3.Числови функции, графики. Обратно изображение

Галина Люцканова

13 октомври 2013 г.

Определение 3.1: Ще казваме, че в множеството X е дефинирано изображение f със стойности в множеството Y, когато на всяко x от X по някакво правило или закон се съпоставя точно един елемент y от Y и тогава пишем $f(x) = y$ или $f : X \to Y$.Множеството X се нарича дефиниционно множество или дефиниционна област за f, а Y - област от стойности на f.
Забележка: Ако Y е множество от числа, обикновено вместо общия термин "изображение "се използва "функция ".

Забележете, че в дефиницията се казва само че от всеки елемент от x трябва да излиза точно една стрелка, но нищо не се казва относно броя на влизащите стрелки в y т.е. може да се окаже, както че няма влизаща стрелка в y, така и че има повече от 1.

Пример 3.1: $f(x) = 2x$, като $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, тогава знаем примерно, че $f(1) = 2$, $f(5) = 10$ и т.н.

Определение 3.2: Елементът $y \in Y$, удовлетворяващ $y = f(x)$, наричаме образ на x в изображението f. Множеството от образите на всички елементи в X се нарича образ на множеството X при функцията f и бележим с $Im\varphi$.

Поради по-горните съждания можем да заключим, че $Im\varphi \subset Y$ (или f(X)).

Определение 3.3: Казваме, че f е инективна, ако от това че $x_1 \neq x_2$ следва $f(x_1) \neq f(x_2)$.

По-простичко, ако f е инективна, то различни x отиват в различни y, което означава към всеки елемент y на Y сочи най-много 1 стрелка.

Пример 3.2: $f(x) = x(x-2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е инекция, защото $f(0) = 0 = f(2)$

Пример 3.3: $f(x) = x \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е инекция, защото ако $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) = x_1 \neq x_2 = f(x_2)$

Определение 3.4: Казваме, че f е сюрективна, ако $\forall y \in Y \quad \exists x \in X : \quad f(x) = y$ ($Im\varphi = Y$).

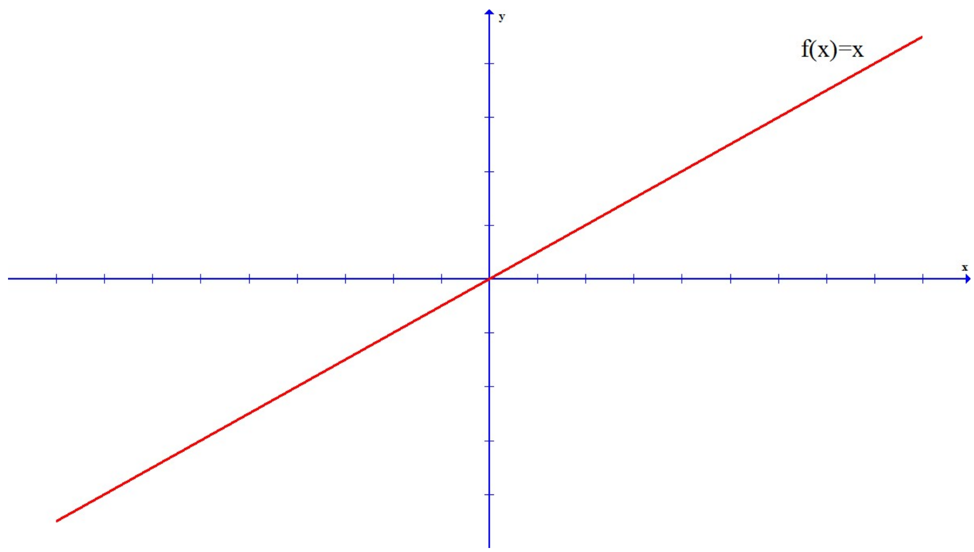
По-простичко, ако f е сюрективна, то към всяко y от Y сочи поне една стрелка.

Пример 3.4: $f(x) = x(x-2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не е сюрекция, защото от училище знаем, че върхът на параболата е в $-\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ и минималната стойност е -1 т.е. каквито и x да зададем, няма да получим стойности по-малки от -1, което означава, че не е сюрекция.

Пример 3.5: $f(x) = x \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е сюрекция, защото каквото и y да изберем винаги ще съществува x такова, че $f(x) = y$.

Определение 3.5: Казваме, че f е биекция, ако е инекция и сюрекция.

Пример 3.6: Очевидно е, че $f(x) = x \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е биекция (доказахме в предните примери, че е инекция и сюрекция).



