4.Граници на редици. Аритметични действия със сходящи редици

Галина Люцканова

14 октомври 2013 г.

Какво е числова редица? Нещо просто - това са числа наредени по някакво правило.

Пример 4.1: 1, 2, 3, ... (многоточието означава и така нататък. В някои случаи могат да бъдат изброени всички числа, от които се състои редицата, а понякога това е невъзможно, затова се ползва многоточие)

Пример 4.2: 76, 2, 3

Пример 4.3: 2, 76, 3 (предният пример и този не са един и същ, защото при редиците има значение как са наредени числата)

Пример 4.4: 12, 5, 1, 7, 8

Пример 4.5: 3, 6, 9, 12, ...

А сега да видим как всичко това се изразява на математически език:

Определение 4.1: Числова редица е функция от вида:

$$a : B \to \mathbb{R},$$

където $B = \{x | x < n, x \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ или $B = \mathbb{N}$, а $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа.

Сега малко разяснения по определението. Числовата редица е функция, която на всяко от първите n естествени числа (или на всяко естествено число) се съпоставя реално число.

Пример 4.6: Да разгледаме редицата:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, ...$$

На първо място стои числото 2, на второ числото 4, на трето числото 6, ... По този начин на естественото число 1 сме съпоставили реалното число 2, на 2 - числото 4, на 3 - числото 6 и т.н. .Всъщност тази редица е функция с дефиниционна област множеството на естествените числа и множество от стойности естествените числа, кратни на 2.

Пример 4.7: Надявам се да е ясно, че тази редица не е същата като редицата с разменени 2 и 4:

$$4, 2, 6, 8, 10, 12, ...$$

Определение 4.2: Безкрайна числова редица е функция от вида:

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

където $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа и $\mathbb{R}$ е множеството на реалните числа. Тя се бележи обикновено с $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ или само $\{a_n\}$.

От определението следва, че редиците от **пример 4.1**, **пример 4.5**, **пример 4.6** и **пример 4.7** са безкрайни числови редици.

Определение 4.3: Функция с дефиниционна област множеството на първите n естествени числа се нарича крайна числова редица.

Пример 4.8(за крайна числова редица): Да разгледаме редицата:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$$

Тя е крайна числова редица, също така и останалите от изброените примери по-горе.

Ако функцията a задава числова редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, функционалните стойности $a(x)$ се наричат членове на редицата.

$a(1)$ - първият член на редицата (бележи се още и с a_1),
$a(2)$ - вторият член на редицата (бележи се още и с a_2),
....
$a(n)$ - n-тият член на редицата или още общ член на редицата (бележи се още и с a_n)
....

Например за **пример 4.1** имаме $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_k = k, ...$, а за **пример 4.8** имаме $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, ..., a_{10} = 10$.

Начини на задаване на числови редици Една редица може да бъде зададена чрез

1. изброяване на част или всички елементи от редицата(изброяване на всички елементи от редицата е възможно само когато редицата е крайна) - всички примери, посочени досега.

2. общият член (формулата, с която се задават членовете на една редица за произволна стойност на n, се нарича формула за общия член.). В **пример 4.1** формулата е $a_n = n$, **пример 4.6** - $a_n = 2n$. Това са формулите, които са най-близко до ума, но това не значи че няма други формули за общия член примерно за **пример 4.1** може и да е формулата $a_n = n+(n-1)(n-2)(n-3)$ примерно. Това идва да ни покаже, че за еднозначност е по-добре да използваме формула за общия член или рекурентни връзки между елементите (това след примера).

   Пример 4.9: $a_n = n^2$, който е типичен при записа на редици. Това е редицата:
$$1, 4, 9, 16, ..., k^2, ...$$

3. чрез рекурентна връзка между елементите т.е. чрез задаване на първия член (или първите няколко члена) и формула, която изразява всеки следващ член на редицата чрез предходните (един или няколко).

