6.Точка на сгъстяване. Подредица. Теореми на Болцано-Вайерщрас и Кантор

Галина Люцканова

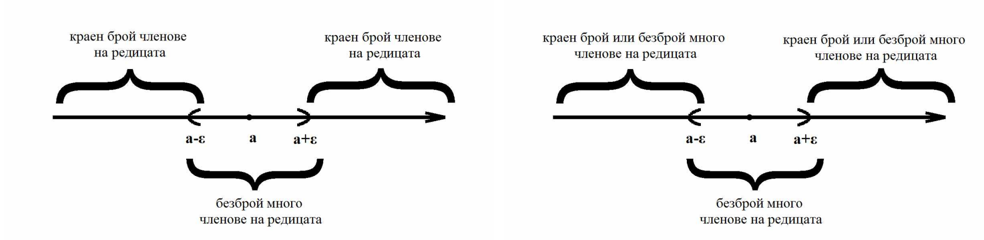
17 октомври 2013 г.

Определение 6.1: Казваме, че a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако във всяка околност на точката а има безброй много елементи на редицата.

Но каква тогава е разликата между точката на сгъстяване на редицата и границата на редицата? Да припомним определението за граница на редица:

Определение 6.2: Казваме, че a е граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ако извън всяка околност на точката а има най-много краен брой елементи на редицата.

От двете определения е ясно, че разликата е много проста. Ако една точка е граница на редица, то тогава в общия случай във всяка епсилон околност на точката има безброй елементи, а извън нея само краен брой. Ако тя е точка на сгъстяване, то във всяка епсилон околност на точката има безброй много елементи на редицата, а извън нея може да има както безкраен, така и краен брой елементи. Виж картинките:



Твърдение 6.1: Ако a е граница на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то a е точка на сгъстяване.

Пример 6.1: Редицата
$$0, 1, 0, 1, ...$$
има 2 точки на сгъстяване.

Определение 6.3: Казваме, че a е точка на сгъстяване за множеството от реални числа M, ако във всяка околност на a има елементи различни от a.

Нека да разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще означим с $M = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, т.е. M е множество с елементи членовете на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще докажем, че ако a е точка на сгъстяване за M, то a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Да допуснем противното, т.е. a е точка на сгъстяване за M, то a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. съществува околност на точката a, такава че в нея има само краен брой елементи а редицата. Това пък от своя страна означава, че съществува по-малка околност на точката a, в която се намира само тя. Това противоречи на определение 2.

Но не е в сила обратното т.е. a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ следователно ако a е точка на сгъстяване за M. За да докажем това е достатъчно да дадем контрапример. Да разгледаме редицата:
$$1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...$$
Тточката 1 е точка на сгъстяване за редицата $a_n = 1$, но не е точка на сгъстяване за множеството 1.

Твърдение 6.2: Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща с граница a, то a е единствена точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство:
Да допуснем противното, т.е. че съществува и друга точка на сгъстяване b за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Без да се ограничава общността на разглежданията можем да приемем, че $a > b$ (принципно ще се получи абсолютно аналогично, ако сметнем за другия случай $a > b$). Понеже $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват само краен брой членове a_n извън

$(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, а понеже b е точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то във всяка околност на точката b(т.е. в интервала $(b-\varepsilon_1; b+\varepsilon_1)$) има безброй много елементи на редицата. Избираме $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{a-b}{2}$. Тогава съществуват само краен брой членове извън $(a - \frac{a-b}{2}; a + \frac{a-b}{2})$ т.е. извън интервала $(\frac{a+b}{2}, \frac{3a-b}{2})$. Но освен това трябва да имаме безкраен брой членове в интервала $(b-\varepsilon_1; b+\varepsilon_1)$ (т.е. в $(\frac{3b-a}{2}, \frac{a+b}{2})$). Така получихме, че $\frac{3b-a}{2} < b < \frac{a+b}{2} < a_n < \frac{3a-b}{2}$ и че извън интервала $(\frac{a+b}{2}, \frac{3a-b}{2})$ има само краен брой членове на редицата, което от своя страна значи че b не е точка на сгъстяване за редицата.■

А сега да видим какво наричаме подредица на редица.

