СБОРНИК

ОТ ЗАДАЧИ И ТЕОРЕМИ

ПО

ДИФЕРЕНЦИАЛНО И ИНТЕГРАЛНО СМЯТАНЕ

от

д-р ГЕОРГИ БРАДИСТИЛОВ

ПРОФЕСОР ПО ВИСША МАТЕМАТИКА В МАШИННО-ЕЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЯ ИНСТИТУТ

ЧАСТ I

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

ВЪВЕДЕНИЕ — ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ — ГЕОМЕТРИЧНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

(със 145 чертежа в текста)

Трето (стереотипно) издание

ДЪРЖАВНО ИЗДАТЕЛСТВО „ТЕХНИКА"

СОФИЯ — 1959

СЪДЪРЖАНИЕ

Въведение

Отдел I

Диференциално смятане

Отдел II

Геометрични приложения

ЗАДАЧИ

ВЪВЕДЕНИЕ

§ 1. Обратни функции. Обратни кръгови (циклометрични) функции

Да се определят обратните функции на:

1. $y=\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{1}{4}x^2-1}$.

2. $y=\frac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$.

3. $y=\frac{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}+\sqrt[3]{1-x}}$.

4. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$.

5. $y=\sqrt[5]{\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}x-\sqrt{\frac{1}{4}x^2-p^5}}$.

Да се докажат следните равенства:

6. $\sin(\arcsin x)=x,\ \cos(\arccos x)=x$.

7. $\arcsin(\sin x)=x,\ \arccos(\cos x)=x$.

8. $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

9. $\arcsin(\cos x)=\frac{\pi}{2}-x$.

10. $\arccos\frac{\alpha}{\beta}=\operatorname{arcsec}\frac{\beta}{\alpha}$.

11. $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

12. $\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{4}{5}=\frac{\pi}{2}$.

13. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{2}$.

14. $\operatorname{arc\,tg} x \pm \operatorname{arc\,tg} y = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \pm y}{1 \mp xy}$.

15. $\operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{3}) + \operatorname{arc\,tg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

16. $4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

17. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

18. $2 \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}-1) + 2 \operatorname{arc\,tg}(2-\sqrt{3}) + \operatorname{arc\,ctg}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.

19. $6 \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$

$$= \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

20. $\arcsin \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin x$.

21. $\arccos \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\cdots-\sqrt{2}}}} = \frac{\pi}{3} + (-1)^n \frac{1}{2^n}\frac{\pi}{6}$.

Да се представят във функция само на $\arcsin x$ следните изрази:

22. $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

23. $\arccos \frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}$.

24. $\arcsin \frac{1}{2}(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})$.

Да се представят във функция само на $\operatorname{arc\,tg} x$ следните изрази:

25. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1-x}{1+x}$.

26. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}$.

27. $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Да се намерят корените на следните уравнения:

28. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}$.

29. $\operatorname{arc\,tg}(x+4) + \operatorname{arc\,tg}(x-4) = \frac{\pi}{6}$.

30. $\operatorname{arc\,tg}(x+1) = 3 \operatorname{arc\,tg}(x-1)$.

31. $\operatorname{arc\,ctg} 16(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = x$.

32. $\operatorname{arc\,sec} a - \operatorname{arc\,sec} b = \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{b} - \operatorname{arc\,sec} \frac{x}{a}$.

Да се намерят корените на следните системи уравнения:

33. $\arcsin \frac{\sqrt{2ax-a^2}}{x} = \operatorname{arc\,sec} \frac{y}{b}$,

$$\arccos\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 2 \arccos \sqrt{\frac{y}{b}}.$$

34. $\arcsin \frac{y-1}{y+1} = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{1+x}{1-x}$,

$$\operatorname{arc\,ctg} xy = 2 \operatorname{arc\,ctg}(\sqrt{2}-1).$$

35. $\operatorname{arc\,tg} \frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\arccos x + \arcsin \sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2}.$$

§ 2. Граници и редици

Да се намерят границите на следните изрази:

1. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}$.

2. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}$.

3. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-5x^2+7x-3}{x^3-x^2-5x-3}$.

4. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x})$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x)$.

11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\ln(1-x)}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin ax)^{\operatorname{ctg} bx}$.

13. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin x}{1+\sin 3x}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{cosec} x \,.\, \ln(1-x)$.

15. $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg} x \,.\, \ln\dfrac{1+a\sin x}{1+b\operatorname{tg} x}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\operatorname{arc\,ctg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x)\sin x}{(1+x)\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{1+x^2}}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{a_n}{n}\right)^n$, където $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right)$, където $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \quad a_n > 0$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

22. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n-1}{x}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+a\ln(x+a)-a\ln a}{a-\sqrt{a^2-x}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(a+bx)^n-a^n}{cx}$.

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(ax+b)^n-(ax)^n}{cx^{n-1}}$.

28. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{a-bx}{a+bx}\right)^{\frac{1}{bx}}$.

29. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+n\arcsin x)}{\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{\alpha}{x}\right)^x$.

31. $\lim\limits_{n\to\infty} \cos a \,.\, \cos\dfrac{a}{2} \,.\, \cos\dfrac{a}{2^2} \ldots \cos\dfrac{a}{2^n}$.

32. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos\dfrac{\pi}{2n}+\cos\dfrac{2\pi}{2n}+\cos\dfrac{3\pi}{2n}+\cdots+\cos\dfrac{n\pi}{2n}}{\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{2\pi}{2n}+\dfrac{3\pi}{2n}+\cdots+\dfrac{n\pi}{2n}}$.

33. $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{2k+1}{2n^2}\pi$.

34. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n\operatorname{arc\,tg} x - \sum\limits_{k=2}^{n} n\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{k(k-1)+x^2}\right]$.

35. Теорема. Ако $\begin{cases} f(x+1)-f(x) \\ \dfrac{f(x+1)}{f(x)} \end{cases}$ клони към една граница k, когато x клони към безкрайност, като взема стойности от вида $l+n$, гдето l е произволно фиксирано число, а n е цяло и клони към ∞, то и $\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} \\ \\ [f(x)]^{\frac{1}{x}} \end{cases}$ клони към същата граница. Тук предполагаме, че функцията $f(x)$ е крайна за всяко крайно x.

36. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

37. $\lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2}$.

38. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+nx)}{n}$.

Да се намерят главните части на следните изрази:

39. $y=\sin 2x$.

40. $y=\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}$.

41. $y=2x^{\frac{3}{2}}+3x^{\sqrt{2}}$.

42. $y=x-\sqrt{x^2+2x}$.

Да се изследват относно сходимостта следните редици:

43. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{2}, \dots, \dfrac{n}{n+1}, \dfrac{n+1}{n}, \dots$

44. $1, \dfrac{1}{2}, 2, \dfrac{1}{3}, 3, \dots, n, \dfrac{1}{n}, \dots$

45. $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dots, (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}, \dots$

46. $x_1=\dfrac{1}{1.2}, \quad x_2=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}, \dots,$

$$x_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}, \dots$$

47. $x_1=1+\dfrac{1}{1!}, \quad x_2=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}, \dots,$

$$x_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}, \dots$$

48. $\sqrt{2}-\sqrt{1}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{4}-\sqrt{3}, \dots, \sqrt{n+1}-\sqrt{n}, \dots$

49. Теорема. Ако при безгранично растене на n редиците с общи членове a_n и b_n клонят към нула, и то по такъв начин, че b_n постоянно намалява, то имаме равенството

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$$

при условие, че втората граница съществува.

50. Теорема. Ако при безграничното растене на n редицата с общ член b_n постоянно расте към безкрайност, то имаме равенството

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

при условие, че втората граница съществува.

51. Ако една редица допуска крайна и определена граница, то средно аритметичната и средно геометричната на първите ѝ n члена клонят към същата граница.

52. Ако в една редица отношението на n-тия член към предидущия клони към определена граница, то към същата граница ще клони корен n-ти от нейния n-ти член.

53. Теорема. Ако две редици с общи членове a_n и b_n клонят съответно към две определени граници a и b, то съществува равенството

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\dots+a_nb_1)=ab.$$

54. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$, да се докаже, че

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n-a_{n-1})=0$$

при условие, че втората граница съществува.

55. Ако за една редица с постоянно растящи членове $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ имаме

$$\lim_{n\to\infty} n(a_n-a_{n-1})=l,$$

гдето $l\neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\pm\infty$.

Да се определят границите на следните редици, дадени с общите им членове:

56. $a_n = \sqrt[n]{n}$.

57. $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$.

58. $a_n = \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1}$.

59. $a_n = \dfrac{n}{p-1} - \left\{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^p + \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^p + \left(\dfrac{n}{n+3}\right)^p + \cdots\right\}$.

60. $a_n = \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots 2n}$.

61. Да се докаже, че средно геометричната и средно аритметичната редица

$$a_1 = \sqrt{ab}, \qquad a_2 = \sqrt{a_1 b_1}, \ldots, \qquad a_n = \sqrt{a_{n-1} b_{n-1}}, \ldots,$$

$$b_1 = \frac{a+b}{2}, \quad b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ldots, \quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \ldots,$$

гдето $a > 0$ и $b > 0$, имат едни и същи граници.

62. Да се покаже, че редиците

$$a_1 = \frac{a+b}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \ldots,$$

$$b_1 = \sqrt{a_1 b}, \quad b_2 = \sqrt{a_2 b_1}, \ldots,$$

гдето $a > 0$ и $b > 0$, имат обща граница и да се намери тази граница.

63. Да се докаже, че редицата с общ член

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

гдето a е дадено положително число, а x_0 — произволно положително число, има граница $\sqrt{a}$.

(Върху това свойство се основава доста удобен метод за извличане корен от едно число.)

64. Да се намери границата на редицата

$$a_1 = \sqrt{\alpha}, \; a_2 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \; a_3 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}}, \ldots, \; \alpha > 0.$$

Приложение на границите

65. Закон на Weber — Fechner. Съотношение между дразнението и усещането.

