10.Граници на функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$. Функции, клонящи към $+\infty$ и $-\infty$. Асимптоти

Галина Люцканова

3 септември 2013 г.

Тук ще разширим понятието граница на функция. Идеята, че за удобство ще въведем понятието граница на функция, за които по предишното определение граница не съществува.

Граници на функции при $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Функции, клонящи към $+\infty$ и $-\infty$.

Асимптоти Първо какво значи тази чудна дума? Асимптота това е права, до която графиката на функцията се доближава безкрайно много. Има 2 вида асимптоти:

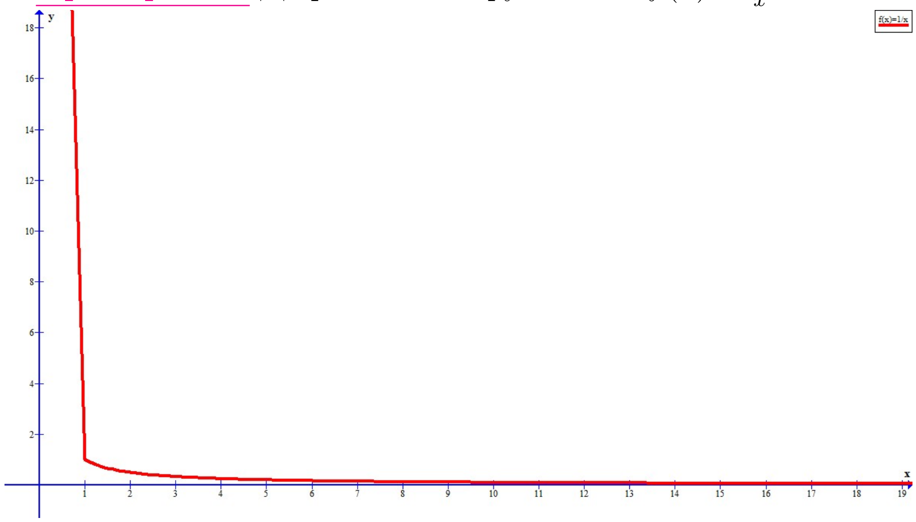
1. Едните се наричат вертикални асимптоти. Това са прави, които са успоредни на ординатата и до които графиката на функцията се доближава супер много. Формалното определение е:

   Определение 10.1: Казваме, че правата $x = a$ е вертикална асимптота на функцията $f(x)$, ако поне едно от следните предположения е изпълнено

   (а) $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \pm\infty$

   (б) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \pm\infty$.

Пример 10.1: Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$.

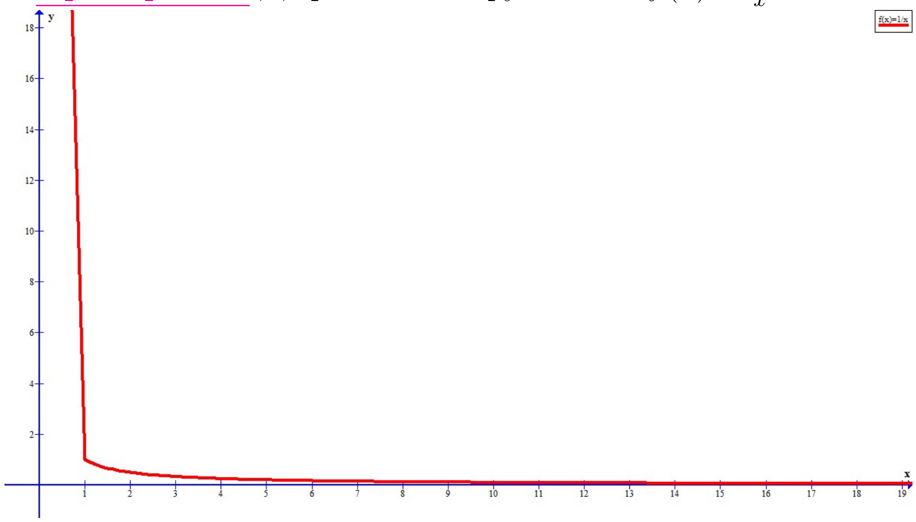


Забелязваме, че в случая имаме вертикална асимптота $x = 0$. Да го докажем - $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
Сега нещо важно. Ако точката, в която искаме да пресметнем границата, е от дефиниционото множество, то ние няма как да получим граница клоняща към безкрайност т.е. трябва точката да не е точка от дефиницонното множество, но да е точка за сгъстяване на дефиниционното множество, за да търсим вертикална асимптота в нея.