Сега да започнем на интуитивно ниво. Нека имаме някаква си редица. Подредица на една редица наричаме редицата, която ще остане като изхвърлим определен брой членове от редицата.

Пример 6.2: Да разгледаме редицата

$$0, 1, 2, 3, 4,$$

то нейна подредица е примерно:

$$0, 2, 4.$$

Ако една редица е крайна, то всяка нейна подредица също е крайна. Но както предполагам сте забелязали, математиците не обичат да се занимават с простички неща като например крайните редици, а да хващат бика за рогата. Затова да се преместим към безкрайните редици и техните подредици - зачерваме толкова членове, че в редицата да останат безкраен брой. Надявам се, че е ясно, че ако зачеркнем краен брой членове от редицата, то в нея ще останат безкраен брой. Но дали е възможно да зачеркнем безкраен брой членове и достанат още безкраен брой. Нима това е възможно? Да, възможно е.

Пример 6.3: Да разгледаме редицата с общ член $a_n = n$. Ако зачеркнем членовете на нечетните места, ще получим нейната подредица $a_n = 2n$. Освен това сме зачеркнали безброй членове.

Сега да припомним определението за безкрайна числова редица:

Определение 6.4: Безкрайна числова редица е функция от вида:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

където $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Тя се бележи обикновено с $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или $\{a_n\}$.

Сега да скочим към формалното определение за подредица:

Определение 6.5: Нека е дадена редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$a_1, a_2, ...a_n, ...$$

и строго растяща редица от естествени числа $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$$

Тогава редицата $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$

$$a_{n_1}, a_{n_2}, ..., a_{n_k}, ...$$

наричаме подредица на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Понеже $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е строго растящата редица от естествени числа следователно $n_k \geq k$ за всяко k естествено. Ще го покажем по индукция по k:

1. $n_1 \geq 1$, тъй като 1 е най-малкото естествено число, а n_1 е естествено число.

2. Да допуснем, че е изпълнено $n_k \geq k$, ще докажем, че е изпълено $n_{k+1} \geq k + 1$. Понеже редицата е строго растяща $n_{k+1} > n_k \geq k$. Тя е редица от естествени числа следователно $n_{k+1} \geq n_k + 1 > n_k \geq k$. Тогава получаваме $n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq k + 1$ т.е. $n_{k+1} \geq k + 1$.

С това доказахме, че $n_k \geq k$ за всяко k естествено.

Пример 6.4: Да разгледаме редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$1, 2, 3, ..., n, ...$$

и да вземем редицата от естествени числа $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$2, 4, ..., 2n, ...,$$

която е строго растяща ($2(n+1) > 2n$ за $n > 1$). Тогава подредицата, която търсим е $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...$$

или в случая

$$2, 4, ..., 2n, ...$$

Пример 6.5: Да разгледаме редицата на Фибоначи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (припомням как се задаваше $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$) или

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...$$

и да вземем редицата от естествени числа $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$2, 4, ..., 2n, ...,$$

която е строго растяща ($2(n+1) > 2n$ за всяко n). Тогава подредицата, която търсим е $\{a_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ или

$$a_2, a_4, ..., a_{2n}, ...$$

или в случая

$$1, 3, 8, 21, ...$$

Твърдение 6.3: Нека $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Тогава всяка подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Доказателство:

Понеже $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, тогава по определението за сходимост на редица следва, че за всяко $\varepsilon > 0$ съществува ν, такова че при $n > \nu$ е изпълнено, че $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Трябва да проверим, че подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е сходяща и клони към а. Взимаме първия индекс k_0, за който е изпълнено $k_0 > \nu$. Тогава при $n_k \geq k > k_0 > \nu$ (следствие от определението за подредица) е изпълнено, че $a_{n_k} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Следователно получихме, че $a_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$. ■

Твърдение 6.4: Нека a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, тогава съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към a. Обратно, ако имаме подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, която клони към a, то точката a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Доказателство:
$\Rightarrow$) Нека a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ще построим подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, която клони към a.