66. Да се намери неразрушеното количество на едно радиоактивно вещество след време t.

67. На колко ще нарасне даден капитал след n години, ако лихвата $p\%$ е сложна и капитализирането става всеки момент.

68. Едно ненапълно прозрачно тяло от еднородно вещество е ограничено от едната страна с плоскост, перпендикулярно на която пада сноп лъчи с интензивност J. Каква ще бъде интензивността I в точка P на разстояние x зад плоскостта?

69. Даден е един ъгъл и една точка C вън от него. Една права, която минава през точката C, пресича рамената му в точките A и B. Когато тази права се върти около C по такъв начин, че A и B се приближават към върха O на дадения ъгъл, да се докаже, че дължините OA и OB са от един и същи ред.

70. Разликата между една отсечка AB и нейната проекция върху една права, която сключва с AB безкрайно малък ъгъл от първи ред, е безкрайно малко от втори ред.

§ 3. Редове и безкрайни произведения

Да се изследват относно сходимостта или разходимостта следните редове:

1. $1 + \dfrac{3^2}{4^2} + \dfrac{4^3}{6^3} + \dfrac{5^4}{8^4} + \cdots + \left(\dfrac{n+1}{2n}\right)^n + \cdots$

2. $1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{4}\dfrac{3}{6}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^3 + \cdots$

$$+ \frac{1.1.3\ldots(2n-5)}{2.4.6\ldots 2(n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

3. $2 + \dfrac{3^2}{2^3} + \dfrac{4^3}{3^4} + \cdots + \dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}} + \cdots$

4. $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2.4}{3.5} + \dfrac{2.4.6}{3.5.7} + \cdots + \dfrac{2.4\ldots 2(n-1)}{3.5\ldots(2n-1)} + \cdots$

5. $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^4} + \cdots$

6. $\dfrac{1}{2!} + \dfrac{3}{3!} + \dfrac{6}{4!} + \dfrac{10}{5!} + \dfrac{15}{6!} + \cdots$

7. $1 + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1.5}{8.11} + \dfrac{1.5.9}{8.11.14} + \dfrac{1.5.9.13}{8.11.14.17} + \cdots$

8. $1+\frac{2}{1}+\frac{2.3}{1.4}+\frac{2.3.4}{1.4.7}+\frac{2.3.4.5}{1.4.7.10}+\cdots$

9. $\frac{1}{2}+\frac{2^2}{3^2\sqrt{2}}+\frac{3^3}{4^3\sqrt{3}}+\frac{4^4}{5^4\sqrt{4}}+\cdots$

10. $\frac{1}{2^m-1}+\frac{2^{m-\frac{1}{2}}}{3^m-2^m}+\frac{3^{m-\frac{1}{2}}}{4^m-3^m}+\cdots$

11. $\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+\frac{\ln 4}{4}+\cdots$

12. $1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}+\cdots$

13. $\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1}+\frac{4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{2^{4\sin\frac{1}{2}}}+\frac{8\operatorname{tg}\frac{\alpha}{8}}{3^{6\sin\frac{1}{3}}}+\cdots$

14. $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}+\cdots$

15. Теорема. За всеки сходящ ред $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ произведението $a_n u_n$ не може да клони към определена граница, отлична от нула, ако редът

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

е разходящ и с положителни членове.

16. Да се докаже, че при сходящите редове произведението nu^n или клони към нула, или е неопределено.

17. Да се докаже, че за да бъде редът $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ сходящ, условието $\lim n\,u_n=0$ е необходимо, ако членовете на този ред от известно място нататък образуват постоянно намаляваща нулева редица.

Да се намери за какви значения на x следните редове са сходящи:

18. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$.

19. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$.

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^{-nx}}{n!}$.

21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\operatorname{tg}\frac{a}{2^n}$.

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a+n}{a+n-1}\,x\right)^n$.

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+\operatorname{tg}x)\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{n}\right)}$.

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos ax^n)$.

26. $\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}+\frac{1}{8}\,\frac{1}{e^{\frac{x}{8}}+1}+\cdots$

27. $\frac{1}{2^3}+\frac{2^{\cos 2x}}{3^3}+\frac{3^{\cos 3x}}{4^3}+\frac{4^{\cos 4x}}{5^3}+\cdots+\frac{n^{\cos nx}}{(n+1)^3}+\cdots$

Да се изследват с помощта на познати редове следните редове:

28. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\cdots$

29. $\frac{1}{(\ln 2)^{\ln 2}}+\frac{1}{(\ln 3)^{\ln 3}}+\cdots+\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}+\cdots$

30. $1+\frac{1}{2(\ln 2)^k}+\frac{1}{3(\ln 3)^k}+\cdots+\frac{1}{n(\ln n)^k}+\cdots,\quad k>0.$

Да се намерят общите членове и сумите на редовете, които са дадени със следните n-ти частни суми:

31. $S_n=\frac{3n+2}{4n+3}$.

32. $S_n=\frac{4n^2-a^2}{9n^2-b^2}$.

33. $S_n = 1 - \dfrac{3.5.7\ldots(2n+3)}{4.6.8\ldots(2n+4)}$.

34. $S_n = \dfrac{1-\cos^n x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

Да се намерят сумите на следните редове:

35. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)} + \cdots$

36. $\dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{2.3.4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} + \cdots$

37. $\dfrac{1}{2^2-1} + \dfrac{1}{3^2-1} + \cdots + \dfrac{1}{(n+1)^2-1} + \cdots$

38. $\dfrac{1}{1(k+1)} + \dfrac{1}{2(k+2)} + \cdots + \dfrac{1}{n(k+n)} + \cdots$

39. $\dfrac{1}{a^2(a^2+4)} + \dfrac{3}{(a^2+4)(a^2+4.2^2)} + \dfrac{5}{(a^2+4.2^2)(a^2+4.3^2)} + \cdots$

40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{n(n+1)} + \dfrac{10}{3}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} - \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$.

След като се установи за какви значения на x следните редове са сходящи, да се намери тяхната сума:

41. $1 + x\cos\alpha + x^2\cos 2\alpha + \cdots + x^n\cos n\alpha + \cdots$

42. $x\sin\alpha + x^2\sin 2\alpha + \cdots + x^n\sin n\alpha + \cdots$

43. $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1.2}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1.2.3}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \cdots$

44. $\sum\limits_{n=0}^{m}\dfrac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)}$.

45. $x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots$

С помощта на n-та частна сума да се изследват следните редове:

46. $\operatorname{ctg} x - \dfrac{\sin x}{\sin x \sin 2x} - \dfrac{\sin x}{\sin 2x\sin 3x} - \cdots$

47. $\dfrac{1+x^2}{1-x^2} - \dfrac{2x^2}{1-x^4} - \dfrac{2x^4}{1-x^8} - \dfrac{2x^8}{1-x^{16}} - \cdots$

Да се изследват по отношение на сходимостта следните редове:

48. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{n} + \cdots$

49. $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$

50. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$

51. $\sin 1 - \sin\dfrac{1}{2} + \sin\dfrac{1}{3} - \sin\dfrac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\sin\dfrac{1}{n} + \cdots$

52. $1 - \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2+x} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3+x} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+x} + \cdots$

53. Теорема. Ако редът с положителни членове

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots \tag{1}$$

е разходящ, тогава и редът

$$\frac{1}{a_1 S_1} + \frac{1}{a_2 S_2} + \cdots + \frac{1}{a_n S_n} + \cdots, \tag{2}$$

гдето S_n означава n-та частна сума на реда (1), ще бъде разходящ и разходимостта ще бъде по-слаба от тази на дадения ред.

54. Да се установи разходимостта на следните редове:

$$1 + 1 + 1 + 1 + \cdots,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2\ln 2\ln\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3\ln\ln 3} + \cdots,$$

и да се покаже, че всеки е по-слабо разходящ от неговия предидущ.

55. Теорема. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ е една безкрайна редица с положителни членове. Редът с положителни членове

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

е сходящ, ако от известно място нататък

$$\left(a_n\frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) \geqslant l > 0,$$

Обратно, този ред е разходящ, ако

$$\left(a_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - a_{n+1}\right) < l < 0$$

и редът $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} + \cdots$ е разходящ.

56. Теорема. Редът с положителни членове

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \cdots$$

е сходящ или разходящ, ако числото

$$\left(1 - \sqrt[n]{u_n}\right)\frac{n}{\ln n}$$

от известно място нататък става респективно по-голямо или по-малко (равно) от единица.

Да се умножат следните редове:

57. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots,$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

58. $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots,$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

59. Да се повдигне в квадрат редът

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$$

и да се покаже, че така полученият ред е разходящ.

Да се изследват относно сходимостта или разходимостта следните двойни редове:

60. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \cdots$

$$\frac{2}{6} + \frac{2}{18} + \frac{2}{54} + \frac{2}{162} + \frac{2}{486} + \cdots$$

$$\frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \frac{3}{256} + \frac{3}{1024} + \frac{3}{4096} + \cdots$$

$$\frac{4}{40} + \frac{4}{200} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{5000} + \frac{4}{25\,000} + \cdots$$

$$\frac{5}{96} + \frac{5}{576} + \frac{5}{3456} + \frac{5}{20736} + \frac{5}{124416} + \cdots$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

61. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{32} + \cdots$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \frac{1}{243} + \cdots$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \frac{1}{3125} + \cdots$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{36} + \frac{1}{216} + \frac{1}{1296} + \frac{1}{7776} + \cdots$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

62. $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + \dfrac{1}{4.5} + \dfrac{1}{5.6} + \cdots$

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} + \cdots$$

$$\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \frac{1}{13.17} + \frac{1}{17.21} + \cdots$$

$$\frac{1}{1.9} + \frac{1}{9.17} + \frac{1}{17.25} + \frac{1}{25.33} + \frac{1}{33.41} + \cdots$$

$$\frac{1}{1.17} + \frac{1}{17.33} + \frac{1}{33.49} + \frac{1}{49.65} + \frac{1}{65.81} + \cdots$$

. . . . .