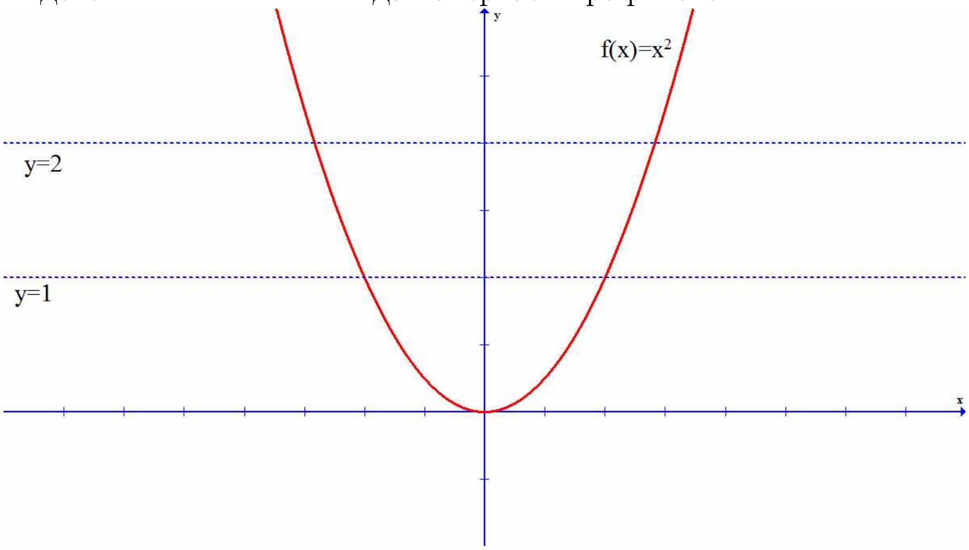
Ако една функция е биективна, то на всяко x съответства точно едно y. Следователно можем да разгледаме функцията $f^{-1} : Y \to X$, дефинирана по правилото $f^{-1}(y) = x$, ако $f(x) = y$. За всяка биективна функция са в сила равенствата:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= x \quad \forall x \in X \\ f(f^{-1}(y)) &= y \quad \forall y \in Y \end{aligned}$$

А сигурно се чудите защо трябва да е биективна? Ако една функция не е инективна, то различни x няма да отиват в различни y, то ако обърнем една такова функция, ние всъщност няма да получим функция, защото при едно и също y можем да отидем в различни x, което противоречи на дефиницията на функция. А ако не е сюрективна, то не към всяко y ще води x и ако се опитаме да обърнем такава функция, ние пак няма да получим функция, защото по определението за функция трябва на всяко y да съответства поне едно x, а в случая няма да е така.

Определение 3.6: Графика на функцията f наричаме съвкупността от точки $(x, f(x))$ в $X \times Y$, където $x \in X$, $f(x) \in Y$.

Пример 3.7: Да разгледаме функцията $f(x) = x^2 \quad f : X \to Y$, където $X = \mathbb{R}$ и $Y = \mathbb{R}$ и да начертаем графиката:



От графиката си личи, че

1. $y \geq 0 \quad \forall x \in X$, т.е. за да бъде изображението сюрекция би трябвало $Y = [0, +\infty)$. (От определението за сюрекция)

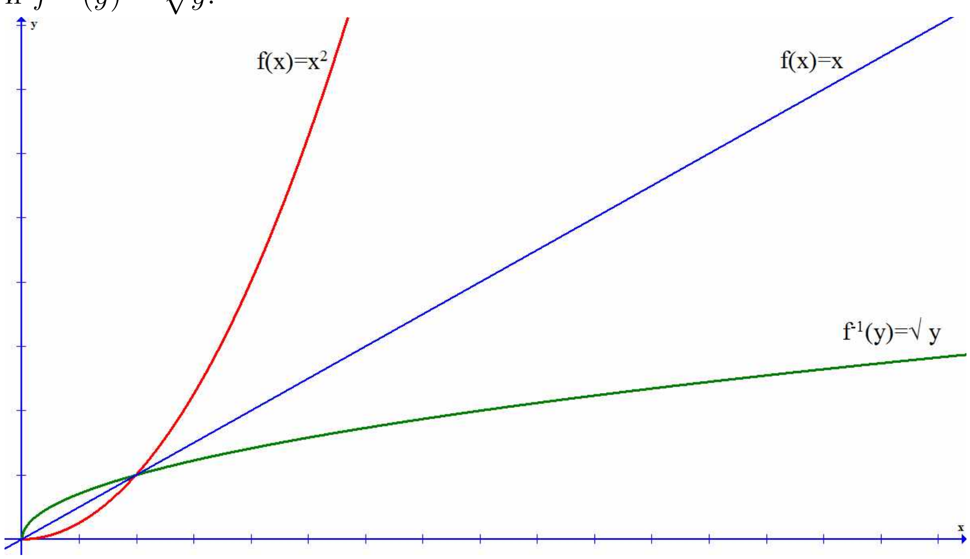
2. функцията не е инекция. Това може да стане по-много лесен начин - започваме да чертаем прави успоредни на абцисната ос (т.е. $y = const$). Ако функцията е инекция, всяка такава права няма да пресича или ще пресича точно веднъж графиката на функцията (това следва директно от определението). В нашия случай очевидно не е така. Сега възниква въпросът как да постогнем така желаната инекция? За да стане инекция, трябва да "намалим "дефиниционната област (при което получаваме другo изображение), така че успоредните прави на абцисната ос да не пресичат повече от веднъж графиката на функцията. От графиката се вижда, че ако махнем цялата графика наляво от нулата или цялата надясно от нулата ще се получи инекция. Разбира се нека го докажем с определението:

   Доказателство: Нека $x_1 \neq x_2$ и $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, тогава дали е изпълнено $f(x_1) = x_1^2 \stackrel{?}{=} x_2^2 = f(x_2)$. Да допуснем, че $f(x_1) =$

$x_1^2 = x_2^2 = f(x_2)$ следователно $0 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$. Но $x_1 \neq x_2$ от условието т.е. получихме $x_1 + x_2 = 0$ при $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$. Това означава, че $x_1 = x_2 = 0$, което е в противоречие с $x_1 \neq x_2$. Следователно ако $x_1 \neq x_2$ и $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, то $f(x_1) = x_1^2 \neq x_2^2 = f(x_2)$, т.е. $f(x) = x^2$ при $x \in [0, +\infty)$ е инективна функция.

3. Функцията $f(x) = x^2 \quad f : X \to Y$, където $X = [0, +\infty)$ и $Y = [0, +\infty)$ е биекция. Значи можем да и намерим обратната $f^{-1}(y) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \sqrt{y}$ при $y \in [0, +\infty)$.

4. Сега да начертаем графиките на $f(x) = x^2$, $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ и $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$:



Да разгледаме функцията $f(x) = y \quad f : X \to Y$. Нека тя е биективна. Следователно можем да намерим обратната и $f^{-1}(y) = x$, като $f : Y \to X$. Нека да начертаем графиките на функциите. Графиката на $f(x)$ е съвкупността от точки $(x, f(x))$, където $x \in X$, $f(x) \in Y$, а графиката на обратната на $f(x)$ $(f^{-1}(y) = x)$ е съвкупността от точки (y, x), където $x \in X$, $f(x) \in Y$. Но $y = f(x)$ тогава графиката на обратната на $f(x)$ $(f^{-1}(y) = x)$ е съвкупността от точки $(f(x), x)$. Може да се докаже, че точките $(x, f(x))$ и $(f(x), x)$ се намират на едно и също разстояние от правата $y = x$ (или ъглополовящата на първи и трети квадрант). Тогава имаме осева симетрия между графиките на $f(x) = y$ и на $f^{-1}(y) = x$ с ос на симетрия ъглополовящата на първи и трети квадрант.

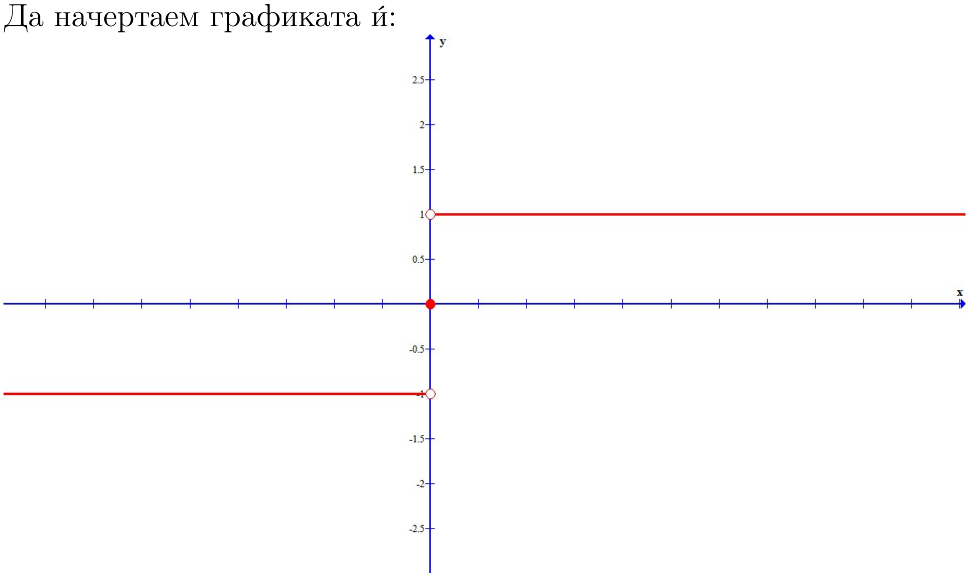
Пример 3.8(Sign function): Да разгледаме функцията $sgn(x) : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$, която показва знака на дадено число. Тя се дефинира по следния начин:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{ако } x < 0, \\ 0 & \text{ако } x = 0, \\ 1 & \text{ако } x > 0. \end{cases}$$