Пример 4.10: $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$, като тук задължително трябва да се посочат началните елементи $b_1 = 1, b_2 = 1$. Тогава получаваме, че $b_3 = b_1 + b_2 = 1 + 1 = 2$, $b_4 = b_2 + b_3 = 1 + 2 = 3$ и т.н. В явен вид редицата се записва:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13....$$

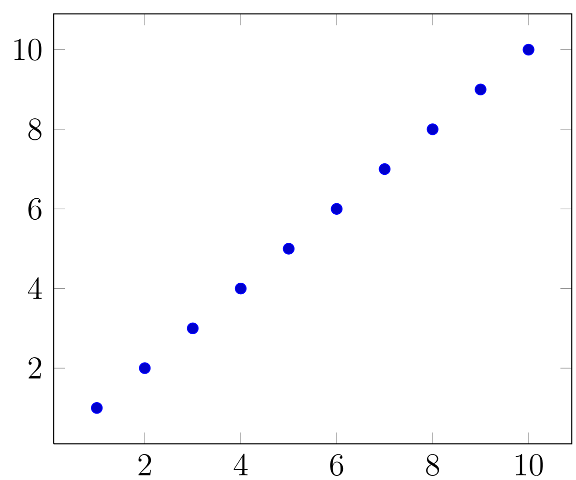
Между другото тази редица си има специално наименование, нарича се редица на Фибоначи

4. чрез неявна дефиниция

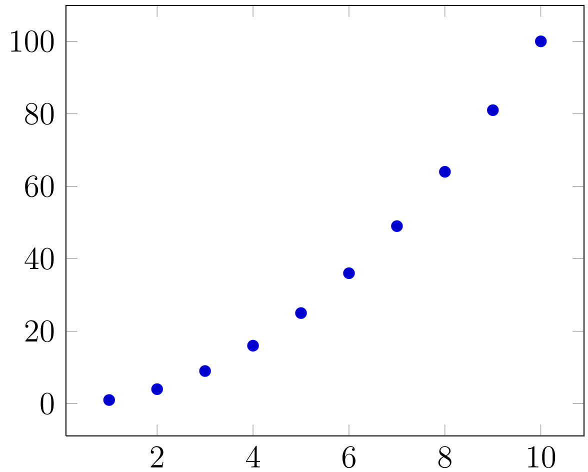
Пример 4.11: $c_n =$ n-тата цифра в десетичния запис на числото π

Изобразяване на редици Тъй като редиците са функции, то от тема 3 трябва да е ясно, че тогава можем да начертаем тяхната графика.

Например графиката на редицата $a_n = n$ е:



А за $a_n = n^2$ графиката е:



Анализът се занимава с безкрайни числови редици, поради това нататък като говоря за редица, ще се подразбира безкрайна числова редица.

Действия с редици Ако са дадени две редици $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$

1. Сбор на двете редици е редицата $c_n = a_n + b_n$;
2. Разлика на двете редици е редицата $c_n = a_n - b_n$;
3. Произведение на двете редици е редицата: $c_n = a_n \cdot b_n$;
4. Частно на двете редици (при положение, че $b_n \neq 0$ за всяко $n \in N$) е редицата $c_n = \frac{a_n}{b_n}$.

Пример 4.12: Да разгледаме редиците $a_n = 3n$ и $b_n = 1$. В явен запис a_n е

$$3, 6, 9, ...,$$

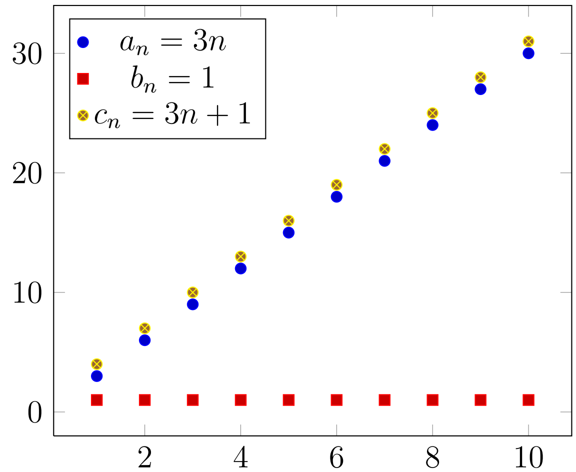
а b_n е

$$1, 1, 1, ...,$$

Тогава сборът на двете редици е редица, чиито k-ти член се намира като сбор на к-тите членове на другите 2 редици т.е. в нашия случай c_n е:

$$4, 7, 10, ...,$$

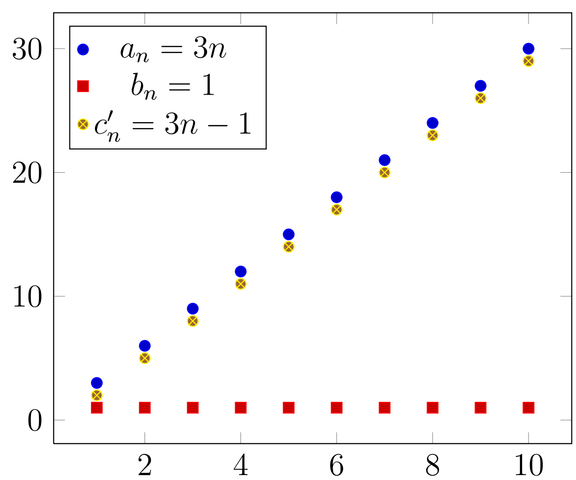
защото $c_1 = a_1 + b_1 = 3 + 1 = 4$, $c_2 = a_2 + b_2 = 6 + 1 = 7$, $c_3 = a_3 + b_3 = 9 + 1 = 10$,...., $c_n = a_n + b_n = 3n + 1$.



Разликата на тези 2 редици (т.е. $a_n - b_n$) е редицата със следния вид:

$$2, 5, 8, ...,$$

защото $c'_1 = a_1 - b_1 = 3 - 1 = 2$, $c'_2 = a_2 - b_2 = 6 - 1 = 5$, $c'_3 = a_3 - b_3 = 9 - 1 = 8$, ... , $c_n = a_n - b_n = 3n - 1$.



Аналогично произведението и частното на двете редици е:

$$3, 6, 9, ...,$$

защото $d_1 = a_1 \cdot b_1 = 3 \cdot 1 = 3$, $d_2 = a_2 \cdot b_2 = 6 \cdot 1 = 6$, ..., $d_n = a_n \cdot b_n = 3n \cdot 1 = 3n$ и аналогично за делението $d'_1 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{3}{1} = 3$, $d'_2 = \frac{a_2}{b_2} = \frac{6}{1} = 6$, ..., $d'_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3n}{1} = 3n$.

Определение 4.4: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \leq M$.

или еквивалентно:

Определение 4.5: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отгоре, ако членовете на редицата образуват множество, което е ограничено отгоре.

Определение 4.6: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена отдолу, ако съществува число $M \in \mathbb{R}$, такова че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила $a_n \geq M$.

Определение 4.7: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е ограничена, ако е ограничена отгоре и ограничена отдолу.

Определение 4.8: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е неограничена, ако не е ограничена отдолу или не е ограничена отгоре.

Пример 4.13: Да разгледаме редицата:

$$2, 4, 6, 8, ...$$

Тя е ограничена отдолу от 2 (очевидно всеки член на редицата $a_n = 2n$ е по-голям или равен на 2) и неограничена отгоре. Да допуснем, че редицата е ограничена отгоре. Тогава съществува число M, такова че $M \geq 2n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Да разгледаме числото $2\ulcorner M \urcorner$ ($\ulcorner M \urcorner$ означава най-малкото цяло число надминаващо M, примерно $\ulcorner 1.111 \urcorner = 2$, $\ulcorner 0.0007 \urcorner = 1$, $\ulcorner 0.998 \urcorner = 1$). Понеже $2\ulcorner M \urcorner$ е член от редицата $\{a_n\}$ и $2\ulcorner M \urcorner > M$, то тогава редицата a_n не е ограничена отгоре от M, от където достигнахме до противоречие. Следователно получихме, че редицата е ограничена отдолу, но не е ограничена отгоре.

Пример 4.14: Да разгледаме друг пример:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...$$

аналогично на предишния пример се показва, че редицата е ограничена (ограничена отдолу от 0 и ограничена отгоре от 1).