. . . . .

. . . . .

63. $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots$$
$$\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}-\cdots$$
$$-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{28}-\frac{1}{36}+\cdots$$
$$\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{25}-\frac{1}{35}+\frac{1}{45}-\cdots$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

64. $$1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$
$$x+2x^2+4x^4+8x^6+16x^8+\cdots$$
$$x^2+3x^3+9x^6+27x^9+81x^{12}+\cdots$$
$$x^3+4x^4+16x^8+64x^{12}+256x^{16}+\cdots$$
$$x^4+5x^5+25x^{10}+125x^{15}+625x^{20}+\cdots$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

65. $$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots$$
$$\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{2}-\cdots$$
$$\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{3}-\frac{x^5}{3}+\frac{x^6}{3}-\cdots$$
$$\frac{x^3}{4}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{4}-\frac{x^6}{4}+\frac{x^7}{4}-\cdots$$
$$\frac{x^4}{5}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{5}-\frac{x^7}{5}+\frac{x^8}{5}-\cdots$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

66. Като се вземе пред вид двойният ред
$$ax+a^2x^2+a^3x^3+a^4x^4+\cdots$$
$$ax^2+a^2x^4+a^3x^6+a^4x^8+\cdots$$
$$ax^3+a^2x^6+a^3x^9+a^4x^{12}+\cdots$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

да се докаже равенството
$$\frac{ax}{1-ax}+\frac{ax^2}{1-ax^2}+\frac{ax^3}{1-ax^3}+\cdots=\frac{ax}{1-x}+\frac{a^2x^2}{1-x^2}+\frac{a^3x^3}{1-x^3}+\cdots$$

67. Да се докаже равенството
$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\frac{x^4}{1-x^4}+\cdots=x\theta(1)+x^2\theta(2)+x^3\theta(3)+\cdots,$$
където $\theta(n)$ означава броя на делителите на n и $|x|<1$.

Да се изследват относно сходимостта или разходимостта следните безкрайни произведения:

68. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots$

69. $\left(1-\frac{2}{9}\right)\left(1-\frac{2.5}{9.11}\right)\left(1-\frac{2.5.8}{9.11.13}\right)\left(1-\frac{2.5.8.11}{9.11.13.15}\right)\cdots$

70. $\left(1-\frac{3^2}{2^4}\right)\left(1-\frac{4^3}{3^5}\right)\left(1-\frac{5^4}{4^6}\right)\left(1-\frac{6^5}{5^7}\right)\cdots$

71. $\left(1+\frac{1}{2}\ln 2\right)\left(1+\frac{2}{3}\ln\frac{3}{2}\right)\left(1+\frac{3}{4}\ln\frac{4}{3}\right)\left(1+\frac{4}{5}\ln\frac{5}{4}\right)\cdots$

72. $x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4^2\pi^2}\right)\cdots$

73. $(1+\sin 1)\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{3}\right)\left(1-\sin\frac{1}{4}\right)\cdots$

74. $\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdots$

75. Да се трансформира сходящият ред
$$1+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

в безкрайно произведение. Обратно, да се трансформира в ред сходящото безкрайно произведение

$$(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\dots(1+v_n)\dots$$

Примери:

$$\alpha)\ 1+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}+\cdots$$

$$\beta)\ \left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{4^2}\right)\left(1+\frac{1}{5^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots$$

76. Да се пресметне безкрайното произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+x^{2^n}).$$

77. Да се развият $\sin x$ и $\cos x$ в безкрайни произведения.

78. Да се докаже формулата на Wallis:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdots$$

79. Дефиниция на *Г-функция* посредством безкрайно произведение и някои нейни свойства.

Отдел I

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

§ 4. Производни на явни функции на една независима променлива

Да се намерят производните на следните функции:

1. $y=\dfrac{a}{x^4}$.

2. $y=x\sqrt{x\sqrt{x}}$.

3. $y=(a+bx+cx^2)^n$.

4. $y=\dfrac{1+3x-3x^2}{3x^3-9x^2+9x-3}$.

5. $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

6. $y=\dfrac{a}{x}\sqrt{a^2+x^2}$.

7. $y=\dfrac{2bx^2-a}{x^3}\sqrt{a+b^2x^2}$.

8. $y=\dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$.

9. $y=\dfrac{(8b^2x^2+8abx-a^2)(a+2bx)}{(ax+bx^2)^{\frac{3}{2}}}$.

10. $y=(x-2)^9(x-1)^{-\frac{5}{2}}(x-3)^{-\frac{11}{2}}$.

11. $y=\dfrac{[(x+1)(x+3)^9]^{\frac{1}{2}}}{(x+2)^4}$.

12. $y=\ln\dfrac{1}{x}$.

13. $y=\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{125}{12}+\dfrac{65}{3}x+\dfrac{35}{2}x^2+5x^3}{(1+x)^4}+5\ln\dfrac{x}{1+x}$.

14. $y=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2+2x^2}-x}{\sqrt{2+2x^2}+x}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

15. $y=\ln\ln x$.

16. $y=e^{\arcsin x}$.

17. $y=e^{\sin x\cdot\cos x}$.

18. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

19. $y=\operatorname{arc\,tg}\left[\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right]$.

20. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}+\ln\sqrt{\dfrac{x-a}{x+a}}$.

21. $y=x^{\sin x}$.

22. $y=\dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\ln\sqrt{1-x^2}$.

23. $y=\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{3(x^2-4)}{x^2}}$.

24. $y=\arccos x^n$.

25. $y=(\operatorname{arc\,tg}x)^x$.

26. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sqrt{3}}{x+2}$.

27. $y=\arcsin\dfrac{1}{\ln x}$.

28. $y=x^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$.

29. $y=\ln\left(x+(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}\right)+\operatorname{arc\,sec}\dfrac{x}{a}$.

30. $y=\ln\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{a}{\sin x}}}\right)$.

31. $y=\arcsin(\sin x)$.

32. $y=\sin(\arccos x)$.

33. $y=a^{\operatorname{tg}x}$.

34. $y=a^{\arcsin(\cos x)}$.

35. $y=e^{\ln\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}}$.

36. $y=\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

37. $y=\operatorname{arc\,tg}\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)$.

38. $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arccos\dfrac{b+a\cos x}{a+b\cos x}$.

39. $y=x\cos\left(\ln x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

40. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

41. $y=\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}}$.

42. $y=(\ln x)^{(\ln x)^{\ln x}}$.

43. $y=\dfrac{2}{\sin^2 x\cos x}-\dfrac{3\cos x}{\sin^2 x}+3\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

44. $y=(\ln x-1)(x\arcsin x+\sqrt{1-x^2})+\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

45. $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2a}\cos\frac{x}{2}-\sqrt{(a-b)\cos x}}{\sqrt{2a}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{(a-b)\cos x}}$.

46. $y=\operatorname{arc\,sec}\dfrac{x\sqrt{5}}{2\sqrt{x^2+x-1}}$.

47. $y=\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3x}{1-3\operatorname{tg}^2x}$.

48. $y=\sqrt{2}\,\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{2a}\sin\dfrac{x}{2}}{\sqrt{(a+b)\cos x}}$.

49. $y=e^{(1+x^2)\operatorname{arc\,tg} x}$.

50. $y=(\operatorname{tg} x)^{\ln x}$.

51. $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\,e^{\operatorname{arc\,tg} x}$.

52. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}$.

53. $y=x+x^x+x^{\cos x}$.

54. $y=\operatorname{sh}^3 x$.

55. $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{th} x)$.

56. $y=\sqrt{\operatorname{ch} x}$.

57. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

58. $y=e^{\operatorname{sh} x}$.

59. $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

60. $y=\sqrt[4]{\dfrac{1+\operatorname{th} x}{1-\operatorname{th} x}}$.

61. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

62. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

63. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$.

64. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{th} x+\dfrac{\sqrt{2}}{8}\ln\dfrac{1+\sqrt{2}\operatorname{th} x}{1-\sqrt{2}\operatorname{th} x}$.

65. $y=\operatorname{arg\,sh}(\operatorname{tg} x)$.

66. $y=\operatorname{arg\,ch}\sqrt{4x^2+1}$.

67. $y=\operatorname{arg\,th}(\sin x)$.

68. $y=\operatorname{arg\,cth}(\operatorname{ch} x)$.

69. $y=\operatorname{arg\,th}\dfrac{1}{x^2}+\operatorname{tg} 2x$.

70. $y=\operatorname{arg\,sh}(\operatorname{sh} 2x)$.

71. $y=\operatorname{ch}(\operatorname{arg\,ch} x^2)$.

72. $y=\operatorname{sh}(\operatorname{arg\,ch} x)$.

73. $y=f(1+\sqrt{x})$.

74. Да се покаже, че двете функции

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{x+a}{1-ax} \quad \text{и} \quad \operatorname{arc\,tg} x$$

имат една и съща производна и да се провери независимо от това, че те се различават с една постоянна величина.

Същото за следните функции:

75. $\arcsin(2x^2-1)$ и $2\arcsin x$.

76. $\operatorname{arc\,tg} x$ и $\operatorname{arc\,tg}\left(-\dfrac{1}{x}\right)$.

77. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\arcsin x$.

78. $\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ и $\arccos x$.