Функцията $sgn(x)$ е 1, когато x е положително,и $sgn(x)$ е -1,когато x е отрицателно. Тази функция може да бъде дефинирана аналогично:

$$sgn(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{ако } x \neq 0, \\ 0 & \text{ако } x = 0, \end{cases}$$

Да начертаем графиката ѝ:



Проверете сами, че функцията е сюрективна, но не е инективна.

Пример 3.9(Функция на Дирихле): Да разгледаме функцията $D : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$, която показва дали дадено реално число е рационално или е ирационално. Тя се дефинира по следния начин:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{ако } x \in Q, \\ 0 & \text{ако } x \in I, \end{cases}$$

Тук е ясно, че функцията D е сюрективна, но тя не е инективна отново, защото $D(1,34) = D(55) = 1$. Невъзможно е да се начертае графиката на функцията D.

Пример 3.10(Модифицирана функция на Дирихле): Да разгледаме функцията $D_1 : [0,1] \to [0,1]$, която показва дали дадено реално число е рационално или е ирационално. Тя се дефинира по следният начин:

$$D_1(x) = \begin{cases} x & \text{ако } x \in Q, \\ 1 - x & \text{ако } x \in I, \end{cases}$$

Отново е ясно, че функцията D_1 е сюрективна. Но дали тя е инективна?

1. Ако $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{Q}$ и $x_1 \neq x_2$. Тогава $D_1(x_1) = x_1 \neq x_2 = D_1(x_2)$
2. Ако $x_1 \in \mathbb{I}$, $x_2 \in \mathbb{I}$ и $x_1 \neq x_2$. Тогава $D_1(x_1) = 1 - x_1 \neq 1 - x_2 = D_1(x_2)$
3. Ако $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \in \mathbb{I}$ и $x_1 \neq x_2$. Тогава $D_1(x_1) = x_1 \stackrel{?}{=} 1 - x_2 = D_1(x_2)$, следователно $\mathbb{I} \ni x_2 \stackrel{?}{=} 1 - x_1 \in Q$ и понеже $I \cap Q = \emptyset$,тогава $x_2 \neq 1 - x_1$, от където пък получихме на свой ред $D_1(x_1) = x_1 \neq 1 - x_2 = D_1(x_2)$

От всички разгледани досега случаи достигнахме до извода, че D_1 е инективна.

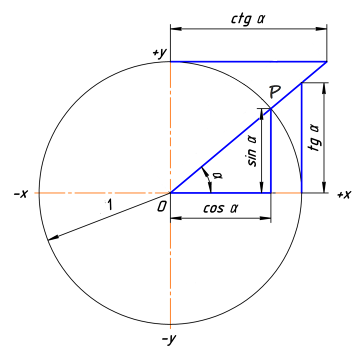
Сега трябва да ѝ намерим обратната, за да видите как се прави това - ще го направим поотделно за двата случая. Да разгледаме $f : \mathbb{Q}[0,1] \to \mathbb{Q}[0,1]$,където $\mathbb{Q}[0,1]$ са рационалните числа в интервала $[0,1]$. По-конкретно $f(x) = x = y$. Ясно е от предишните доказателства, че $f(x)$ е биективна. Тогава обратната ѝ е $f^{-1} : \mathbb{Q}[0,1] \to \mathbb{Q}[0,1]$ и по-конкретно $f^{-1}(y) = y$.Да разгледаме $f : \mathbb{I}[0,1] \to \mathbb{I}[0,1]$,където $\mathbb{I}[0,1]$ са ирационалните числа в интервала $[0,1]$. По-конкретно $g(x) = 1 - x = y$. Ясно е предишните доказателства, че $g(x)$ е биективна. Тогава обратната и е $f^{-1}(y) = x = 1 - y$. Така окончателно за обратната на D_1 получихме:

$$D_1^{-1}(x) = \begin{cases} y & \text{ако } y \in Q, \\ 1 - y & \text{ако } y \in I, \end{cases}$$

Сега можем да проверим дали $f^{-1}(f(x)) \stackrel{?}{=} x$

Доказателство: Ако $x \in \mathbb{Q}$, тогава $f(x) = x \in \mathbb{Q}$. При $x \in \mathbb{Q}$ $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x) = x$ Ако $x \in \mathbb{I}$, тогава $f(x) = 1 - x \in \mathbb{I}$. При $x \in \mathbb{I}$ $f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(1-x) = 1-(1-x) = x$.■
Както вероятно се досещате и на тази функция е невъзможно да се начертае графиката и.