Взимаме околността $(a-1, a+1)$. Понеже a е точка на сгъстяване, в тази околност има безброй много елементи от $\{a_n\}$. Избираме произволен член от околността и го наричаме a_{n_1}. Взимаме околоността $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$. В нея има безброй много елементи от $\{a_n\}$, а членовете с индекси по-малки или равни на n_1 са краен брой. Избираме произволен член от околността с номер по-голям от n_1 и го наричаме a_{n_2} и т.н.. Докато достигнем до член $a_{n_k} \in \left(a-\frac{1}{k}, a+\frac{1}{k}\right)$ т.е. получаваме неравенството:

$$a - \frac{1}{k} < a_{n_k} < a + \frac{1}{k}$$

Правим граничен преход в него и получаваме.

$$a = \lim_{k\to\infty}\left(a - \frac{1}{k}\right) \leq \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty}\left(a + \frac{1}{k}\right) = a.$$

От полученото неравенство по лемата за двамата полицаи следва, че $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$.
$\Leftarrow$) Нека $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ е подредица, която клони към a. Трябва да докажем, че точката a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Взимаме произволна околност $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Понеже $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ клони към a, то всички с изключение на краен брой членове на $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ са в тази околност. Но всички членове на $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ са членове и на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, т.е. безкраен брой членове на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ са в произволна епсилон околност на a. Так получихме, че точката a е точка на сгъстяване за $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. ■

Теорема 6.1 (на Болцано-Вайерщрас) : От всяка ограничена редица може да се избера сходяща подредица. Или еквивалентно всяка ограничена редица има поне 1 точка на сгъстяване. Теоремата на Вайерщрас е известна още под името принцип за компактността.

Доказателство:

Нека $\{c_n\}$ е ограничена редица следователно за всяко n е изпълнено $c_n \in [a_1, b_1]$ за някакви $a_1 \leq b_1$. Ясно е, че в интервала $[a_1, b_1]$ има безброй много членове на редица, тъй като всички членове са в този интервал, а редицата е безкрайна. Сега ще направим следното - ще разделим интервала на две равни половини. В поне едната от двете половини има безброй много елементи. (Но защо да има безброй много елементи? Да допуснем, че и в двете половинки има краен брой елементи. То тогава и в целия интервал ще има краен брой елементи, защото краен брой елементи+краен брой елементи = краен брой елементи. Противоречие. Следователно поне в едната половинка ще има безкраен брой елементи). Означаваме левия и десния край на половинката с безброй много елементи на редицата съответно с a_2 и b_2. Няма значение коя от двете половинки ще се окаже с безброй много елементи. Ако и двете са такива, избираме коя да е. Отново правим същото - взимаме интервала $[a_2, b_2]$ и го разделяме на две равни части. В поне едната от тези части трябва да има безброй много елементи на редицата. Взимаме тази с безкраен брой или, ако и двете половинки са с безкраен брой елементи, взимаме едната без значение коя. Отново наименуваме краищата на интервала съответно a_3 и b_3. и така нататък.

Предполагам, че се досещате, че както си разделяме интервала постоянно достигаме до парченца, които са все по-малки и по-малки, и накрая достигнем до парченце, което е безкрайно малко и има безброй много елементи на редицата, т.е. на интуитивно ниво трябва да сте наясно, че ще стигнем до точка на сгъстяване.

А сега да продължим със строгото доказателство. Достигаме до интервал $[a_n, b_n]$, в който има безброй много c_n. От нашите означения би трябвало да е ясно, че:

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n < b_1$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре следователно е сходяща. Означаваме границата и с p.

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ... \geq b_n > a_1$$

Редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу следователно е сходяща. Означаваме границата и с q.