79. Да се намери производната на функцията, дефинирана като граница на редицата

$$x_1=\sqrt[p]{x^q\sqrt[q]{x}},\quad x_2=\sqrt[p]{x^q\sqrt[q]{xx_1}},\ \ldots,\ x_n=\sqrt[p]{x^q\sqrt[q]{xx_{n-1}}},\ \ldots$$

80. Като се вземе пред вид равенството

$$1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1},$$

да се докажат формулите

a) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}=\dfrac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$.

b) $1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1}=$

$$=\frac{x^n[n^2x^2-(2n^2+2n-1)x+(n+1)^2]-x-1}{(x-1)^3}.$$

81. Като се вземе пред вид формулата

$$\sin x + \sin(x+\alpha) + \cdots + \sin(x+n\alpha) = \frac{\sin\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

да се установят следните равенства:

a) $$\sum_{k=0}^{n}\cos(x+k\alpha) = \frac{\cos\left(x+\frac{n\alpha}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}},$$

b) $$\sum_{k=1}^{n} k\sin k\alpha = \frac{(n+1)\sin n\alpha - n\sin(n+1)\alpha}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}},$$

c) $$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\alpha = \frac{(n+1)\cos n\alpha - n\cos(n+1)\alpha - 1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

82. От формулата

$$\cos x\,.\cos\frac{x}{2}\cdots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{\sin 2x}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

да се установят следните формули:

a) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} 2x,$$

b) $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{2k}}\operatorname{tg}^2\frac{x}{2^k} = \frac{2^{2n+2}-1}{3\,.\,2^{2n-1}} + 4\operatorname{ctg}^2 2x - \frac{1}{2^{2n}}\operatorname{ctg}\frac{2x}{2^n}.$$

83. От формулата

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos kx = 2^n\cos^n\frac{x}{2}\cos\frac{nx}{2}$$

да се изведе формулата

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\sin kx = 2^{n-1}n\cos^{n-1}\frac{x}{2}\,\sin\frac{n+1}{2}x.$$

84. Да се установи формулата

$$\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{cosec}^2\left(x+\frac{k-1}{n}\pi\right) = n^2\operatorname{cosec}^2 nx,$$

като се вземе пред вид, че

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin\left(x+\frac{k-1}{n}\pi\right) = -\frac{\sin nx}{2^{n-1}}.$$

Приложение на производните

85. Да се намери грешката, която се прави при измерване интензивността на галваничния ток с помощта на тангенсовия галванометър.

86. Да се изучи движението на една точка, дефинирано с уравнението

$$s = \frac{1}{b^2}\left[abt - (a-bc)(1-e^{-bt})\right],$$

гдето s е пътят, а t — времето.

87. Също за

$$s = \frac{1}{gk^2}\ln\operatorname{ch} gkt.$$

88. Да се намери равнодействуващата сила на един магнит с магнитна маса m и безкрайно малка дължина δ върху единия полюс на друг магнит с магнитна маса m_1 и на разстояние r от първия.

§ 5. Последователни производни на явни функции на една независима променлива

Да се намерят вторите производни на следните функции:

1. $y = (a - bx)^4$.
2. $y = x^2 \ln x$.
3. $y = x^6 + 5x^5 + 3x^2 - 2x + 1$.
4. $y = xe^{\sin x}$.

Да се намерят n-тите производни на следните функции:

5. $y = (a - bx)^p$.
6. $y = \frac{a+x}{a-x}$.

7. $y=\ln x.$

8. $y=\dfrac{\ln x}{x}.$

9. $y=\cos ax.$

10. $y=\sin ax.$

11. $y=\cos^p x$ ($p>0$, цяло).

12. $y=x(a+bx)^{\frac{p}{2}}.$

13. $y=x^2\ln x.$

14. $y=(ax+b)e^x.$

15. $y=e^{x\cos\alpha}\cos(x\sin\alpha).$

16. $y=e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha).$

17. $\begin{cases} y=e^{ax}\cos(bx+c), \\ z=e^{ax}\sin(bx+c). \end{cases}$

18. $y=x^{n-1}\ln x.$

19. $y=\dfrac{1}{a^2-b^2x^2}.$

20. $y=\dfrac{x}{a^2-b^2x^2}.$

21. $y=\dfrac{1}{a^2+b^2x^2}.$

22. $y=\dfrac{x}{a^2+b^2x^2}.$

23. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{a}.$

24. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}.$

25. $y=\arcsin x.$

26. $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right).$

27. $y=e^{\frac{1}{x}}.$

28. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}.$

29. $y=f(x^2).$

30. $y=e^{-x^2}.$

31. $y=f(e^x).$

32. $y=f(\ln x).$

33. $y=f(u)$, гдето u е функция на x.

34. Да се докаже, че функциите

a) $y=(x+\sqrt{x^2-1})^n;$

b) $y=e^{n\arcsin x};$

c) $y=\sin x;$

d) $y=\sin(n\arcsin x),\ \ y=\sin(n\arccos x),$

$y=\cos(n\arcsin x),\ \ y=\cos(n\arccos x);$

e) $y=\dfrac{\sin(n\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}};$

f) $y=X_n=\dfrac{1}{2.4.6\ldots 2n}\dfrac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$

(полином на Legendre) удовлетворяват съответно диференциалните уравнения

a) $(x^2-1)y''+xy'-n^2y=0;$

b) $(1-x^2)y''-xy'-n^2y=0;$

c) $y''+(\operatorname{tg}x-2\operatorname{ctg}x)y'+2\operatorname{ctg}^2x\,.\,y=0;$

d) $(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0;$

e) $(x^2-1)y''+3xy'-(n^2-1)y=0;$

f) $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$

35. Да се докаже, че ако f и φ са два полинома от n-та степен спрямо x, имаме тъждеството

$$\varphi f^{(n)}-\varphi' f^{(n-1)}+\varphi'' f^{(n-2)}-\ldots+(-1)^n\varphi^{(n)}f=\mathrm{const}.$$

36. Да се докаже, че функциите

$$y=\frac{1}{\sqrt{f'(x)}}\quad\text{и}\quad z=\frac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}},$$

гдето $f(x)$ е функция на x и $f'(x)$ — нейната производна, удовлетворяват зависимостта

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{z}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

37. Да се докаже, че ако положим $x=\cos\varphi$, ще имаме

$$\frac{d^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin n\varphi.$$

38. Да се докаже формулата на Halphen

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}.$$

39. Да се докаже равенството

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x-\operatorname{ctg}\alpha}{1+x^2}\right)=\frac{f(x)}{(x^2+1)^n},$$

гдето $f(x)$ е един полином от n-та степен. Да се покаже, че каквото и да бъде α, уравнението $f(x)=0$ има всичките си корени реални.

40. Като се вземат пред вид n-тите производни на

a) $y=x^n(1-x)^n$; b) $y=(x^2-1)^n$,

да се докажат формулите

$$\text{a)}\quad 1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n};$$

$$\text{b)}\quad 1-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=0 \text{ при } n \text{ нечетно}$$

или

$$1-\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2-\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}^2=(-1)^{\frac{n}{2}}\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

при n четно.

41. Да се докаже формулата

$$\sin x+\binom{n}{1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cdots+\binom{n}{n}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=2^{\frac{n}{2}}\sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right).$$

42. Дефиниция на Bernoulli'евите числа.

§ 6. Истинска стойност на неопределени форми

Да се намерят истинските стойности на следните функции:

1. $f(x)=\dfrac{x^4-10x^2+9}{x^4-8x^2-9}$ за $x=3$.

2. $f(x)=\dfrac{a^x-b^x}{x}$ за $x=0$.

3. $f(x)=\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$ за $x=2$.

4. $f(x)=\dfrac{2\sin x-1}{\cos 3x}$ за $x=\dfrac{\pi}{6}$.

5. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$ за $x=0$.

6. $f(x)=\dfrac{\sin 2x-2\sin x}{2e^x-2x-2}$ за $x=0$.

7. $f(x)=\dfrac{x^3-x^2-21x+45}{x^3-8x^2+21x-18}$ за $x=3$.

8. $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x^3}$ за $x=0$.

9. $f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}$ за $x=0$.

10. $f(x)=\dfrac{a^{\ln x}-x}{\ln x}$ за $x=1$.

11. $f(x)=\dfrac{\ln x^n-\ln a^n}{\sin x-\sin a}$ за $x=a$.

12. $f(x)=\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$ за $x=0$.

13. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$ за $x=0$.

14. $f(x)=\dfrac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ за $x=2$.

15. $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin 2x-\cos 2x-1}$ за $x=\dfrac{\pi}{4}$.

16. $f(x)=\dfrac{x-(32a^2x-24ax^2)^{\frac{1}{3}}+(40a^3x^3+24a^2x^4)^{\frac{1}{6}}-(2x^3-a^3)^{\frac{1}{3}}}{3a(9x-10a)+(36a^3x+45x^4)^{\frac{1}{4}}(2x^3-a^3)^{\frac{1}{3}}}$ за $x=a$

17. $f(x)=\dfrac{x^n}{e^{ax}}\quad (a>0)$ за $x=\infty$.

18. $f(x)=\dfrac{\ln(x+a)}{x^n}\quad (n>0)$ за $x=\infty$.

19. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

20. $f(x)=\dfrac{\ln\operatorname{tg}px}{\ln\operatorname{tg}x}$ за $x=0$.

21. $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x}$ за $x=\infty$.

22. $f(x)=\dfrac{\ln(1+e^x)}{a+bx}$ за $x=\infty$.

23. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin x}$ за $x=0$.

24. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}$ за $x=1$.

25. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\ln(1-x)}$ за $x=0$.

26. $f(x)=\dfrac{x}{\operatorname{ctg}x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

27. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ за $x=1$.

28. $f(x)=\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{1-\sin x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

29. $f(x)=\dfrac{\pi}{4x}-\dfrac{\pi}{2x(e^{\pi x}+1)}$ за $x=0$.

30. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2x$ за $x=0$.

31. $f(x)=x-\sqrt{(x-a)(x-b)}$ за $x=\infty$.

32. $f(x)=(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$ за $x=1$.

33. $f(x)=\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)$ за $x=a$.

34. $f(x)=x\ln\dfrac{x-a}{x+a}$ за $x=\infty$.