Пример 4.15: Последен пример за ограниченост на редици. Да разгледаме редицата:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Тя е ограничена отгоре от 9 и ограничена отдолу от 1 т.е. е ограничена. Редиците, които са с краен брой членове, винаги са ограничени - отдолу от минималния си елемент, отгоре - от максималния.

Пример 4.16: Какво научихме досега, че ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е зададена чрез общия си член примерно $a_n = \frac{1}{n}$ можем да си сметнем елементарно съответния член на редицата. В случая $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$,...., $a_{521} = \frac{1}{521}$,...,$a_{7654} = \frac{1}{7654}$,... . Но на жадните математици за още знание това не им е достатъчно. Добре, а какво става в безкрайността? Можем ли да сметнем a_{∞}(дебело подчертавам, че този запис не е валиден и се използва в случая само за онагледяване на примера)? Така да си помислим по следния начин, нашата редица се състои от членове, те са безкраен брой - какво означава това, че до който и член да сме, то винаги има следващ, и искаме да сметнем "безкрайния член ". За да можем да сметнем какво се случва в безкрайността, за да сме сигурни, а не да целим, редицата трябва да се установи около едно число. В нашия пример членовете се доближават все повече и повече до нулата (ако не сте убедени все още, може да сметнете още от членовете на редицата примерно a_{10000}, a_{100000}, $a_{100000000}$,...). На интуитивно ниво би трябвало да е станало ясно, че безкрайният член на редицата е 0. Сега да въведем строго понятието "безкраен член ", което на математически език се нарича граница на редица:

Определение 4.9: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща, ако за всяко $\varepsilon > 0$ съществува индекс на член от редицата ν, зависещ от ε, такъв че винаги когато $n > \nu$ да е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Числото a се нарича граница на редица и съществува само ако $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща. Границата на редицата се бележи по следния начин $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ (чете се като границата на редицата a_n при n клонящо към безкрайност е a).

По-кратко определението ще записваме по следния начин:

$$\begin{aligned}
& \forall\varepsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N} \forall n > \nu : |a_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall\varepsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N} \forall n > \nu : -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall\varepsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N} \forall n > \nu : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \Longleftrightarrow \\
\Longleftrightarrow \quad & \forall\varepsilon > 0 \exists\nu \in \mathbb{N} \forall n > \nu : a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Сега доказахме, че всеки член с номер по-голям от ν ще попадне в произволна ε-околност на a (или другояче в произволно близко до a).Да се върнем отново на определението. От него се вижда, че ако редицата е сходяща, то извън произволна ε-околност на a, може да има членове с номера по-малки от ν, което е фиксирано число. Така получаваме еквивалентно определение за сходимост на редица:

Определение 4.10: Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница a, ако съществува реално число a такова, че извън всяка ε-околност на a има най-много краен брой членове на редицата.

Пример 4.17: Нека да докажем с определението за сходимост, че границата на редицата $a_n = \frac{1}{n}$ е 0 т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ трябва да съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$. В нашия случай можем да пресметнем $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$. Да фиксираме $\varepsilon > 0$, тогава трябва така да изберем ν, че за всяко $n > \nu$ да е изпълнено

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1}$$

Понеже $n > \nu$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{\nu}$ т.е. за да е изпълнено неравенството (1) можем да изберем ν да е такова, че да е изпълнено неравенството $\varepsilon > \frac{1}{\nu}$. Най-малкото ν, което изпълнява това неравенство, е $\nu = \ulcorner\frac{1}{\varepsilon}\urcorner$(не трябва да забравяме, че $\nu \in \mathbb{N}$). Така ако изберем $\nu = \ulcorner\frac{1}{\varepsilon}\urcorner$, ще бъде в сила определението за сходимост - за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu = \frac{1}{\varepsilon}$ такова, че ако $n > \nu$, то тогава $|a_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{\nu} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$.