Обратни кръгови(тригонометрични) функции Имам следното наблюдение, че когато човек чуе за тригонометрични функции, обикновено изпада в небивал ужас. Сега ще преговорим накратко какво е това тригонометрична функция. Нека имаме ортонормирана координатна система 0xy с център O и окръжност с център O и радиус 1(такава окръжност се нарича единична окръжност).Нека P е точка от окръжността и α е ъгълът между $\overrightarrow{OP}$ и положителната посока на оста 0x, измерен в радиани. Тогава:



1. x-координатата на т. P се нарича косинус от α и се пише $\cos(\alpha)$;

2. y-координатата на т. P се нарича синус от α и се пише $\sin(\alpha)$;

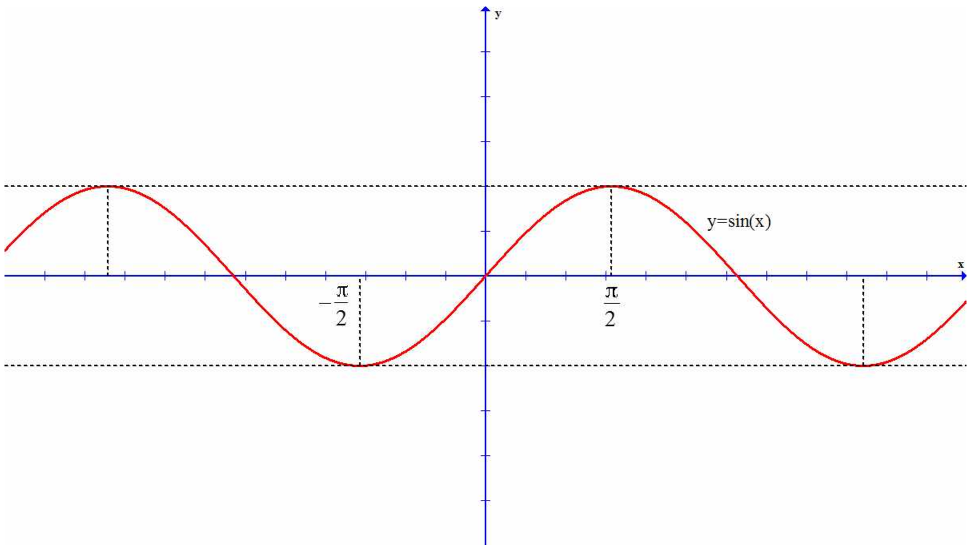
3. числото $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ се нарича тангенс от α и се пише $\mathrm{tg}(\alpha)$;

4. числото $\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$ се нарича котангенс от α и се пише $\mathrm{cotg}(\alpha)$.

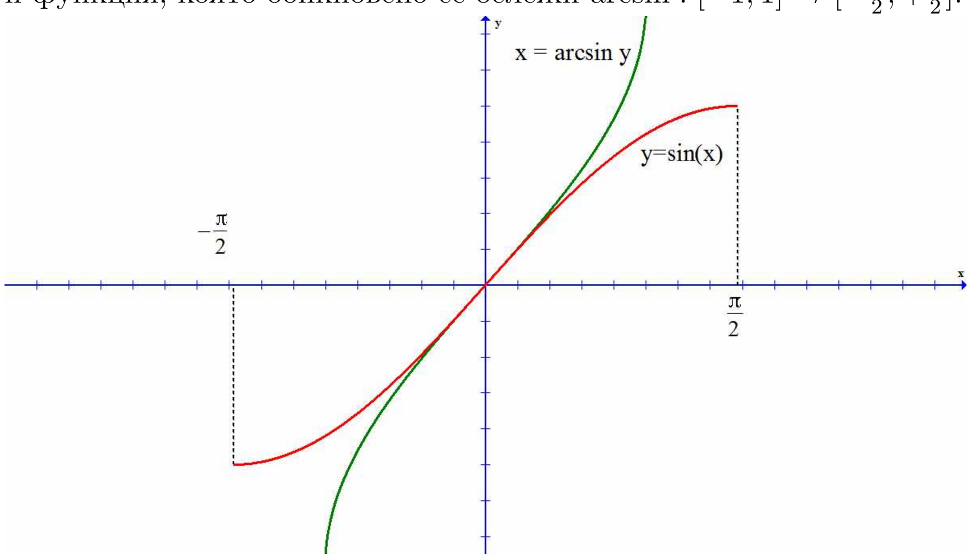
Сега ще дефинираме поотделно обратните функции на тригонометричните:

1. $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

   От начина на дефиниране на sin се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна, защото $\sin(0) = \sin(\pi) = \sin(2\pi) = ... = 0$.