35. $f(x)=\ln x\,.\ln\ln x$ за $x=1$.

36. $f(x)=(\sin x-1)\,e^{\operatorname{tg}x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

37. $f(x)=x^x$ за $x=0$.

38. $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$ за $x=\infty$.

39. $f(x)=(\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

40. $f(x)=(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

41. $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$ за $x=\infty$.

42. $f(x)=(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$ за $x=\dfrac{\pi}{4}$.

43. $f(x)=(\cos ax)^{\operatorname{cosec}^2bx}$ за $x=0$.

44. $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ за $x=0$.

45. $f(x)=(\cos x)^{\cos x}$ за $x=\dfrac{\pi}{2}$.

46. $f(x)=x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$ за $x=0$.

47. $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ за $x=0$.

48. $f(x)=\left(2-\dfrac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}}$ за $x=a$.

49. $f(x)=\cos x\ln\sin x-\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ за $x=0$.

Да се намерят главните части на следните изрази:

50. $f(x) = \operatorname{tg} x - \sin x$.

51. $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\sin x}$.

52. $f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin^2 x$.

53. $f(x) = e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

54. Като се използува зад. 80, b), § 4, да се докаже, че

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}.$$

55. От формулата

$$\frac{1}{1^2+x^2} + \frac{1}{3^2+x^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2+x^2} + \ldots = \frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x\,(e^{\pi x}+1)}$$

да се изведе

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

56. Дадена е окръжност с радиус a и един централен ъгъл $\varphi = AOM$ от нея (черт. 1). Върху тангентата в точката A се нанася отсечка AN, равна на дъгата, която отговаря на ъгъла φ. Точките M и N се съединяват с права линия, която пресича правата OA в точка B. Да се намери разстоянието между точките B и O, когато $\lim \varphi = 0$.

57. Ако при един химически процес се вземе под внимание изменението на количествата само на две реагиращи вещества, то времето t, необходимо, за да се получат x_0 молекули вещество, се дава от формулата

$$t = \frac{1}{(A-B)\,k}\ln\frac{B\,(A-x_0)}{A\,(B-x_0)},$$

където A и B са самите количества, а k е константа. Да се намери каква е стойността на t, когато B клони към A.

§ 7. Максимум и минимум на функции на една независима променлива

Да се намерят максимумът и минимумът на следните функции:

1. $y = x^3 - 12x^2 + 45x + 30$.

2. $y = x^6 - ax^4 + b$.

3. $y = \frac{1-x}{(1+x)^2}$.

4. $y = x\,\frac{x-1}{x+1}$.

5. $y = \frac{\ln x}{x^n}$.

6. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

7. $y = x^x$.

8. $y = \sin 2x + 2\sin(a-x)$.

9. $y = \frac{\cos^2 x}{a^2} + \frac{\sin^2 x}{b^2}$, където $a > b$

10. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.

11. $y = \frac{x}{1 + x\operatorname{tg} x}$.

12. $y = \sin x \cdot \cos(a-x)$.

13. $y = x \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + 1$.

14. $y = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} 3x}$.

15. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

16. $y = x(1 + \sqrt[4]{x})$.

17. От числата $\sqrt[1]{1}, \sqrt[2]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \ldots$ да се намери най-голямото число.

18. Да се намери такова число, което, събрано с реципрочната си стойност, дава минимален сбор.

19. Да се раздели числото a на две части, така че произведението от m-тата степен на първата част с n-тата степен на втората да е максимум.

20. Измежду всички триъгълници с дадени страни a и b да се намери онзи, който има най-голямо лице.

21. Да се докаже, че измежду всички триъгълници с дадена основа и даден периметър равнобедреният триъгълник има най-голямо лице и обратно.

22. Да се докаже, че измежду всички правоъгълници с даден периметър квадратът има най-голямо лице и обратно.

23. Да се докаже, че кръгът може да се разглежда като правилен многоъгълник, който при постоянен периметър има най-голямо лице.

24. Измежду всички вписани конуси в дадена сфера (черт. 2), ито имат за основа един малък кръг и за връх една точка от сферата, да се намери онзи, който има най-голям обем.

25. Измежду всички кръгови цилиндри с даден обем да се намери зи, който има най-малка повърхнина.

26. Даден е един правоъгълен картон с размери a и b (черт. 3). кви трябва да бъдат размерите на страните на квадратите, които ябва да се изрежат в 4-те му края, че да се получи кутия с найлям обем.

27. Дадени са две успоредни прави AC, DB и една пресечна на х права AB (черт. 4). Да се прекара през дадената точка C права XY, така че сумата от лицата на триъгълниците BXY и AXC да ъде най-малка.

28. Да се пресече прав кръгов конус с равнина, успоредна на на от образуващите му (черт. 5), така че полученият параболичен гмент да има най-голямо лице (лицето на параболичния сегмент е $\frac{4}{3}hd$, гдето h е най-голямото разстояние на една точка от периферията на сегмента до хордата, а d е полухордата).

29. Да се пресече прав кръгов конус с една равнина, която да ресича всичките му образуващи (черт. 6), така че получената елипса има най-голямо лице.

30. Две тангенти на една окръжност образуват даден ъгъл 2α. а се намери какво положение трябва да има една трета тангента, ка че лицето на описания триъгълник на тази окръжност, който се бразува от трите прави, да бъде минимум.

31. Какъв е радиусът на кръга, за който на дадена дъга отговаря аксимален сегмент.

32. От един картон с кръгова форма да се направи конична фуия, която да притежава най-голяма вместимост.

33. Върху една окръжност да се намери една точка M, на която азстоянието от дадена точка P да е максимум или минимум (черт. 7).

34. a) Нека посредством n наблюдения да сме намерили за изестна величина x следните n различни стойности: $k_1, k_2, \ldots, k_n$, които служават еднакво доверие. Според теорията на най-малките квадрати ай-вероятното значение на x ще бъде онова, което обръща функцията

$$f(x) = (x-k_1)^2 + (x-k_2)^2 + \cdots + (x-k_n)^2$$

минимум. Да се намери тази стойност на x.

b) За две величини a и b, измерени посредством n наблюдения, а получени по n стойности, които заслужават еднакво доверие и за оито знаем, че съществува връзката

$$a = xb,$$

гдето x е неизвестна величина. Да се намери най-вероятното значение на x, което отговаря на тези n измервания.

35. От едно дърво (стебло) с радиус a на напречното сечение да се издяла греда с правоъгълно сечение и с най-голяма издръжливост (издръжливостта $J = kF$; тук k е коефициент, който зависи от материята на стеблото, а съпротивителният момент $F = \frac{1}{6}xh^2$, гдето x е основата на напречното правоъгълно сечение и h—височината му).

36. *Килийките на пчелите.* Дадена е една шестоъгълна правилна призма. Съединяваме с прави през един и два по два върховете на една от нейните основи. При тези прави прекарваме еднакво наклонени спрямо основата равнини, които образуват пирамида (черт. 8). Да се намери какъв трябва да бъде наклонът на тези равнини, щото полученият тотален обем да има най-малка повърхнина (частите на призмата, които лежат вън от телесния ъгъл при върха на пирамидата, изключваме от този обем).

37. Върху правата линия, която съединява центровете на две дадени сфери, външни една от друга, да се намери такава точка, че сумата на вижданите сегменти от тези две сфери да бъде най-голяма (предполага се, че точката се намира между двата центъра).

38. Даден е един предмет BC с дължина a, който лежи на разстояние b от края A на една маса. На каква височина $AD = x$ трябва да поставим окото си D, тъй че да виждаме предмета BC под найголям ъгъл.

39. Да се намери на каква височина x от една площ трябва да се постави една светеща точка L, така че един безкраен елемент P от тази площ на дадено разстояние a от проекцията A на L върху площта да бъде най-добре осветен (силата на осветлението е право пропорционална на силата на източника и sinus-а от ъгъла, който сключва осветяваната площ с падащия лъч, и обратно пропорционална на квадрата от разстоянието на светещия източник до елемента P).

40. Една светеща точка M се движи по една окръжност (черт. 9). Тя осветява една безкрайно малка площ, равнината на която е перпендикулярна на окръжността и минава през нейния център. Тази площ може да бъде разглеждана като разположена в една точка на пресечницата на двете равнини и вътрешността на тази окръжност. Да се намери положението на точката M, при което площта P ще получи максимално осветление.

41. Една точка P се движи от A към B равномерно и праволинейно със скорост v_1 (черт. 10). Когато P излиза от A, друга точка P_1 излиза от B и се движи също равномерно и праволинейно към точка C със скорост v_2. Да се намери моментът, в който разстоянието s между движещите се точки е най-късо.

42. Една точка P се движи с постоянна скорост по правата AB (черт. 11). В една точка C (неизвестна) тя се отбива и се движи праволинейно към точка O със скорост v_2. Да се намери точка C по такъв начин, щото времето t, необходимо да се измине начупеният път ACO, да бъде най-малко.

43. Нека v е скоростта на течението на една река и x е относителната скорост на един движещ се параход в нея. Като се знае, че изразходваният горивен материал в един час струва bx^3 лв., да се определи онази скорост, с която той би се движил най-икономично между двата крайбрежни пункта A и B.

44. *Закон за отражение.* Дадени са една права A_1B_1 и две точки A и B, лежащи вън от нея (черт. 12). Да се намери точка C върху правата A_1B_1, така че разстоянието $AC+CB$ да бъде най-малко.

45. *Закон за пречупване.* Една материална точка се движи от A до B по една начупена линия ACB (черт. 13). Тя изминава пътя AC с постоянна скорост v_1, а CB — със скорост v_2. Какво съотношение трябва да съществува между ъгъла на падането α и ъгъла на пречупването β, щото времето t, необходимо, за да измине пътя $s=AC+CB$, да бъде най-малко.