Определение 4.11: Ако редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е сходяща, то тя е разходяща;

Пример 4.18: Да разгледаме редицата

$$1, -1, 1, -1, 1, -1...$$

Тази редица не е сходяща. Но защо е така? Първо на интуитивно ниво ние просто в безкрайност не можем да кажем дали ще отидем в 1 или в -1. Сега доказателството. Да допуснем противното т.е. редицата е сходяща и границата и нека е a. Тогава по определението имаме за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число ν, зависещо от ε, такова че винаги когато $n > \nu$ да е изпълнено $|a_n - a| < \varepsilon$. Нека да изберем $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$. Тогава при $n > \nu$ и $n = 2k + 1$ имаме $|1 - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$, а при при $n > \nu$ и $n = 2k$ имаме $|-1 - a| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ т.е. получаваме:

$$|1 - a| < \frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k + 1$$

$$|-1 - a| < \frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k$$

След това разкриваме модулите:

$$-\frac{1}{2} < 1 - a < \frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k + 1$$

$$-\frac{1}{2} < -1 - a < \frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k$$

събираме числата

$$-\frac{3}{2} < -a < -\frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k + 1$$

$$\frac{1}{2} < -a < \frac{3}{2}, \text{ ако } n = 2k$$

умножаваме по -1 и получаваме:

$$\frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}, \text{ ако } n = 2k + 1$$

$$-\frac{3}{2} < a < -\frac{1}{2}, \text{ ако } n = 2k$$

Така изкарахме, че $a < -\frac{1}{2}$ и едновременно $a > \frac{1}{2}$, откъдето достигнахме до противоречие, следователно редицата не е сходяща.

Твърдение 4.1: Редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където $a_n = a$ за всяко $n \in \mathbb{N}$, има граница a.

Доказателство:
Доказателството следва непосредствено от определението. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува число $\nu = 0$, зависещо от ε, такова че винаги когато $n > \nu = 0$ да е изпълнено $|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$. ■

Свойства на сходящите редици:

1. Ако към една редица прибавим или премахнем краен брой елементи, то това не влияе на нейната сходимост.

   Доказателство:
   Ще използваме второто определение за сходимост, а именно - Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща и има граница a, ако извън всяка ε-околност на a има само краен брой членове на редицата. Ако към нашата редица прибавим краен брой елементи, то дори всички те да са много далече, извън произволна ε-околност на a ще има най-много краен брой елементи (краен брой + краен брой = краен брой). Аналогично и при премахването на краен брой елементи. ■

2. Нека $a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Нека a_n и b_n са сходящи и $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = b$. То тогава $a \leq b$. (По-просто - ако всеки член на редицата a_n е по-малък или равен от всеки член на редицата b_n и редиците са сходящи(и знаем къде отиват в безкрайност редиците), то тогава в безкрайният член на a_n е по-малък или равен от безкрайния член на b_n).

   Доказателство:
   Да допуснем противното т.е. $b < a$. Да фиксираме $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$. Понеже a_n е сходяща и има граница a, то определението съществува индекс ν_1, такъв че за $n > \nu_1$ имаме $|a_n - a| < \varepsilon$ т.е. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.
   Понеже b_n е сходяща и има граница b, то определението съществува

индекс ν_2, такъв че за $n > \nu_2$ имаме $|b_n - b| < \varepsilon$ т.е. $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$. Нека $\nu = \max(\nu_1, \nu_2)$. Тогава за $n > \nu$ получаваме

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = a + \frac{a-b}{2} = \frac{3a-b}{2}$$

$$\frac{-a+3b}{2} = b - \frac{a-b}{2} = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

т.е. получаваме, че

$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

следователно $b_n < a_n$ за $n > \nu$, което е в противоречие с условието. ■

Забележки:

(а) Всъщност не е задължително и неравенството $a_n \leq b_n$ да е изпълнено за $\forall n \in \mathbb{N}$. Оказва се достатъчно $a_n \leq b_n$ да е изпълнено за безброй много стойности на n.(абсолютно аналогично върви доказателството)

(б) Дали ако в горната теорема е изпълнено $a_n < b_n$ за всяко n, то следва ли, че $a < b$? Отговорът е не. Ще дам контрапример. Да разгледаме редиците $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = 0$. То тогава е очевидно, че $a_n = 0 < \frac{1}{n} = b_n$ за всяко $n > 0$. Но както видяхме в **пример 4.9** границата на редицата a_n е 0, каквато е и границата на редицата b_n (от твърдението), т.е. $0 = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

3. Ако a_n е сходяща, то тя е ограничена.

