

# 1. Множества. Операции с множества

Галина Люцканова

20 август 2013 г.

Интуитивно, множеството представлява съвкупност от обекти. Обектите на едно множество се наричат негови елементи и се казва, че принадлежат на множеството. Обикновено множествата се бележат с главни латински букви, а елементите им с малки латински букви. Например, числото 1 е елемент на множеството на естествените числа (естествени числа - това са числата, с които броим - 1, 2, 3, ...; множеството на естествените числа се означава  $\mathbb{N}$ ). Следователно  $1 \in \mathbb{N}$ , което еквивалентно може да се запише като  $\mathbb{N} \ni 1$ . Числото 0.5 не е елемент на множеството на естествените числа - пишем  $0.5 \notin \mathbb{N}$ . Друг пример е Мария принадлежи на множеството на всички женски имена.

Горната дефиниция, не е напълно коректна, защото използва понятието съвкупност, без да го дефинира. Всеки опит за точно дефиниране на съвкупност би довел до кръгова дефиниция. Поради това в математиката понятието множество се приема за първично и не се дефинират строго.

Множествата в математиката се задават по няколко начина:

1. чрез изброяване на всички елементи множеството  
Примерно  $A = \{1, 2, 3\}$
2. чрез условие, което удовлетворяват всички елементи на множеството  
Примерно  $A = \{x \in \mathbb{N} | x = 2k, k \in \mathbb{N}\}$ , където знакът '|' се чете при условие че.
3. чрез изброяване на първите няколко елемента  
Примерно  $Alphabet = \{a, b, c, d, \dots\}$ . Надявам се, че виждате, че мно-

жеството е латинската азбука, тъй като не ми се пишат 26 букви, затова съм изброила първите 4.

Елементите на множествата са неповтарящи се. Нека да разгледаме множеството  $D = \{a, a, a, b, b, c\}$ , то се състои от елементите  $a, b, c$ . Следователно  $D = \{a, b, c\}$  понеже в множествата няма значение колко пъти се появява даден елемент. Също така при множествата няма значение наредбата следователно  $D = \{c, b, a\}$

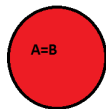
Множеството  $A$  се нарича подмножество на множеството  $B$ , когато всеки елемент на  $A$  е и елемент и на  $B$ . Сега ще го напишем с математически означения:

**Определение:** Ако  $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ , то казваме че  $A$  е подмножество на  $B$  и бележим  $A \subseteq B$ .

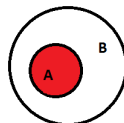


Множеството, което няма нито един елемент, се нарича празното множество. Бележим го с  $\emptyset$ . То е подмножество на всяко множество - прието е по този начин.

**Определение:** Казваме, че множествата  $A$  и  $B$  са еквивалентни (или още съвпадат), когато двете множества се състоят от едни и същи елементи. Бележим с  $A = B$ .



**Определение:** Казваме че  $A$  е собствено подмножество на  $B$ , ако  $A \neq B$ . Бележи се  $A \subset B$ .



**Определение:** Казваме че  $A$  е съществено подмножество на  $B$ , ако  $A$  не е празното множество и  $A \neq B$ .



Наричаме  $A$  съществено, защото ние знаем, че  $\emptyset \subseteq B$  и  $B \subseteq B$ , каквото и множество  $B$  да изберем. Също така казваме, че  $\emptyset$  и  $B$  са тривиални подмножества на  $B$ .



Сега ще докажем интуитивна теорема:


**Теорема:**  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A \iff A = B$ .

**Доказателство:**

Преди да докажем теоремата да си представим как ще изглеждат нещата.

Понеже  $A \subseteq B$ , то  или .

Понеже  $B \subseteq A$ , то е изпълнено едновременно и  или .

Следователно е изпълнено .

Това е да се покаже само на интуитивно ниво, че е изпълнена теоремата, а сега ще я докажем.

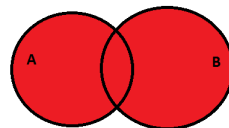
Първо ще докажем правата посока, т.е. от  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A \implies A = B$ . Да допуснем обратното, т.е.  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A \implies A \neq B$  следователно без ограничение на общността можем да приемем, че съществува  $x$ :  $x \in A, x \notin B$  (Може би се чудите, защо разглеждаме само случая “съществува  $x$ :  $x \in A, x \notin B$ ”, а не “съществува  $x$ :  $x \notin A, x \in B$ ”. Отговорът е - понеже двата случая се правят по абсолютно един и за да обозначим, че ще направим само единият случай пишем без ограничение на общността и си спестяваме малко работа). Но тъй като  $A \subseteq B$ , следователно ако  $x \in A$ , то  $x \in B$  и тук достигаме до противоречие с допускането. С това доказахме първата част.