46. Два топлинни източника A и B, които се намират на разстояние a един от друг, нагряват една материална точка P, която лежи между тях върху правата AB. Да се намери в какво положение трябва да се постави точката P, щото нагряването да бъде най-малко (силата на нагряването е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието).

47. Едно тежко тяло P се хлъзга транслационно по една хоризонтална равнина с постоянна скорост под действието на силата k, която сключва с хоризонталната равнина постоянен ъгъл φ. Коефициентът на триенето е μ.

Ако се означи с L и N съответно хоризонталната и вертикалната компонента на реакцията R, да се намери силата k по такъв начин, че $L=\mu N$. След това да се определи ъгълът φ, който отговаря на най-малката сила k.

§ 8. Изследване и графично представяне на функции

Да се изучат вариациите и да се начертаят графиките на следните функции:

1. $y=\frac{\sin x}{x}$ (черт. 15).

2. $y=x+\frac{\sin x}{x}$ (черт. 15).

3. $y=x^n,\ n=1, 2, 3, 4, \ldots, \infty$ (черт. 16).

4. $y=\frac{1}{x-a}$ (черт. 17).

5. $y=\frac{1}{x^2}$ (черт. 18).

6. $y=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (черт. 19).

7. $y=e^{-\frac{1}{x^2}}$ (черт. 20).

8. $y=e^{-\frac{1}{x}}$ (черт 21).

9. $y=1+e^{\frac{1}{x-a}}$ (черт. 22).

10. $y=\frac{e^{\operatorname{tg} x}-1}{e^{\operatorname{tg} x}+1}$ (черт. 23).

11. $y=\frac{1}{x^2-1}$ (черт. 24).

12. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^{2n}}$ (черт. 25).

13. $y=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(1+\sin\pi x)^t-1}{(1+\sin\pi x)^t+1}$ (черт. 26).

14. $y=\operatorname{sgn} x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{nx}-e^{-nx}}{e^{nx}+e^{-nx}}$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\operatorname{arc\,tg} nx.$$ (черт. 27).

15. $y=\sin\frac{1}{x}$ (черт. 28).

16. $y=x\sin\frac{1}{x},\ y(0)=0$ (черт. 29).

17. $y=x^2\sin\frac{1}{x},\ y(0)=0$ (черт. 30).

18. $y=x\left[\frac{1}{x}\right]$ при $x>0$, където $\left[\frac{1}{x}\right]$ означава най-голямото цяло положително число, което се съдържа в $\frac{1}{x}$; $y(0)=1$ (черт. 31).

19. $y=\frac{[x]}{x},\ y(0)=0$ (черт. 32).

20. $y=\sqrt{x}-[\sqrt{x}],\ x>0$ (черт. 33).

21. $y = 2^{-[x]}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x-[x]}\right),\ x > 0$ (черт. 34).

22. $y = f'(x)$.

23. Непрекъснатата функция на Helge von Koch, която в никоя точка не притежава производна.

24. Да се докаже, че функцията

$$y(x) = \lim_{n\to\infty}[\cos(\lim_{m\to\infty} m!\,\pi x)]^n$$

е прекъсната за всяко x.

25. Измежду всички функции, които удовлетворяват функционалното уравнение

$$f(x) + f(y) = f(x+y),$$

да се намерят онези, които са непрекъснати.

26. Да се докаже, че a^x е единствената непрекъсната функция, която удовлетворява функционалното уравнение

$$f(x+y) = f(x)\,f(y).$$

27. Да се докаже, че ако $f(x)$ е непрекъсната функция, функционалното уравнение

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\,f(y)$$

има за единствени решения $\cos\frac{x}{a}$ и $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ в зависимост от това, дали $f(x)$ е по-малко или по-голямо от единица.

Да се определи броят на реалните корени на следните уравнения:

28. $\operatorname{arc\,tg} x - \frac{x}{1+x^2} = m$.

29. $\operatorname{arc\,tg} x - mx = 0$, гдето $m > 0$.

30. $\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x} = m$,

гдето x се съдържа между 0 и π, m означава константа и α е един ъгъл между 0 и $\frac{\pi}{2}$ (това уравнение се среща при пресмятането на орбитата на една планета с помощта на три наблюдения).

31. $\operatorname{tg} z = z$.

32. Да се изучи вариацията на обема на един конус с дадена апотема.

33. Да се изучи вариацията на обема и на пълната повърхнина на един цилиндър и един конус, вписани в дадена сфера.

34. Да се изучи вариацията на обема, на околната и пълната повърхнина на един конус, описан около дадена сфера.

§ 9. Частни производни и диференциали от първи и по-висок ред на функции на няколко независими променливи. Производни и диференциали на съставни функции

Да се намерят частните производни и диференциали на следните функции:

1. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$. $\qquad dz = ?$

2. $z = (x^3 - 2y)^2 + \sqrt{xy}$.

3. $z = (\sin 3x + \cos y)^2$.

4. $z = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$.

5. $z = (2x - 5y^2)^3$.

6. $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{2x + y - x^2y}{1 - 2xy - x^2}$.

7. $z = \operatorname{arc\,cos}\frac{1 - xy}{(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

8. $z = \ln\frac{x + \sqrt{x^2 - y^2}}{x - \sqrt{x^2 - y^2}}$.

9. $z = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{y}$.

10. $z = \sqrt{x^2 + y^2} + \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$.

11. $u = (x^a - 3e^y + a\ln z)^n$.

12. $u = \frac{ye^z}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}$.

13. $u = z^{yx}$.

14. $u = (y - \sqrt{y^2 - z^2})^x$.

15. $z = 3x^2 + xy^2 + y^4$. $\qquad d^2z = ?$

16. $z = y^2 e^x$.

17. $z = e^{\sin x} - x e^{\sin y}$.

18. $z = e^{x+y}$.

19. $u = \arcsin[(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-z^2}$

$$+ (\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy)\,z].$$

20. $z = x^n y^n$. $d^n z = ?$

21. $u = xyz$.

22. $u = e^{ax+by+cz}$. $d^n u = ?$

23. $u = \sin(x+y+z)$.

24. $u = \sin x \cos y \sin z + \cos x \sin y \sin z$

$$+ \cos x \cos y \cos z - \sin y \sin x \cos z.$$

25. $u = \ln(ax+by+cz)$.

26. За функцията $z = \sqrt{2xy+y^2}$ да се намери $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

27. „ „ $z = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$ „ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

28. „ „ $u = e^{xyz}$ „ $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

29. „ „ $z = x \operatorname{tg} y + y \operatorname{tg} x$ „ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

30. „ „ $z = \ln(x+y)^2(v+1)$ „ $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

31. „ „ $u = x^3 z^4 + e^x y^3 z^3 + x^2 y^2 z^2$ „ $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z}$.

32. За следните функции:

a) $z = \frac{x+y}{\sin(x-y)}$;

b) $z = \cos\frac{x}{y} \arccos\frac{y}{x}$;

c) $z = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$;

b) $z = \ln(x^2+y^2)$

да се проверят съответно равенствата:

a), b) и c) $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

d) $\frac{\partial^6 z}{\partial x^3 \partial y^3} = \frac{\partial^6 z}{\partial y^3 \partial x^3}$.

33. Да се намери първата производна на функцията $y = (2u+3v)^3$, гдето от своя страна u и v са функции само на x, дадени посредством връзките

$$u = \arcsin\frac{x}{3x+1}, \quad v = \ln(x^2+1).$$

34. Да се намери $\frac{d^3 y}{dx^3}$ на функцията

$$y = \sin u + \cos v, \text{ гдето } u = \cos x, \; v = \sin x.$$

35. Да се намерят първите диференциали на следните функции:

a) $z = \frac{a}{y} - \frac{b}{x}$, гдето $x = v \ln u$, $y = \frac{u}{v}$.

b) $z = f(x,y)$, гдето $y = \varphi(x)$.

c) $u = f(x,y,z)$, гдето $z = \varphi(x,y)$.

d) $u = x f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

e) $u = f(x, y, z + ay^2)$.

36. Да се намери вторият диференциал на фукциите:

a) $z = 2u^2 - v$, гдето $u = x - y$, $v = xy$.

b) $z = f(u,v)$, гдето $u = \sqrt{x^2+y^2}$, $v = \ln x$.

Да се провери тъждеството на Euler за следните хомогенни функции:

37. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2$.

38. $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$.

39. $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$.

40. $f(x,y,z) = (x+y+z)^3 - (x+y-z)^3$

$$-(x-y+z)^3 - (y+z-x)^3$$

41. $f(x,y,z) = \sin\sqrt{\frac{x+z}{x-y}}$.

42. $f(x, y, z) = \ln \operatorname{arc\,sec} \sqrt{\dfrac{x^n + y^n}{x^n - z^n}}$.

43. $f(x, y, z) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + z^2}} + \dfrac{x}{y}$.

44. $f(x, y, z, t) = \dfrac{xyzt}{x + y - z + t}$.

45. $f(x, y) = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right) + y^n \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

46. $f(x, y) = \dfrac{x^3 f\left(\dfrac{y}{x}\right) - y^3 f\left(\dfrac{y}{x}\right)}{x^3 y^3}$.

47. Да се докаже, че функциите:

a) $z = k \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y}{x} + \varphi(x^2 + y^2)$;

b) $z = x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

c) $z = x\varphi(x + y) + y\psi(x + y)$;

d) $y = \varphi(x + at) + \psi(x - at)$;

e) $z = e^{-kn^2 y} \sin nx$;

f) $z = e^{-kn^2 y} \cos nx$;

g) $z = f[x + \varphi(y)]$;

h) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

i) $z = x^n \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right) + y^n \psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,

каквито и да бъдат функциите f, φ и ψ, удовлетворяват съответно уравненията:

a) $xq - yp = k^*$;

b) $x^2 r + 2xys + y^2 t = 0$;

c) $r - 2s + t = 0$;

---

* $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, $r = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

d) $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *(диференциалното уравнение на трептението на струните)*;

e) и f) $q = kr$;

g) $ps = qr$;

h) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$;

i) $x^2 r + 2xys + y^2 t + yq + xp = n^2 z$.