Доказателство:

Нека границата на $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е A. Избираме $\varepsilon > 0$ произволно, например $\varepsilon = 999$. Тогава съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е в сила $|a_n - A| < \varepsilon$, т.е. получаваме, че $A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon$ при $n > \nu$. Знаем, че членовете при $n \leq \nu$ може да са на произволно място по числовата ос. Ако означим с $m_1 = \min\{a_1, a_2, ..., a_\nu, A - \varepsilon\}$, а $m_2 = \max\{a_1, a_2, ..., a_\nu, A + \varepsilon\}$. От тук получаваме, че $m_1 \leq a_n \leq m_2$ за всяко $n \in \mathbb{N}$.От където следва, че всяка сходяща редица е и ограничена. ■

4. Нека a_n е сходяща и има граница l и c_n е сходяща и има граница l. Нека $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$, където $\nu \in \mathbb{N}$. Тогава b_n е сходяща и има граница l. Това свойство е известно още с името лема за двамата полицаи (лема за двамата милиционери), защото ако си подхванат от двете страни от по един полиций и двамата отиват затвора, то ти отиваш в затвора.

Доказателство:
Избираме $\varepsilon > 0$. Тогава съществува $N_1 \in \mathbb{N}$, такова че при $n > N_1$ е изпълнено $|a_n - l| < \varepsilon$ т.е. $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$ (понеже a_n е сходяща и има граница l). Освен това съществува $N_2 \in \ N$, такова че при $n > N_2$ имаме $|c_n - l| < \varepsilon$, т.е. т.е. $l - \varepsilon < c_n < l + \varepsilon$. От условието имаме, че $a_n \leq b_n \leq c_n$ за $n > \nu$. Тогава за $n > \max\{N_1, N_2, \nu\}$ имаме:

$$l - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < l + \varepsilon$$

Така получихме, че $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$ за $n > \max\{N_1, N_2, \nu\}$, което означава, че b_n е сходяща и има граница l. $\blacksquare$

Следствие 4.1: Нека $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, а $\{b_n\}$ е ограничена редица, то тогава $a_n.b_n \to 0$.

Доказателство:
Искаме да докажем, че $\{a_n.b_n\}$ е сходяща и клони към 0 т.е. за всяко $\varepsilon_0 > 0$ съществува $\nu_0 > 0$, такова че ако $n > \nu_0$ е в сила $|a_n \cdot b_n - 0| = |a_n \cdot b_n| < \varepsilon_0$. За целта фиксираме $\varepsilon_0 > 0$. Понеже $\{b_n\}$ е ограничена редица, то съществува M, такова че $|b_n| \leq M$. Тъй като a_n е сходяща и има граница 0, то тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществува $\nu > 0$, такова че ако $n > \nu$ е в сила $|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon$. Фиксираме $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{M}$. Сега остава да намерим ν_0, такова че да е изпълнено наравенството $|a_n \cdot b_n| < \varepsilon_0$. Неравенството е изпълнено при $\nu_0 > \nu > 0$:

$$|a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq \varepsilon \cdot M = \frac{\varepsilon_0}{M} \cdot M = \varepsilon_0. \quad \blacksquare$$

Но какъв е проблемът, ако b_n е неограничена редица? Нали в училище са ни учили че нула, по каквото и да е число е нула. За да видим по ясно къде е проблемът да разгледаме следния пример:

Пример 4.19: Нека да разгледаме 2 редици с общи членове съответно $a_n = \frac{1}{n}$ и $b_n = 2n$. В предишните примери показахме, че $\{a_n\}$ е сходяща и границата и е 0 и че $\{b_n\}$ е неограничена. Какво се случва с произведението на двете редици - $c_n = a_n.b_n = \frac{1}{n} \cdot 2n = 2$. Получихме редица с граница 2.

5. Ако $\{a_n\}$ е сходяща и клони към A, то и $\{|a_n|\}$ е сходяща и клони към |A|.

Доказателство:
$\{a_n\}$ е сходяща и клони към A, т.е. за всяко $\varepsilon > 0$ съществува естествено число ν, такова че ако $n > \nu$ е в сила $|a_n - A| < \varepsilon$.