Следващата стъпка е да докажем, че $p = q$. Понеже $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

са сходящи, то редицата $a_n - b_n$ също е сходяща. То тогава

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = p - q.$$

Обаче всъщност колко е разстоянието между a_n и b_n? Понеже това са точки, получени при разполовяване на интервала $[a_1, b_1]$ $n-1$ пъти, то тогава

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$$
$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0.$$

Така получихме, че $p - q = 0$, т.е. $p = q$. Нека означим тази точка със C. Ще докажем, че C е точка за сгъстяване за $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$. За тази цел трябва да проверим дали във всяка околност на C има безброй много членове на редицата c_n. Взимаме $\varepsilon > 0$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C = p$, то всички членове на редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, за които е изпълнено $n > \nu_1$, попадат в околността $(C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = C = q$, то при $n > \nu_2$ е изпълнено, че $a_n \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. То при $n > \max\{\nu_1, \nu_2\}$ е изпълнено, че $a_n, b_n \in [C - \varepsilon, C + \varepsilon]$. Фиксираме $n = n_0 > \max\{\nu_1, \nu_2\}$, то тогава в интервала $[a_{n_o}, b_{n_o}]$ има безброй много $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, защото по построение във всеки интервал $[a_n, b_n]$ има безброй много елементи на $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $[a_n, b_n] \subset (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. С това доказахме, че C е точка на сгъстяване на редицата, т.е. всяка ограничена редица има поне 1 точка на сгъстяване. Но от предното твърдение тъй като a е точка на сгъстяване за редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то тогава съществува подредица $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, клоняща към a. ■

Теорема 6.2 (на Кантор) : Нека $[a_n, b_n]$ е редица от интервали, които

1. са затворени
2. всеки интервал $[a_k, b_k]$ е вложен в предходния, т.е. $[a_{k-1}, b_{k-1}] \subset [a_k, b_k]$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$

Тогава съществува единствена точка C, принадлежаща на всички интервали $[a_n, b_n]$.

Доказателство:

Първо да си нарисуваме картинка. На интуативно ниво е ясно предполагам, че ако взимаме интервали, които са един в друг и са все по-малки, и по-малки. Двата края на интервала ще се приближават все повече и повече, докато в един момент стана супер близко и се превърнат в една точка. Разбира се остана да го докажем. Понеже интервалите са вложени един в друг, то имаме, че

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq ... \leq a_n < b_1$$

Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно растяща и ограничена отгоре следователно е сходяща. Означаваме границата и с p.

$$b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq ... \geq b_n > a_1$$

Редицата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотонно намаляваща и ограничена отдолу следователно е сходяща. Означаваме границата и с q. Но от 3) имаме, че $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = p - q = 0$, т.е. $p = q$. Означаваме с C тази точка. Понеже C е границата на монотонно растящата редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $a_n < C$ (твърдение в тема 5). Аналогично понеже C е границата на монотонно намаляваща редица $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, то $b_n > C$ (твърдение в тема 5). Така получихме неравенството $a_n \leq C \leq b_n$. Така доказахме, че има поне една точка C във всички интервали $[a_n, b_n]$. Остава да докажем, че тази точка е единствена. Да допуснем противното, т.е. че съществуват две различни точки C и C', които се във вложените интервали. Тогава

$$a_n \leq C' \leq b_n$$

или аналогично

$$-b_n \leq -C' \leq -a_n.$$

Събираме това неравенство с неравенството

$$a_n \leq C \leq b_n$$

и получаваме неравенството

$$a_n - b_n \leq C - C' \leq -a_n + b_n$$

Понеже C и C' играят еднаква роля:

$$0 \leq |C - C'| \leq -a_n + b_n$$

След граничен преход получаваме, че

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |C - C'| \leq \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

Следователно от лемата за двамата полицаи получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} |C - C'| = |C - C'| = 0$, т.е. $C = C'$ т.е. достигнахме до противоречие. И с това теоремата е доказана. ■