48. Да се докаже, че функцията $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, където x е функция на t и a, b, c, d са константи, удовлетворява уравнението

$$\frac{x'''}{x'} - \frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2 = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 \qquad \text{(Schwarz).}$$

49. Каква зависимост трябва да съществува между коефициентите A, B, C и D на частното диференциално уравнение

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + C\frac{\partial z}{\partial x} + D\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

и фигуриращите във функцията $z = e^{ax + by - c}$ константи, че тази функция да удовлетворява даденото уравнение.

50. Да се намери производната на детерминантата

$$y(u_1, u_2, \ldots, w_3) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix},$$

където $u_1, u_2, \ldots, w_3$ са функции на x.

51. Ако $u = f(x, y, z, t)$ е функция на x, y, z, t и $U = F(X, Y, Z, T)$ е функцията, която се получава от дадената, като заместим x, y, z, t с линейно хомогенни функции на X, Y, Z, T, да се докаже, че

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial f}{\partial t} = X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} + T\frac{\partial F}{\partial T}.$$

52. Да се докаже, че за функциите

$$u = x^2 + y^2 - z^2,\quad v = x + y + z,\quad w = xy + yz + zx$$

функционалната детерминанта $\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}$ е равна на нула. Да се намери връзката, която съществува между тези функции.

53. Да се докаже, че функциите

$$x_1 = \cos\varphi_1,$$
$$x_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$
$$x_3 = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \cos\varphi_3,$$
$$x_n = \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 \dots \sin\varphi_{n-1} \cos\varphi_n$$

удовлетворяват равенството

$$\frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)} = (-1)^n \sin^n\varphi_1 \sin^{n-1}\varphi_2 \dots \sin^2\varphi_{n-1} \sin\varphi_n.$$

54. Да се докаже, че за функциите

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - \dots - x_n^2}}$$

имаме

$$\frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{1}{(1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2)^{1+\frac{n}{2}}}.$$

55. Ако функцията $V(x, y, z)$ удовлетворява уравнението

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

то същото свойство притежава и функцията

$$\frac{1}{r} V\left(k^2 \frac{x}{r^2}, k^2 \frac{y}{r^2}, k^2 \frac{z}{r^2}\right),$$

където k е const и $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

56. Функцията, определена от равенствата

$$V = 2\pi a^2 - \frac{2\pi}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 < a^2,$$

$$V = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \qquad \text{при} \quad x^2 + y^2 + z^2 \geqq a^2,$$

се нарича потенциал на сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Да се докаже, че V и нейните първи производни са непрекъснати за всяко x, y и z и че V удовлетворява Лапласовото уравнение

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \text{или} \quad -4\pi$$

в зависимост от това, дали точката (x, y, z) лежи вън от сферата $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ или вътре в нея.

57. Ако u е една хомогенна функция от n-та степен на променливите x_1, x_2, x_3 и означим изобщо $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ с u_α и $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ с $u_{\alpha\beta}$, да се докаже, че съществува релацията

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = \frac{(n-1)^2}{x_3^2} \begin{vmatrix} \frac{nu}{n-1} & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix}.$$

58. Да се намерят релациите, които съществуват между първите и вторите частни производни на функцията $z = f(x_1, u)$, където $u = \varphi(x_2, x_3)$. Тук x_1, x_2, x_3 са независими променливи и f и φ — две произволни функции.

Приложение

59. Ако при измерването на ръбовете на паралелепипеда направим грешките Δx, Δy, Δz, то и в изчислението на обема му V ще се направи съответна грешка. Да се определи тази грешка и да се намери при какви условия тя е най-малка или най-голяма, ако се смята, че грешките Δx, Δy, Δz са заменени с техните диференциали.

60. Относителното тегло на едно тяло спрямо водата се дава от формулата

$$s = \frac{p}{w},$$

където p е измереното тегло на това тяло при даден обем и w е това на водата при също такъв обем. Ако при измерването на тези величини се направят грешки Δp и Δw, да се намери съответната грешка на s при условие, че грешките Δp и Δw са заменени с техните диференциали dp и dw.

§ 10. Максимум и минимум на функции с няколко променливи

Да се намерят максимумите и минимумите на следните функции:

1. $z = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 8x + 8y$.

2. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

3. $z = x^2 + y^2 + xy - 6x - 4y + 5$.

4. $z = x^3y^2(a - x - y)$.

5. $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

6. $z = 7x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 7y - 12$.

7. $z = y^4 - 8y^3 + 18y^2 - 8y + x^3 - 3x^2 - 3x$.

8. $z = 2 + (x-y)^2 + (y-1)^2$.

9. $z = e^{-x^2-y^2}(ax^2 + by^2)$.

10. $z = x\,e^{y + x \sin y}$.

11. $z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$.

12. $z = \cos\alpha \cos x + \sin\alpha \sin x \cos(y - \beta)$.

13. Да се раздели числото a на три части, така че произведението им да бъде максимум.

14. Измежду всички триъгълници, вписани в дадена окръжност, да се намери онзи, който има най-голямо лице.

15. Измежду всички триъгълници с даден периметър равностранният триъгълник има най-голямо лице и обратно.

16. Измежду всички четириъгълници, вписани в дадена окръжност и които имат постоянен върхов ъгъл α, да се намери онзи, който има най-голямо лице (черт. 46).

17. Измежду всички паралелепипеди с една и съща пълна повърхнина да се намери онзи, който има най-голям обем.

18. Да се докаже, че измежду всички паралелепипеди, вписани в дадена сфера, кубът има най-голям обем и най-голяма повърхнина.

19. Да се докаже, че измежду всички изпъкнали n-ъгълници, вписани в дадена окръжност, правилният многоъгълник има най-голямо лице.

20. Измежду всички триъгълници с даден периметър да се намери онзи, който при въртенето около една от страните си образува двоен конус с най-голям обем.

21. Измежду всички триъгълници, вписани в даден триъгълник, да се намери онзи, който има най-малък периметър.

22. В равнината на един триъгълник да се намери такава точка M, за която сборът от квадратите на разстоянията ѝ до трите върха на триъгълника да е най-малък (черт. 47).

23. В една равнина са дадени n точки P_k с координати x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Да се намери такава точка в равнината на дадените точки, на която сумата от квадратите на разстоянията, умножени съответно с положителните константи m_k, да бъде минимум.

24. Ако x, y и z са ъглите на един триъгълник, да се определи какви трябва да бъдат те, че произведението от техните косинуси да бъде минимум или максимум.

25. В равнината на един триъгълник да се намери такава точка M, за която сборът от разстоянието ѝ до трите върха на триъгълника да е най-малък (черт. 48).

26. Да се намери най-късото разстояние между двете кръстосани прави

$$\begin{cases} x = x_0 + a_0 t, \\ y = y_0 + b_0 t, \\ z = z_0 + c_0 t, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_1 + a_1 u, \\ y = y_1 + b_1 u, \\ z = z_1 + c_1 u. \end{cases}$$

27. Едно езеро има форма приблизително като на черт. 49. Един лодкар, който е тръгнал с лодка от селото A с току-що пристигналите пощенски пратки за населените брегове на езерото, трябва да се отбие някъде на брега SA, после — на SB, и най-после да отиде в селото B. Как трябва да се движи, че пътят му да бъде най-къс.

28. От един метал трябва да се отлее и после да се шлифова една права триъгълна призма с равнобедрена основа. Шлифовката на квадратна единица от триъгълни площи струва $m = 5$ лв., а от правоъгълни — $n = 4$ лв. При даден обем V да се определят размерите на призмата, тъй че шлифовката да струва най-евтино.

29. Три величини z, a и b, които могат непосредствено да бъдат измерени n-пъти с еднаква точност, се намират в зависимостта

$$z = ax + by$$

с две други величини x и y, които от своя страна не могат непосредствено да бъдат измерени. Да се намерят най-вероятните значения за x и y.

30. Да се намерят n точки, разположени във вътрешността или по контура на един кръг, така че произведението от всички разстояния между тях да бъде максимум.

§ 11. Диференциране на неявни функции с една и повече променливи

Да се намери първата и втората производна на функцията y, определена като неявна функция на x от следните уравнения:

1. $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. $\qquad y' = ?\ y'' = ?$

2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$.

3. $x^3 + 3x^2y - y^3 = 0$.