(а) Нека $A > 0$. Тогава ще докажем, че $a_n > 0$ при $n > \nu$ и ще получим:
$$||a_n| - |A|| = |a_n - A| < \varepsilon$$
и $\varepsilon = \frac{A}{2} > 0$, то тогава съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $|a_n - A| < \frac{A}{2}$. Така получаваме, че $-\frac{A}{2} < a_n - A < \frac{A}{2}$ или $a_n > \frac{A}{2} > 0$ е в сила при $n > \nu$. Тогава получаваме, че при $n > \nu$:

(б) Доказателството върви аналогично, ако $A < 0$.

(в) Нека $A = 0$ и за всяко $\varepsilon > 0$ съществува естествено число ν, такова че ако $n > \nu$, то $||a_n| - 0| = |a_n| = ||a_n - 0| < \varepsilon$. ■

6. Ако $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и с граници съответно A и B, тогава:

(а) $\{a_n + b_n\}$ е сходяща и клони към $A + B$;

(б) $\{a_n - b_n\}$ е сходяща и клони към $A - B$;

(в) $\{a_n \cdot b_n\}$ е сходяща и клони към $A \cdot B$;

(г) Ако $B \neq 0$, то редицата $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ е сходяща и клони към $\frac{A}{B}$;

<u>Доказателство:</u>

(а) Избираме $\varepsilon > 0$ произволно и нека $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. Понеже $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ са сходящи и с граници съответно A и B, то съществуват $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, такива че при $n > N_1$ е изпълнено $|a_n - A| < \varepsilon_1$ и при $n > N_2$ е в сила $|b_n - B| < \varepsilon_1$. В такъв случай при $n > \max\{N_1, N_2\}$ имаме:

$$|(a_n+b_n)-(A+B)| = |a_n-A+b_n-B| < |a_n-A|+|b_n-B| < \varepsilon_1+\varepsilon_1 = \varepsilon$$

Така получихме, че $\{a_n + b_n\}$ е сходяща и клони към $A + B$.

(б) Трябва да докажем, че редицата $a_n - b_n = a_n + (-b_n)$ е сходяща. За целта ще докажем, че ако b_n е сходяща, то и $-b_n$ е сходяща и границата ѝ е $-B$. То тогава понеже сбор от сходящи редици е сходяща редица, ще следва, че $\{a_n - b_n\}$ е сходяща $A - B$. Фиксираме $\varepsilon > 0$. Понеже редицата b_n е сходяща, то съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $|b_n - B| < \varepsilon$. Тогава $n > \nu$ е изпълнено:

$$|-b_n - (-B)| = |-b_n + B| = |b_n - B| < \varepsilon.$$

(в) Понеже $\{a_n\}$ е сходяща, следователно $\{a_n\}$ е ограничена. Тогава имаме, че

$$\begin{aligned} 0 &\le |a_n.b_n - A.B| = |a_n.b_n - a_n.B + a_n.B - A.B| \le \\ &\le |a_n.b_n - a_n.B| + |a_n.B - A.B| = |a_n.(b_n - B)| + \\ &+ |(a_n - A).B| \le |a_n|.|b_n - B| + |a_n - A|.|B| \end{aligned}$$

Понеже $\{a_n\}$ е ограничена, то и $\{|a_n|\}$ е ограничена. Редицата $c_n = b_n - B$ е сходяща и клони към $B - B = 0$, като разлика на две редици. Редицата $\{|c_n|\}$ е сходяща и клони към $|0|$, то тогава $|a_n|.|b_n - B| \to 0$ от следствие 1. Аналогично $|a_n - A|.|B| \to 0$. От

$$0 \le |a_n.b_n - A.B| \le |a_n|.|b_n - B| + |a_n - A|.|B|$$

и $|a_n|.|b_n - B| + |a_n - A|.|B| \to 0$ по лемата за двамата полицаи следва, че an.bn е сходяща и клони към A.B;

(г) Ще докажем, че ако $B \neq 0$ и $b_n \to B$, то $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}$. То тогава от предишните доказателства ще следва:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to A \cdot \frac{1}{B} = \frac{A}{B}$$

