8.Граници на функции. Еквивалентност на дефинициите на Хайне и Коши. Свойства на границите

Галина Люцканова

18 октомври 2013 г.

Определение 8.1: Казваме, че x_0 е точка на сгъстяване за множеството X от реални числа, ако във всяка околност на точката x_0 имаме елементи от множеството X, различни от x_0. (това означава, че колкото и малко околност на точката да вземем винаги ще има членове на множеството в тази околност)

Пример 8.1: Очевидно, която и точка да вземем от множеството на реалните числа, тя е точка на сгъстяване, защото във всяка околност на тази точка има безброй много реални числа.

Пример 8.2: Въобще не е задължително точката x_0 да е от множеството. Например да разгледаме множеството $X = (0, +\infty)$. Това множество съдържа само положителни членове, т.е. не съдържа 0. Но 0 е точка за сгъстяване на множеството X, защото колкото и малко околност $(-\varepsilon, +\varepsilon)$ да вземем, то в нея винаги ще имаме положителен член.

Преди да продължим нататък с граници на функции, да се запитаме, защо въобще са ни необходими граници на функции. Много просто. Понякога не можем да сметнем стойността на функцията в определена точка и се чудим какво става като се доближим безкрайно много до нея.

Пример 8.3: Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{1}{x}$. От училище е известно, че не може $x = 0$, защото на нула не се дели. Но въпросът тук е друг: Какво се случва като се приближаваме все повече и повече към 0?

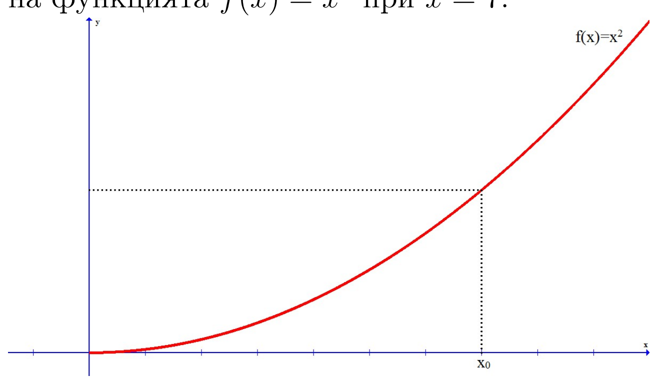
Твърдение 8.1: Ако x_0 е точка за сгъстяване на D, то съществува редица от елементи x_n на D ($x_n \neq x_0$), такава че $x_n \to x_0$. Обратното също е вярно.

Доказателство:

Сега да въведем понятието граница на функция (не се плашете, а продължете да четете след определението):

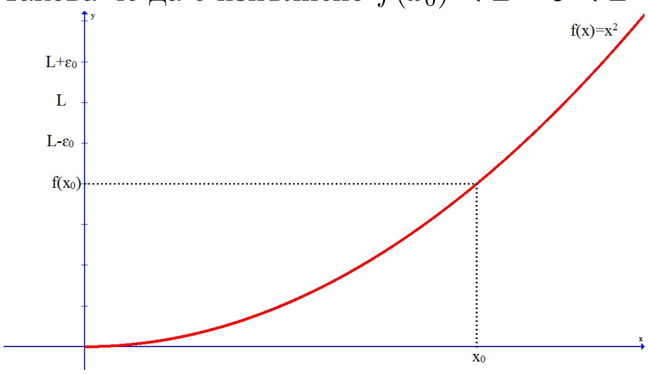
Определение 8.2 (на Коши): Нека $f(x)$ е една функция с дефиниционна област D и нека x_0 е точка на сгъстяване за D. Ще казваме, че числото l е граница на $f(x)$ при x клонящо към x_0($f(x)$ клони към l при x клонящо към x_0) и записваме във вида $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, ако при всеки избор на положителното число ε, може да се намери такова число $\delta > 0$, че от условията $x \in D, x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta$ да следва неравенството $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Сега ми се иска да дам разяснения по въпроса от къде се появи това определение. С думи прости ако когато x се доближава до x_0, стойността на $f(x)$ се доближава много до някакво число l, то функцията има граница l. Нека първо да се опитаме да обясним определението за границата на функцията $f(x) = x^2$ при $x = 7$:

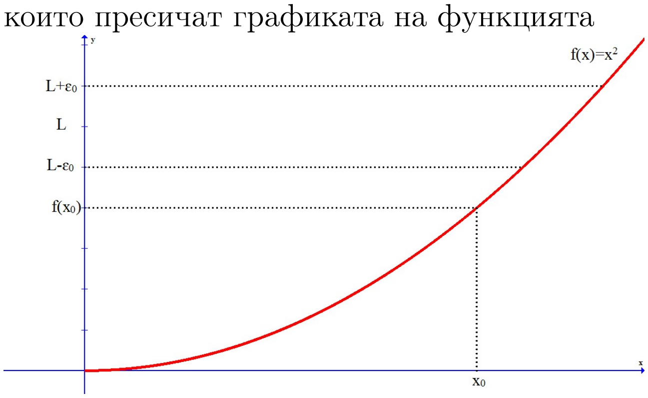


Първо да разгледаме графиката. Трябва да сметнем границата на функцията при $x_0 = 7$. Можем да сметнем $f(7) = 49$. От графиката виждаме, че точките, които се намират супер близо до $x_0 = 7$, би трябвало да отидат в точки, които се намират близо до $L = 49$.

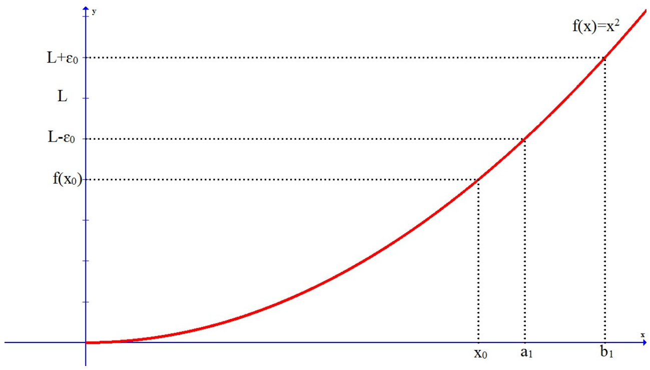
Първо да видим на илюстративно ниво, че границата на функцията $f(x) = x^2$ при $x \to 7$ е 49. Да допуснем, че $L \neq 49$ и да видим какъв проблем ще настъпи на графично ниво. Сега без да ограничаваме общността да допуснем, че $L > 49$. Тогава можем да изберем винаги $\varepsilon > 0$, такова че да е изпълнено $f(x_0) < L - \varepsilon < L < L + \varepsilon$:



Сега чертаем прави през точките $L - \varepsilon$ и $L + \varepsilon$, успоредни на абцисата, които пресичат графиката на функцията

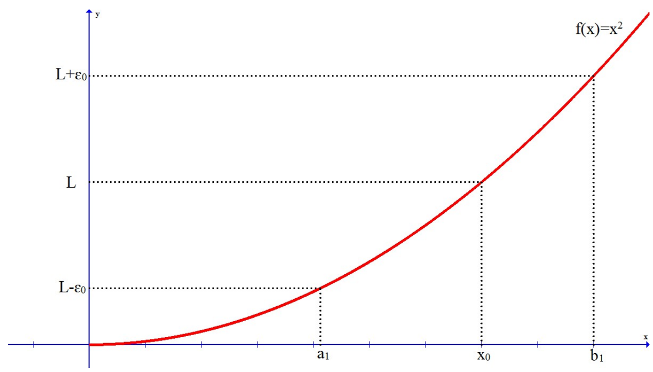


Проектираме получените точки върху абцисата и получаваме:

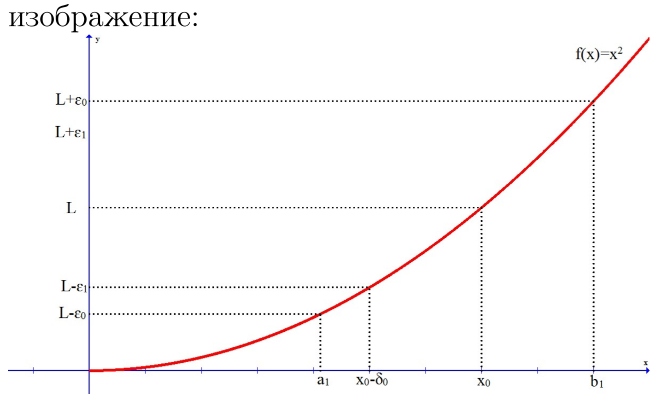


Сега по нашето определение остава да изберем $\delta > 0$, такова че от това, че $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $\{x_0\}$ да следва неравенството $f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$. Сега на нашия чертеж можем да забележим, че каквото и $\delta > 0$ да изберем, няма как да е изпълнено това условие, защото тъй като околността на точката x_0 е симетрична, то в тази околност ще има числа, които са от лявата страна на x_0. Това е проблем, защото тогава съществува x, такова че $x < x_0$ тогава получаваме, че $f(x) < f(x_0) < L - \varepsilon < L$, което противоречи на определението.

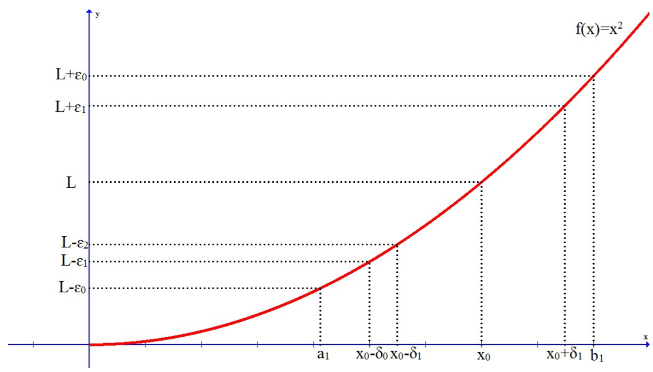
След като видяхме, че би трябвало границата да е 49, ще покажем, как работи определението. За да илюстрираме идеята, избираме $\varepsilon_0 = 32$. Значи според нашето определение би трябвало да си намерим $\delta_0 > 0$, такова че ако е изпълнено $|x - x_0| < \delta_0$, $x \neq x_0$ (което е равносилно с $x \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$), то да е изпълнено и $|f(x) - L| < \varepsilon_0$ ($f(x) \in (L - \varepsilon_0, L + \varepsilon_0)$). В нашия случай трябва да намерим $\delta_) > 0$, такова че ако е изпълнено $x \in (7 - \delta_0, 7 + \delta_0)$), то да е изпълнено и $f(x) \in (49 - 32, 49 + 32)$ или $f(x) \in (17, 81)$. След това спускаме прави успоредни на абцисата от точките (0,17) и (0,81) до пресичане с графиката на функцията. От пресечните им точки проектираме върху абцисатаи получаваме точките $a_1 = (\sqrt{17}, 0)$ и $b_1 = (\sqrt{81}, 0)$. Ще стане по-ясно с изображението:



Сега ще трябва малко въображение, в нашето определение се иска да намерим $\delta_0 > 0$, такова че от $x \in (7 - \delta_0, 7 + \delta_0)$ да следва $f(x) \in (17, 81)$), то тогава би трябвало интервалът $(7 - \delta_0, 7 + \delta_0) \in [a_1, b_1]$(Защо така? Разгледайте внимателно чертежа и вижте защо не става). Нека вземем $b_1 = 7 + \delta$ (очевидно е, че разстоянието между a_1 и x_0 е по-голямо от разстоянието между b_1 и x_0). Надявам се, че забелязахте, че каквото и по-малко δ_0 да вземем то пак ще ни свърши работа, но за по-голяма илюстративност съм взела по-голямо делта и епсилон. Сега прекарваме през a_1 права успоредна на ординатата. Тя пресича графиката на функцията. В тази точка прекарвам права успоредни на абцисата до пресичането и с ординатата - тази точка я наричам $c_1 = L - \varepsilon_1$. Ето го и следващото изображение:



Сега ако се сещате за определението в него се казваше за всяко епсилон>0 ... . Така че каквото и по-малко епсилон да вземем определението ще важи. Намираме $d_1 = L - \varepsilon_1$ и понеже трябва да работим в симетричен интервал намираме $L - \varepsilon_1$. И от там продължаваме да чертаем по същата схема. Получаваме следното изображение:



Надявам се, че стане ясно, че продължаваме все така да се приближаваме безкрайно близко до точката (7,0), а също така и до нашата граница. Все пак е необходимо някакво строго доказателство. Трябва да докажем, че границата на $f(x) = x^2$ при $x \to 7$ е 49. За тази цел трябва да докажем, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\delta > 0$, такова че от $|x - 7| < \delta$ да следва $|x^2 - 49| < \varepsilon$. Да зададем $\varepsilon > 0$ произволно. Тогава трябва да намерим делта, такава че $|x - 7| < \delta$ да следва $|x^2 - 49| < \varepsilon$. За да получим това, което искаме, трябва да приемем, че е изпълнено $|x - 7| < \delta$ и от него да се опитаме с помощта на неравенства да достигнем до израз, които се състой само от делти и числа. Без ограничение на общността $\delta < 1$. Понеже $x \in\in (7 - \delta, 7 + \delta)$ следователно $x \in\in (7 - 1, 7 + 1)$. Образуваме верига от неравенства:

$$|x^2 - 49| = |x - 7| \cdot |x + 7| < \delta \cdot |8 + 7| = 15\delta$$

Полагаме изразът $15\delta = \varepsilon$, то тогава $\delta = \frac{\varepsilon}{15}$. ■

Сега да дам няколко прости разяснения към определението за граница на функция на Коши:

1. Защо в определението е написано, че x_0 е точка на сгъстяване? Много просто, ако x_0 не е точка на сгъстяване, то тогава няма да има точки от множеството във всяка нейна околност и нямаме как да кажем, какво се случва в близост на точката x_0, тъй като няма да има елементи на множеството, които са безкрайно близко до нея.

2. Защо в определението се иска $x \neq x_0$? Защото искаме да видим какво се случва безкайно близко до точката x_0, а не в нея

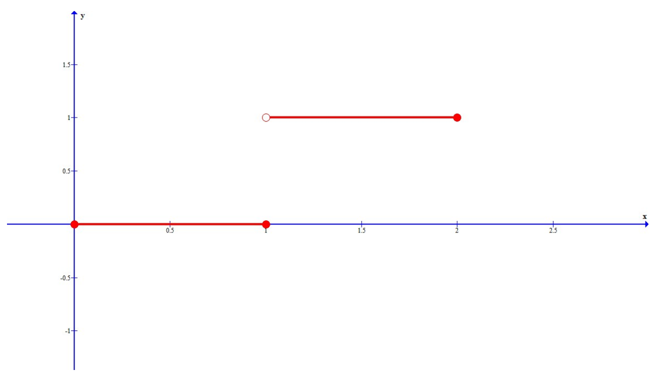
3. Какво имаме да смятаме, то винаги се получава, че $L = f(x_0)$? Не е вярно. Ще дам два различни примери, за които това не важи.

Пример 8.4: Да разгледаме функцията $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Очевидно е, че при $x = 0$ функцията не е дефинирана, но тя има граница, която по-късно ще докажем, че е 1.

Пример 8.5: Да разгледаме функцията:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & \text{ако } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Преди да направим каквото и да е, да начертаем графиката на функцията.



Тази функция няма граница при $x \to 1$. Първо на интуативно ниво - тази функция няма граница при $x \to 1$, защото когато се доближим супер близко до 1 , не знаем дали ще отидем в 0 или в 1. Сега да спретнем едно доказателство. Да допуснем, че фунцията има граница при $x \to 1$. Взимаме $\varepsilon = \frac{1}{4}$ тогава трябва да намерим $\delta > 0$, такова че ако $|x - x_0| = |x - 1| < \delta$, то $|f(x) - L| < \varepsilon = \frac{1}{4}$. Ако $0 \leq x \leq 1$, то тогава $f(x) = 0$ и т.е. получаваме

$$|f(x) - L| = |0 - L| = |L| < \frac{1}{4}, \quad \text{ако } 0 \leq x \leq 1$$

Аналогично получаваме:

$$|f(x) - L| = |1 - L| < \frac{1}{4}, \quad \text{ако } 1 < x \leq 2$$

Преобразуваме получените неравенства в следните:

$$-\frac{1}{4} < L < \frac{1}{4}, \quad \text{ако } 0 \leq x \leq 1 \tag{1}$$

$$-\frac{1}{4} < 1 - L < \frac{1}{4}, \quad \text{ако } 1 < x \leq 2$$

Последното неравенство е еквивалентно на

$$\frac{3}{4} < L < \frac{5}{4}, \quad \text{ако } 1 < x \leq 2 \tag{2}$$

От неравенства (1) и (2) получаваме, че

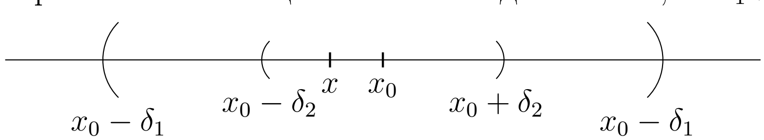
$$-\frac{1}{4} < L < \frac{1}{4} < \frac{3}{4} < L < \frac{5}{4}$$

И получихме противоречие. Един по-наблюдателен читател би запитал, защо да сме достигнали до противоречие, ние никъде не сме доказали, че само едно число L, което удовлетворява определението на Коши.

4. Но сега ще докажем, че една функция или клони към едно число L при $x \to x_0$, или въобще няма граница при $x \to x_0$. Но да видим защо.

Доказателство:

Допускаме противното т.е. че има две различни числа L_1 и L_2, които са граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0. Понеже L_1 е граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0, то тогава за всяко $\varepsilon_1 > 0$ съществува $\delta_1 > 0$, такова че от условията $x \in M, x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta_1$ да следва неравенството $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$. Понеже L_2 е граница на функцията $f(x)$ при x клонящо към x_0, то тогава за всяко $\varepsilon_2 > 0$ съществува $\delta_2 > 0$, такова че от условията $x \in M, x \neq x_0$ и $|x - x_0| < \delta_2$ да следва неравенството $|f(x) - L_2| < \varepsilon_2$. Избираме $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{|L_1 - L_2|}{2}$. Тогава ако $x \neq x_0$ е такава точка от М, за която имаме едновременно $|x - x_0| < \delta_1$ и $|x - x_0| < \delta_2$, (без ограничение на общността можем да смятаме, че $\delta_1 > \delta_2$)



то ще имаме, че

$$|L_1-L_2| = |L_1-f(x)+f(x)-L_2| \leq |L_1-f(x)|+|f(x)-L_2| < \varepsilon+\varepsilon = 2\varepsilon = |L_1-L_2|$$

Така достигнахме до противоречие с допускането, че съществуват 2 граници. Това означава, че една функция не може да притежава 2 различни граници при x, клонящо към x_0 - тя или клони към една единствена граница, или няма граница. ■

Сега да въведем второ определение за граница на функция. Но преди това да кажем, че го въвеждаме, защото с него се доказват по-лесно голяма част от свойствата.

Определение 8.3 (на Хайне): Нека $f(x)$ е дефинирана в множеството M и нека x_0 е точка на сгъстяване за M. Ще казваме, че $f(x)$ има граница, равна на L, когато каквата и клоняща към x_0 редица $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ от точки от M да изберем $(x \neq x_0)$, съответната редица от функционални стойности $\{f(x_n)\}$ да клони към L.

Малко разяснения по определението. Вече доказахме с първото твърдение, че ако вземем една точка на сгъстяване за множеството М, то можем да намерим редица, клоняща към нея. Сега трябва да вземем всички редици, клонящи към тази точка, (т.е. всички редици, които в безкрайност се намират супер близко до точката x_0), то тогава казваме, че функцията има граница, ако функционалните стойности се доближават бзкрайно много до някакво число.

Еквивалентност на двете дефиниции Ще покажем, че двете дефиниции са едно и също нещо.

Доказателство:

Свойства на границите на функции:

1. Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то
   (а) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
   (б) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$

(в) Ако $g(x) \neq 0$ и $B \neq 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

2. Нека $f(x) \leq g(x)$ за $x \in D(f) \cap D(g)$ ($D(f)$ - дефиниционното множество на f). Ако $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$, то $A \leq B$.

3. Нека $f : D \to D_1$ и $g : D_1 \to \mathbb{R}$. Нека $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$, като $f(x) \neq y_0$ и $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = A$. Тогава $\lim\limits_{x \to x_0} g(f(x)) = A$.