Искаме sin да е инективна и затова правим следната модификация: $\sin : [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ (в тези граници sin пробягва всичките стойности в интервала $[-1, 1]$ без повторение). Така получихме, че $\sin : [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ е биекция т.е. можем да намерим обратната и функция, която обикновено се бележи $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$.

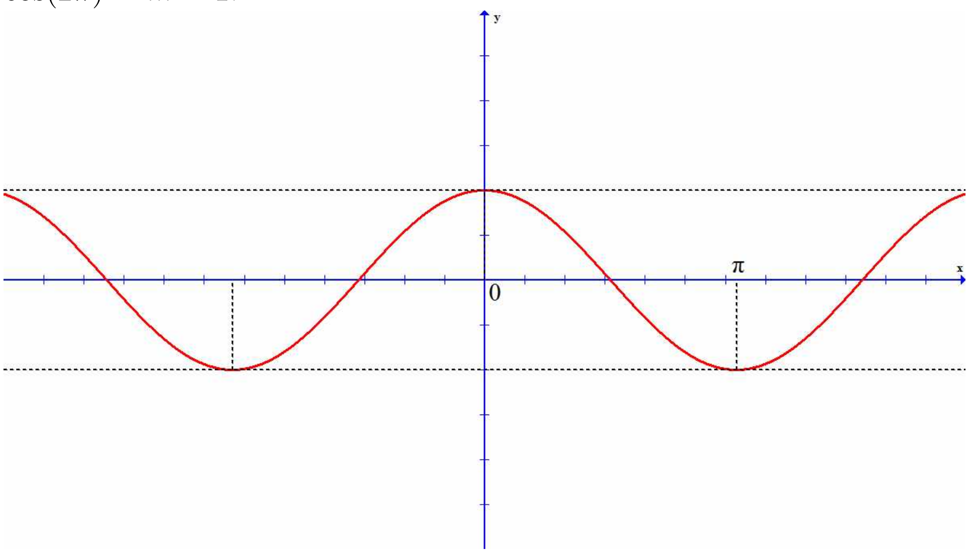


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

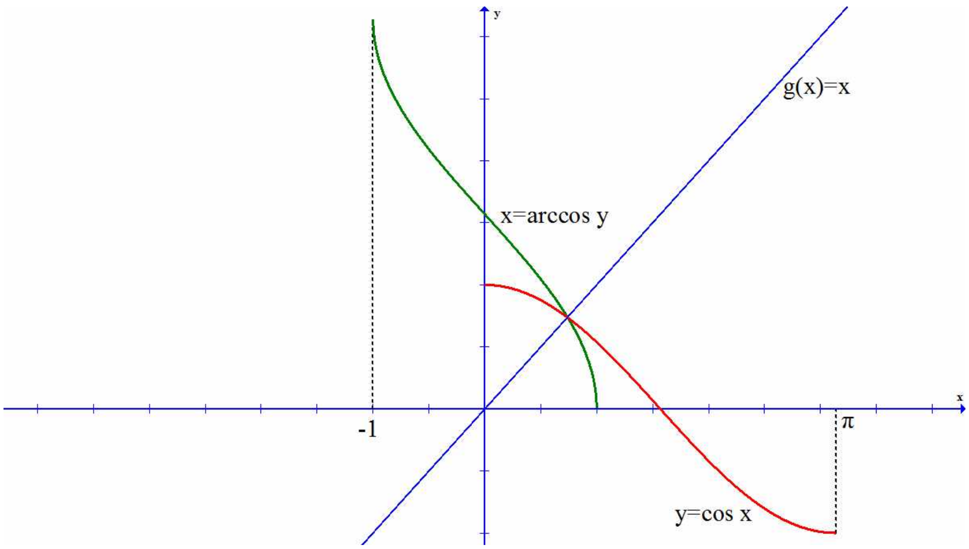
$$\arcsin(\sin(x)) = x \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right]$$
$$\sin(\arcsin(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$$

2. $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$

От начина на дефиниране на cos се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна, защото $\cos(0) = \cos(2\pi) = ... = 1$.



Искаме cos да е инективна и затова правим следната модификация: $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ (в тези граници cos пробягва всичките стойности в интервала $[-1, 1]$ без повторение). Така получихме, че $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ е биекция т.е. можем да намерим обратната и функция, която обикновено се бележи $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.

