствие 12.2: Ако $\triangle$ е интервал, а $f(x)$ е непрекъсната в $\triangle$, то $f(\triangle)$ също е интервал.

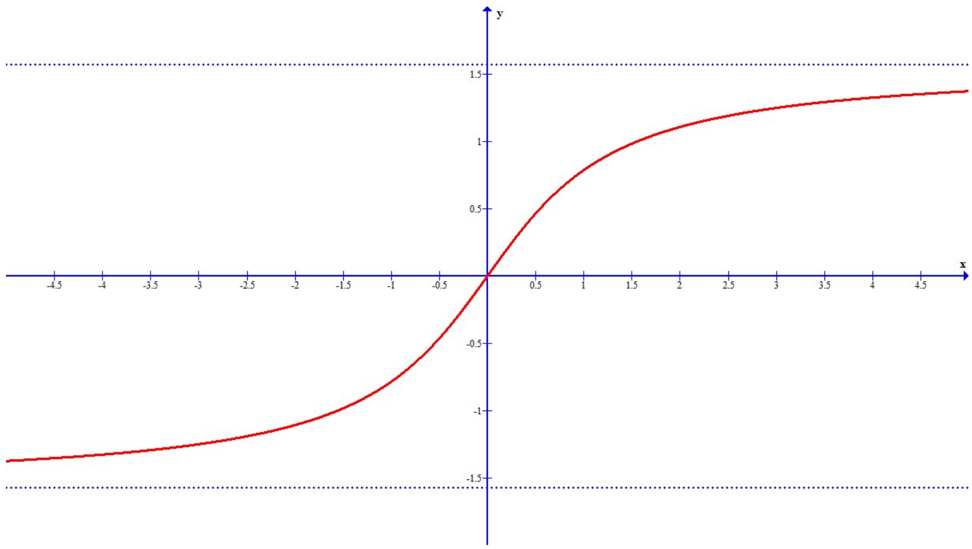
Доказателство:

Теорема 12.2: на Вайерщрас Ако $f(x)$ е непрекъсната в крайния затворен интервал $[a, b]$, то тя е ограничена и достига най-малката си и най-голямата си стойност.
Забележки:

1. Защо интервалът, в който функцията е непрекъсната, трябва да е краен?

   (а) Да разгледаме функцията $f(x) = x^2$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Тази функция е неограничена (доказано е по-рано)

   (б) Да разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{arctg} x$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Тази функция не достига минималната си и максималната си стойност съответно $\frac{-\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$. Да разгледаме графиката:



Сами трябва да докажете, че $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{-\pi}{2}$ и че $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

2. Защо интервалът, в който функцията е непрекъсната, трябва да е затворен?

   (а) Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$ в интервала $(0, 1)$. Тази функция е неограничена в 0 (доказано е по-рано)

   (б) Да разгледаме функцията $f(x) = x^3$ в интервала $(0, 1)$. Тази функция е ограничена в този интервал, но не достига минималната си и максималната си стойност съответно 0 и 1.

<u>**Доказателство:**</u>

Равномерна непрекъснатост