Сега да докажем обратната посока, т.е. ако  $A = B$ , то  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ . Понеже  $A = B$ , то ако  $x \in A \implies x \in B$ . Но това показва, че  $A$  е подмножество на  $B$  или  $A \subseteq B$ . Аналогично  $B \subseteq A$ . ■

**Операции с множества** Ще разгледаме операциите обединение, сечение, разлика и симетрична разлика на множества. Те са операции, които ще взимат две множества и връщат множество.

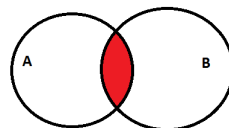
Ще започнем с един общ за всички операции пример. Нека да разгледаме множествата  $A = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $B = \{1, 3, 5, \dots\}$ ,  $C = \{2, 4, 6, \dots\}$

**Обединение(събиране) на множества** Обединение на 2 множества  $A$  и  $B$  наричаме такова множество  $C$ , което се състои от елементите на множеството  $A$  или множеството  $B$ . Много важно е да не забравяме, че не трябва да оставяме повтарящи се елементи, т.е. ако нещо се среща и в двете множества, го пишем веднъж.



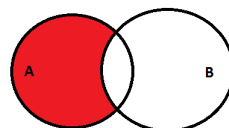
Съкратено се записва като  $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$   
 За примера:  $A \cup B = A$ ,  $A \cup C = A$ ,  $B \cup C = A$

**Сечение на множества** Сечение на 2 множества  $A$  и  $B$  наричаме такова множество  $C$ , което се състои от елементите принадлежащи едновременно на множеството  $A$  и множеството  $B$ .

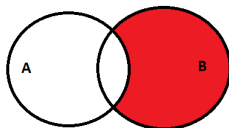


Съкратено се записва като  $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$ .  
 За примера:  $A \cap B = B$ ,  $A \cap C = C$ ,  $B \cap C = \emptyset$

**Разлика на множества** Разлика на множеството  $A$  с множеството  $B$  наричаме такова множество  $C$ , което съдържа всички елементи от  $A$ , които в същото време не са елементи от  $B$ .



Съкратено се записва като  $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$   
 Аналогично  $B \setminus A = \{x | x \notin A \text{ и } x \in B\}$



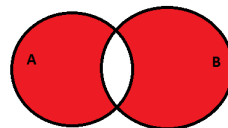
За примера:

$$A \setminus B = C, A \setminus C = B$$

$$B \setminus A = \emptyset, B \setminus C = B$$

$$C \setminus A = \emptyset, C \setminus B = C$$

**Симетрична разлика на множества** Симетричната разлика на множеството  $A$  с множеството  $B$  наричаме такова множество  $C$ , което съдържа всички елементи от  $A$ , които в същото време не са елементи от  $B$ , и едновременно всички елементи от  $B$ , които в същото време не са елементи от  $A$ .



Съкратено се записва като  $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

За примера:

$$A \Delta B = C$$

$$A \Delta C = B$$

$$B \Delta C = A$$

### Свойства

1.  $A \cup B = B \cup A$
2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3.  $A \cup \emptyset = A$
4.  $A \cup A = A$
5.  $A \cap B = B \cap A$
6.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
7.  $A \cap \emptyset = \emptyset$
8.  $A \cap A = A$
9.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
10.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
11.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
12.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Тези свойства се доказват по един и същ начин. Взимаме  $x$ , което да удовлетворява дясната страна, и доказваме, че удовлетворява и лявата страна и обратно взимаме  $x$ , удовлетворяващо лявата страна и доказваме, че удовлетворява и дясната страна. Съветвам да се опитате да докажете някои от свойствата сами. По-долу са доказателствата на 1, 2, 9 и 11.