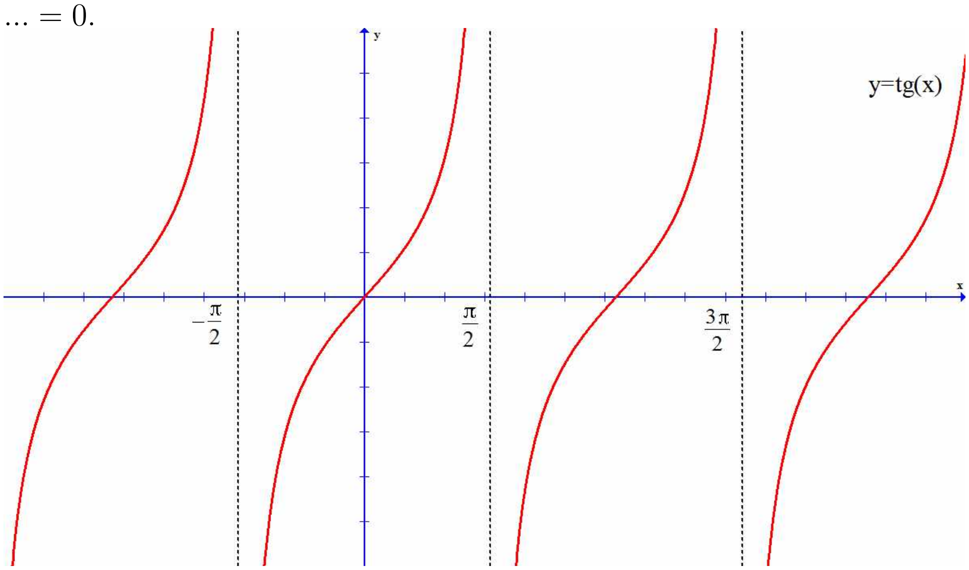


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

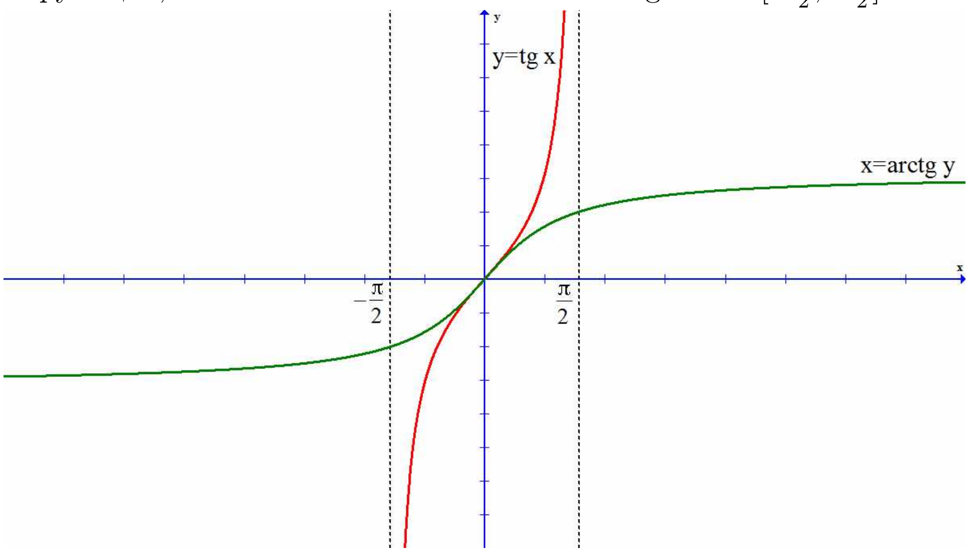
$$\arccos(\cos(x)) = x \qquad \forall x \in [0, \pi]$$
$$\cos(\arccos(y)) = y \qquad \forall y \in [-1; +1]$$

3. $\mathrm{tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

От начина на дефиниране на tg се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна, защото $\mathrm{tg}(0) = \mathrm{tg}(2\pi) = ... = 0$.



Искаме tg да е инективна и затова правим следната модификация: $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ (в тези граници tg пробягва всичките стойности в интервала $\mathbb{R}$ без повторение). Така получихме, че $\text{tg} : (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ е биекция т.е. можем да намерим обратната и функция, която обикновено се бележи $\text{arctg} : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}]$.