2. наклонени асимптоти. Това са прави, до които графиката на функцията се доближава в безкрайност.
Формалното определение е:

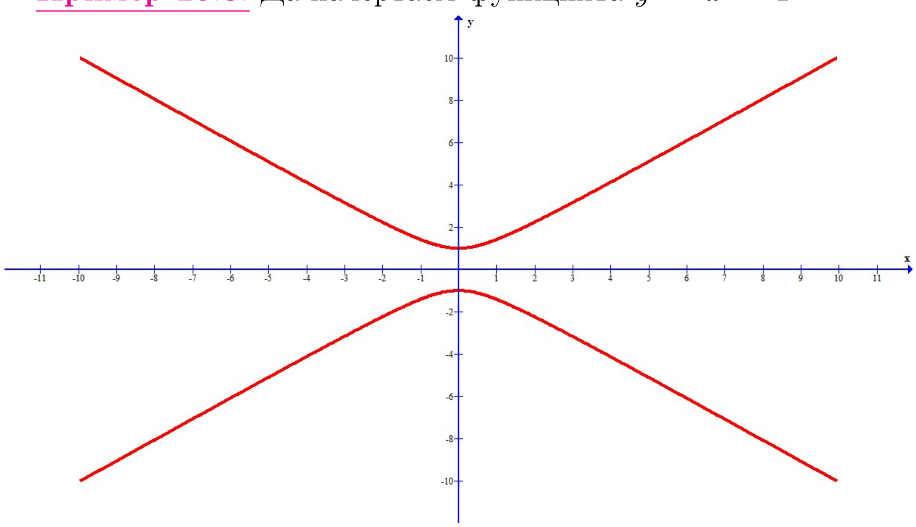
Определение 10.2: Казваме, че правата $y = kx + b$ е асимптота при $x \to \infty$, когато $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$.
Надявам се, че логиката на определението е ясна. Взимаме някаква функция $f(x)$. За да разберем дали някаква права е супер близко до нея в безкрайността просто взимаме функцията и от нея вадим уравнението на правата. Пускаме тази разлика да клони към безкрайност. Ако нашето нещо е изпълнено трябва да получим 0.
Сега да разгледаме един частен случай на наклонена асимптота, а именно хоризонтална асимптота. Това е наклонена асимптота с $k = 0$.

Пример 10.2: Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$.



Забелязваме, че в случая имаме асимптота $y = 0$. Да го докажем - $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - 0 \cdot x - 0 \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

Пример 10.3: Да начертаем функцията $y^2 = x^2 - 1$



Като погледнем така на око ни изглежда, че ще има някаква асимптота, обаче каква е сложничко да кажем. Освен това си има една особеност - като караме компютърът да чертае графика е лесно, за разлика ако трябва да я чертаем на ръка. Трудничко бихме се досетили че би трябвало да има асимптота. Засега да оставим този пример и да продължим с едно твърдение, което много ще ни улесни живота.

Твърдение 10.1: $y = kx + b$ е наклонена асимптота $\Longrightarrow k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ и $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$

Доказателство:
Нека $y = kx + b$ е наклонена асимптота, тогава трябва да докажем, че $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Сега да разгледаме границата

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \cdot 0 = 0$$

Сега да пресметнем по-друг начин границата:

$$0 = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x) - kx - b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \to \infty} k - \lim_{x \to \infty} \frac{b}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} - k$$

Така получихме $k = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Сега да докажем, че $b = \lim\limits_{x \to \infty} f(x) - kx$. Понеже $y = kx + b$ е наклонена асимптота, следователно

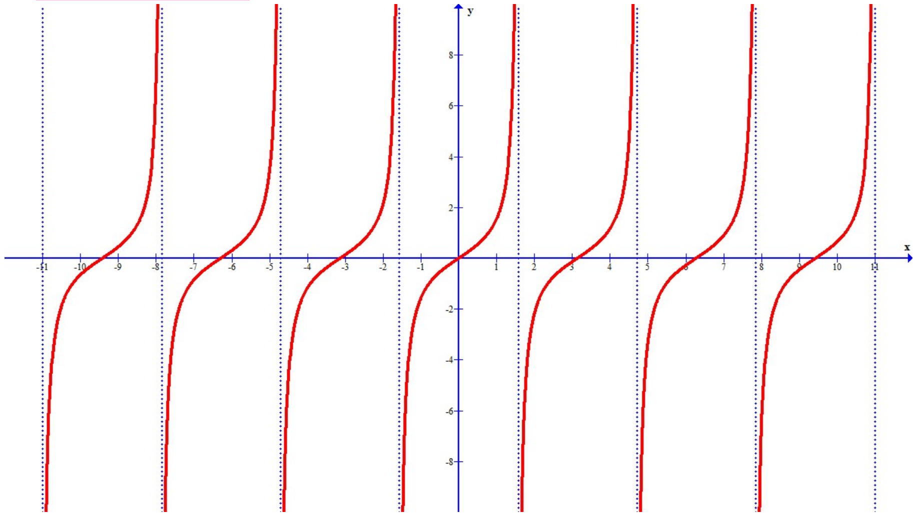
$$0 = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx - b) = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) - \lim_{x \to \infty} b$$

Така получихме, че $b = \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$.
Сега малко очевидни наблюдения относно асимптотите:

1. Максимално можем да имаме 2 наклонени асимптоти за една функция. Това е така, защото можем да имаме 1 асимптота при $x \to +\infty$ и още една при $x \to -\infty$. Не можем да имаме повече от 1 граница на функцията, затова са максимално 2. Тъй като хоризонталните асимптоти са частен случай на наклонените, то можем да имаме не повече от 2 хоризонтални асимптоти или 1 хоризонтална и една нехоризонтална наклонена асимптота.

2. Това въобще не важи за вертикалните асимптоти от тях можем да имаме дори изброимо много.

Пример 10.4: Да разгледаме функцията $f(x) = \operatorname{tg} x$



Всяка права от вида $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ е вертикална асимптота, защото $\lim\limits_{x \to (2k+1)\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}+k\pi+0} \operatorname{tg} x = +\infty$