и с това теоремата ще е доказана. Тъй като $B \neq 0$, следователно $|B| > 0$.

i. Нека да разгледаме първо случая $B > 0$. Тъй като b_n е сходяща и $\varepsilon = \frac{B}{2} > 0$, то тогава съществува $\nu \in \mathbb{N}$, такова че при $n > \nu$ е изпълнено $|b_n - B| < \frac{B}{2}$. Така получаваме, че $-\frac{B}{2} < b_n - B < \frac{B}{2}$ или $b_n > \frac{B}{2} > 0$ е в сила при $n > \nu$. От тук излиза, че $\frac{1}{b_n} < \frac{2}{B}$ е изпълнено при $n > \nu$. Тогава получаваме, че при $n > \nu$:

$$0 \leq \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n \cdot B}\right| = \frac{|b_n - B|}{b_n \cdot B} < \frac{2}{B^2}|b_n - B|$$

Но знаем, че редицата $|b_n - B| \to 0$, а редицата $c_n = \frac{2}{B^2}$ е ограничена, следователно получаваме, че $\frac{2}{B^2}|b_n - B| \to 0$ по следствие 1 и по лемата за двамата милиционери излезе, че $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

ii. Аналогично, ако $b < 0$. Опитайте се да го докажете сами. И така поличихме, че редицата $\frac{a_n}{b_n}$ е сходяща и клони към $\frac{A}{B}$. ■

Понякога думата клони се използва и по отношение на редици, които са разходящи. И се оказва удобно да се въведе следната дефиниция:

Определение 4.12: Казваме, че редицата a_n клони към $+\infty$ (бележим с $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$), ако за всяко число M съществува ν, такова че при $n > \nu$ е изпълнено, че $a_n > M$.

Или с думи прости - колкото и голямо число M да изберем, то почти всички членове на редицата ще са по-големи от него. Да дадем първо един пример за такава редица, за да не остава човек с чувството, че си измисляме някакви понятия, които никъде не се използват:

Пример 4.20: Да разгледаме редицата $a_n = n$. Тази редица клони към $+\infty$. Да допуснем противното т.е. съществува число $M > 0$, такова че $a_n \leq M$. Да разгледаме числото $\lceil M \rceil$(което означава най-малкото цяло число по-голямо от M). То $\lceil M \rceil$ е член от $\{a_n\}$ и $\lceil M \rceil \geq M$. Така достигнахме до противоречие.

Определение 4.13: Казваме, че редицата a_n клони към $-\infty$ (бележим с $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$), ако за всяко число P съществува ν, такова че при $n > \nu$ е изпълнено, че $a_n < P$.

Пример 4.21: Да разгледаме редицата $a_n = -5n$. Тази редица клони към $-\infty$. Доказателството е аналогично на предния пример.

Теорема 4.1: Нека е дадена редицата a_n, като $a_n > 0$ за всяко n. Да образуваме редицата $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогава ако

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Доказателство:

1. Нека е изпълнено $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Да изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon = \frac{1}{A}$, то по дефиницията за сходяща редица съществува ν, такова че при $n > \nu$ имаме $|a_n - 0| < \varepsilon = \frac{1}{A}$ т.е. получихме $a_n < \frac{1}{A}$ следователно $A < \frac{1}{a_n}$ при $n > \nu$.Това означава, че $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.
2. Нека е изпълнено $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$. Да изберем едно произволно положително число A. Ако $\varepsilon = \frac{1}{A}$, то по дефиницията за сходяща редица съществува ν, такова че при $n > \nu$ да имаме $a_n > A$ т.е. получихме $a_n > \frac{1}{\varepsilon}$ следователно $\frac{1}{a_n} < \varepsilon$ при $n > \nu$ или $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| < \varepsilon$ при $n > \nu$. Това означава, че $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$. ■

Теорема 4.2: Нека е дадена редицата a_n, като $a_n < 0$ за всяко n. Да образуваме редицата $b_n = \frac{1}{a_n}$. Тогава ако

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = -\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

Доказателство: Доказателството е аналогично на предишното.