1.  $A \cup B = B \cup A$

Доказателство:

- (а) Нека  $x \in A \cup B$ . Тогава  $x \in A$  или  $x \in B$ . Следователно  $x \in B$  или  $x \in A$  т.е.  $x \in B \cup A$ . Получихме, че  $A \cup B \subseteq B \cup A$ .
- (б) Нека  $x \in B \cup A$ . Тогава  $x \in B$  или  $x \in A$ . Следователно  $x \in A$  или  $x \in B$  т.е.  $x \in A \cup B$ . Получихме, че  $B \cup A \subseteq A \cup B$ . И от теоремата следва, че  $A \cup B = B \cup A$ . ■

2.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Доказателство:

- (а) Нека  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Тогава  $(x \in A$  или  $x \in B)$  или  $x \in C$ . Следователно  $x \in A$  или  $(x \in B$  или  $x \in C)$  т.е.  $x \in A$  или  $x \in B \cup C$ . Следователно  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Така получихме, че  $(A \cup B) \cup C \subseteq A \cup (B \cup C)$ .
- (б) Нека  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Тогава  $x \in A$  или  $(x \in B$  или  $x \in C)$ . Следователно  $(x \in A$  или  $x \in B)$  или  $x \in C$  т.е.  $x \in (A \cup B)$  или  $x \in C$ . Така получихме, че  $A \cup (B \cup C) \subseteq (A \cup B) \cup C$ . От теоремата получаваме, че  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ . ■

3.  $A \cup \emptyset = A$  - очевидно

4.  $A \cup A = A$  - очевидно

5.  $A \cap B = B \cap A$  - аналогично на 1

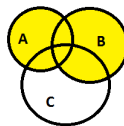
6.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  - аналогично на 2

7.  $A \cap \emptyset = \emptyset$  - очевидно

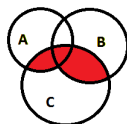
8.  $A \cap A = A$  - очевидно

9.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Доказателство: Преди самото доказателство, да видим дали интуитивно ниво изглежда вярно. Нека да разгледаме  $A$ ,  $B$  и  $C$ , такива че  $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ ,  $A \cap B \neq \emptyset$ ,  $A \cap C \neq \emptyset$  и  $C \cap B \neq \emptyset$ .

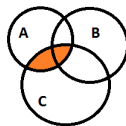


Тогава  $A \cup B$  е оцветено в жълт цвят:

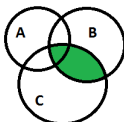


$(A \cup B) \cap C$  е в червено.

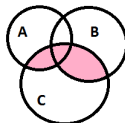
Разгледахме лявата страна, а сега ще разгледаме дясната.  $(A \cap C)$



е обозначено в оранжево.



$(B \cap C)$  е зелено.



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$  е розово.

Получихме едно и също за двете страни. А сега да минем към доказателството на свойството.

- (а) Нека  $x \in (A \cup B) \cap C$ . Тогава ( $x \in A$  или  $x \in B$ ) и едновременно  $x \in C$ . Следователно ( $x \in A$  и едновременно  $x \in C$ ) или ( $x \in B$  и едновременно  $x \in C$ ) т.е.  $x \in A \cap C$  или  $x \in B \cap C$ . Следователно  $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Така получихме, че  $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$
- (б) Нека  $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Тогава ( $x \in A$  и едновременно  $x \in C$ ) или ( $x \in B$  и едновременно  $x \in C$ ). Следователно ( $x \in A$  или  $x \in B$ ) и едновременно  $x \in C$ . Следователно  $x \in (A \cup B) \cap C$ .

или  $x \in B$ ) и едновременно  $x \in C$  т.е.  $x \in A \cup B$  и едновременно  $x \in C$ . Така получихме, че  $(A \cap C) \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap C$ . От теоремата получаваме, че  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . ■

10.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  - аналогично на 9

11.  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Доказателство:

(а) Нека  $x \in A \setminus (B \cap C)$ . Тогава  $x \in A$ , но  $(x \notin (B \cap C))$ . Следователно  $x \in A$ , но  $(x \notin B \cup x \notin C)$ . Тогава излиза, че  $(x \in A$  и  $x \notin B)$  или  $(x \in A$  и  $x \notin C)$  т.е.  $x \in A \setminus B$  или  $x \in A \setminus C$ . Следователно  $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Така изкарахме, че  $A \setminus (B \cap C) \subseteq (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

(б) Нека  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . Тогава  $(x \in A$  и едновременно  $x \notin B)$  или  $(x \in A$  и едновременно  $x \notin C)$ . Следователно  $x \in A$  и едновременно  $(x \notin B$  или  $x \notin C)$  т.е.  $x \in A$  и едновременно  $x \notin (B \cap C)$ . Така получихме, че  $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cap C)$ . От теоремата получаваме, че  $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ . ■

12.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$  - аналогично на 11