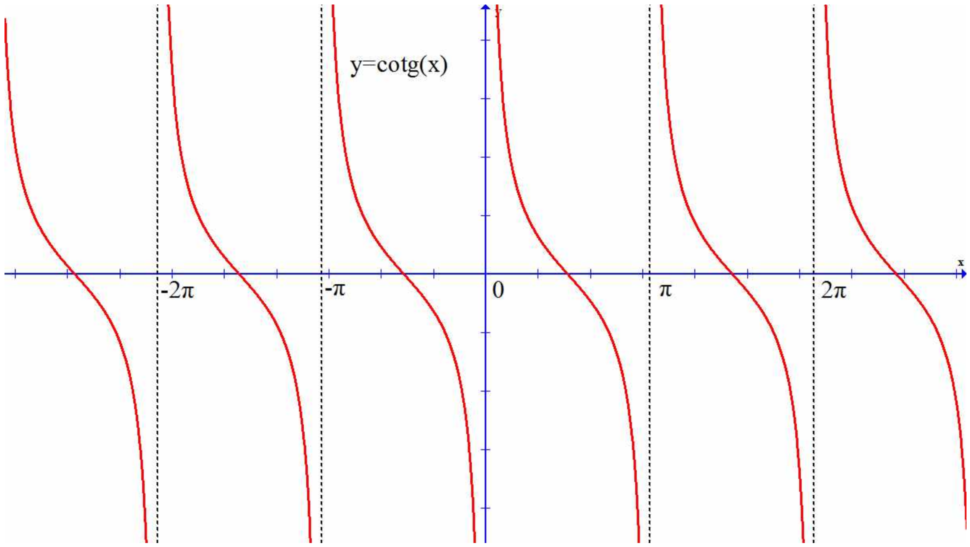


От свойствата на обратните функции получаваме, че:

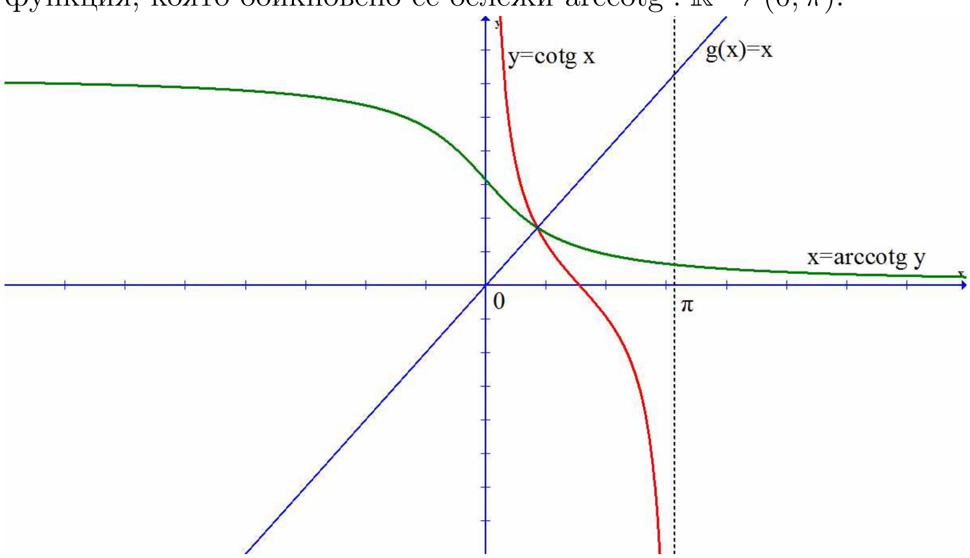
$$\text{arctg}(\text{tg}(x)) = x \qquad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\text{tg}(\text{arctg}(y)) = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

4. $\text{cotg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

От начина на дефиниране на cotg се вижда, че тя е сюрективна функция. Но очевидно, че не е инективна, защото $\text{cotg}(\frac{\pi}{2}) = \text{cotg}(\frac{5\pi}{2}) = ... = 1$.



Искаме cotg да е инективна и затова правим следната модификация: $\mathrm{cotg}(x) : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ (в тези граници cotg пробягва всичките стойности в интервала $\mathbb{R}$ без повторение). Така получихме, че $\mathrm{cotg} : (0, \pi) \to \mathbb{R}$ е биекция т.е. можем да намерим обратната и функция, която обикновено се бележи $\mathrm{arccotg} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$.



От свойствата на обратните функции получаваме, че:

$$\begin{aligned} \mathrm{arccotg}(\mathrm{cotg}(x)) &= x \qquad && \forall x \in (0, \pi) \\ \mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}(y)) &= y \qquad && \forall y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Искам да подчертая, че така дефинираните обратни тригонометрични функции са само една от многобройните възможности за дефинирането им.

Твърдение 3.1: $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \frac{\pi}{2}$

Доказателство:
Нека $\alpha = \operatorname{arctg}(x)$ при $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right)$.
Тогава

$$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arccotg}(\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right).$$

Но понеже $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ следователно $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$ т.е. $-\frac{\pi}{2} < -\alpha < +\frac{\pi}{2}$ следователно $0 < \frac{\pi}{2} - \alpha < \pi$ т.е.

$$\operatorname{arccotg}(x) = \operatorname{arccotg}\left(\operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Следователно получаваме $\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arccotg}(x) = \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2}$. ■