9.Лява и дясна граница на функция. Основни граници

Галина Люцканова

17 октомври 2013 г.

Определение 9.1: Казваме, че $f(x)$ клони към A при $x \to x_0$ отляво и пишем $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$ (или), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че ако $-\delta < x - x_0 < 0$(или $x_0 - \delta < x < x_0$), то да е изпълнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 9.2: Казваме, че $f(x)$ клони към A при $x \to x_0$ отдясно и пишем $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$ (или), ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че ако $0 < x - x_0 < \delta$(или $x_0 < x < x_0 + \delta$), то да е изпълнено $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение 9.3: Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че $f(x)$ има граница, равна на L, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от M да изберем ($x_n < x_0$), съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L отляво.

Определение 9.4: Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че $f(x)$ има граница, равна на L, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от M да изберем ($x_n > x_0$), съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L отдясно.

Твърдение 9.1: Ако $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$. Обратното, ако съществуват лява и дясна граница на една функция в точка на сгъстяване, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Доказателство:

Основни граници :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

   Доказателство:

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$

   Доказателство:
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

   Доказателство:
   Сега полагаме $y = \arcsin x$ следователно $x = \sin y$ за $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Тогава получаваме $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{\sin y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\sin y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\sin y}{y}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0} 1}{\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{1} = 1$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$

   Доказателство:
   Аналогично на предишното доказателство.

5. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$

Доказателство:
Тук имаме неопределеност от типа $1^{+\infty}$.