4. $y^x = \dfrac{x+y}{x-y}$. $\qquad y' = ?$

5. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. $\qquad y'' = ?$

6. $e^{ax-by} - c = 0$. $\qquad y' = ?,\ y'' = ?$

7. $e^{\sin x} - x\, e^{\sin y} = 0.$ $y' = ?$

8. $y + y e^{-x} - x = 0.$ $y' = ?,\ y'' = ?$

9. $x^y = y^x.$ $y' = ?$

10. $\arcsin \frac{x}{a} + \arcsin \frac{y}{b} = c.$

11. $ax + by + xy = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$

12. $y = 1 + xe^y.$

13. $y \sin nx - a\, e^{ax+y} = 0.$

14. $y \operatorname{arc\,tg} x - y^2 + x^2 = 0.$

15. $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0.$

16. $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$

17. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x-a}{x+a} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y-a}{y+a} = \frac{\pi}{4}.$

18. $x = a \arcsin \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$

19. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$

20. $\ln c\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$

21. $a^{xy} + \sqrt{\sec xy} = 0.$

22. $x = a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{2ay - y^2}.$ $y' = ?,\ y'' = ?$

23. $\arcsin x - \arcsin \sqrt{1 - y^2} = 0.$ $y' = ?$

24. $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y.$

25. $y^{\sin x} = x \sin y.$

Да се намери първият диференциал на функцията z, дефинирана като неявна функция на x и y от следните уравнения:

26. $z^3 + 3x^2 z = axy.$

27. $\frac{x}{y} = \operatorname{tg}\frac{2\pi}{a} z.$

28. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2).$

Да се намери вторият диференциал на функцията z, дефинирана като неявна функция на x и y от следните уравнения:

29. $z^2 = xe^y + e^z.$

30. $2axz + 2byz + cz^2 = k^2.$

31. $x^x y^y z^z = a.$

Да се намерят първите производни на функциите y и z, дефинирани като неявни функции на x от следните системи уравнения:

32. $\begin{cases} x^3 + y^2 - 3z + a = 0, \\ z^2 - 2y^2 - x + b = 0. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0, \\ x + y + z = a. \end{cases}$

34. $\begin{cases} ax + by + cz = m, \\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = n. \end{cases}$

35. $\begin{cases} z^2 + xy - a^2 = 0, \\ 3x^2 + 2yz - bx = 0. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = a, \\ x^3 + y^2 + z^3 = b. \end{cases}$

37. $\begin{cases} \operatorname{tg}(x + y) + \sin z = \cos a, \\ \operatorname{tg}(x - y) + \sin z = \operatorname{tg} a. \end{cases}$

38. Да се намери $\frac{du}{dx}$ на системата

$$\begin{cases} u^2 + x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ \ln xy + \frac{y}{x} = b^2, \\ \ln \frac{z}{x} + zx = c^2. \end{cases}$$

Да се намерят пълните диференциали на функциите z и u, определени като неявни функции на x и y от следните уравнения:

39. $\begin{cases} xy + zu = a, \\ \frac{x+y}{z+u} = b, \end{cases}$ $dz = ?$ $du = ?$

40. $\begin{cases} x + y + z + u = a, \\ \ln xyzu = b \end{cases}$ $dz = ?$ $du = ?$

41. $\begin{cases} x+y+z+u=a, \\ x^2+y^2+z^2+u^2=b, \end{cases}$ $\quad d^2z=?\quad d^2u=?$

42. $\begin{cases} x+y+z+u=a, \\ xyzu=b, \end{cases}$ $\quad d^2z=?\quad d^2u=?$

43. $\begin{cases} ax+by+cz+ku=l, \\ a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+k^2u^2=m, \end{cases}$ $\quad d^2z=?\quad d^2u=?$

44. $\begin{cases} xy+6uz=10, \\ x+y-8z-12u=5, \end{cases}$ $\quad d^2z=?\quad d^2u=?$

45. Да се провери, че функцията y, дефинирана от уравнението

$$\arccos\frac{y}{a}=\ln\left(\frac{x}{b}\right)^n, \tag{1}$$

удовлетворява зависимостта

$$x^2y^{(n+2)}+(2n+1)\,xy^{(n+1)}+2n^2y^{(n)}=0. \tag{2}$$

46. Да се провери, че функцията z, дефинирана като неявна функция на x и y от следните уравнения:

a) $z^3+xy^2-x=0$;

b) $y=x\varphi(z)+\psi(z)$;

c) $z=x+yf(z)$

удовлетворява съответно релациите:

a) $rt-s^2=\dfrac{4}{27z^4}$;

b) $rq^2-2pqs+tp^2=0$;

c) $\begin{cases} D_y[\varphi(z)\,D_xz]=D_x[\varphi(z)\,f(z)\,D_xz]^*; \\ D_y^nz=D_x^{n-1}[(f(z))^n\,D_xz]; \\ D_y^nF(z)=D_x^{n-1}[F'(z)\,(f(z))^n\,D_xz]. \end{cases}$

47. Да се провери, че функцията z, дефинирана като неявна функции на x и y от следните системи уравнения:

a) $\begin{cases} [z-\varphi(u)]^2=x^2(y^2-u^2), \\ [z-\varphi(u)]\,\varphi'(u)=ux^2; \end{cases}$

* $D_xF=\dfrac{\partial F}{\partial x},\ \ldots,\ D_x^nF=\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$.

b) $\begin{cases} z=ux+yf(u)+\varphi(u), \\ 0=x+yf'(u)+\varphi'(u); \end{cases}$

c) $\begin{cases} z\varphi'(u)=[y-\varphi(u)]^2, \\ (x+u)\,\varphi'(u)=y-\varphi(u); \end{cases}$

d) $\begin{cases} z=\dfrac{\varphi(u)}{(x+u)^2+\varphi'(u)}+\dfrac{1}{x+u}, \\ y+\ln(x+u)^2\cdot\varphi'(u)=0, \end{cases}$

където u е една помощна променлива и φ, f са две произволни функции на u, удовлетворяват съответно зависимостите

a) $pq=xy$;

b) $rt-s^2=0$;

c) $pq=z$;

b) $(z-q)^2+p=0$.

48. u и v са функции на x, y, α и β, дефинирани с уравненията

$$\begin{cases} u=\alpha+x\varphi(u,v), \\ v=\beta+y\psi(u,v). \end{cases} \tag{1}$$

Да се докаже, че ако $f(u, v)$ е една произволна функция на u и v, съществуват следните зависимости:

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\varphi(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}$;

b) $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\psi(u,v)\dfrac{\partial f}{\partial\beta}$.

49. Функцията u на променливите $x, y, z, \ldots, t$ е дадена от уравнението

$$f(x, y, z, \ldots, t, u)=0.$$

Ако означим с α и β кои да са две променливи от $x, y, z, \ldots, t$, да се докаже зависимостта

$$\frac{\partial^2u}{\partial\alpha\partial\beta}=\frac{1}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial u}\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial f}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial\beta} & \dfrac{\partial^2f}{\partial\alpha\partial\beta} & \dfrac{\partial^2f}{\partial\beta\partial u} \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial^2f}{\partial\alpha\partial u} & \dfrac{\partial^2f}{\partial u^2} \end{vmatrix}.$$

§ 12. Максимум и минимум на неявни функции

Да се намерят максимумите и минимумите на функцията y, дефинирана като неявна функция на x от следните уравнения:

1. $x^3 - 3a^2x + y^3 = 0$.

2. $y^2 - ay - \sin x = 0$, $\qquad |a| > 2$.

3. $y^2 - x^2y + x - x^3 = 0$.

4. $x^3 + y^3 - a^2x = 0$.

5. Да се намери за кои значения на x функцията

$$z = xy$$

има максимум или минимум при условие, че

(1) $$x^3 + y^3 - axy = 0.$$

6. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$$

при условие, че

$$y - x = \frac{\pi}{4}, \qquad a > 0,\ b > 0.$$

7. Да се намери максимумът или минимумът на функцията z, дефинирана като функция на x и y от уравнението

$$x^x y^y z^z = e^{-\frac{2}{z}}.$$

8. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u = x + y + z$$

при условие, че

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 1.$$

9. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u = (x+1)(y+1)(z+1)$$

при условие, че

$$a^x b^y c^z = A.$$

10. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u = \cos x \cos y \cos z$$

при условие, че

$$x + y + z = \pi.$$

11. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u = ax + by + cz$$

при условие, че

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

12. Да се докаже, че максимумът на функцията

$$y = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

е

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

при условие, че

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1.$$

13. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2$$

при условия:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad lx + my + nz = 0.$$

14. Да се намери максимумът или минимумът на функцията

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

при условия:

$$ax + by + cz = 1, \quad lx + my + nz = 1.$$

15. Да се раздели числото a на n части, така че тяхното произведение да бъде максимум.

16. Измежду всички триъгълници с дадени основа и срещулежащия й ъгъл α да се намери онзи, който има най-голямо лице.

17. Измежду всички елиптични цилиндри, вписани в дадена сфера, да се намери онзи, който има най-голям обем.

18. Да се намери най-късото разстояние между точката $M(a, b, c)$ и равнината $Ax + By + Cz = D$.

19. Да се намери такава точка в един тетраедър, че сумата от квадратите на разстоянията й до 4-те стени на този тетраедър да бъде минимум.

20. Измежду всички прави паралелепипеди, на които сумата от ръбовете е постоянна величина a, да се намери онзи, на който обемът е най-голям.

21. Да се намери най-късото и най-дългото разстояние от точката $M(a, b, c)$ до сферата

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = R^2.$$

22. Измежду всички триъгълни пирамиди, които имат една и съща основа и постоянна височина, да се намери онази, която има най-малка повърхнина.

23. Да се намери върху дадена окръжност такава точка M, че сумата от разстоянията ѝ до две дадени точки A и B да бъде най-голяма или най-малка.

24. Измежду всички четириъгълници с дадени страни вписаният в една окръжност има най-голямо лице. Обобщение за n-ъгълника.

25. В даден елипсоид да се впише паралелепипед с максимален обем.

26. Върху една триъгълна призма и в равнината на едно нейно напречно сечение пада светлинен лъч. Да се намери под какъв ъгъл трябва да пада този лъч, за да сключва с излизащия лъч най-малък ъгъл.

27. Под какъв ъгъл трябва да пада един светлинен лъч върху една кълбообразна водна капка, тъй че отклонението, което той претърпява при пречупването на влизане, при отражението и най-после при пречупването на излизане, да бъде минимум. Какъв трябва да бъде ъгълът на падането, тъй че, ако между влизането и излизането се случат k отражения, отклонението да бъде пак минимум.

28. Един електрически съпротивител е съставен от n части с дължини $l_1, l_2, \ldots, l_n$ и потенциалният пад и края на проводника е E волта. Да се намерят размерите на напречните сечения $q_1, q_2, \ldots, q_n$ на отделните части, така че изразходваният материал за направата на този проводник да бъде най-малко, когато интензивността на електрическия ток в отделните части е съответно $i_1, i_2, \ldots, i_n$.

29. Точките на една повърхнина S, на които сумата от квадратите на разстоянията им (поотделно) до n дадени точки е максимум или минимум, са прободите на нормалите, спуснати от центъра на тежестта на n-те точки към повърхнината.

30. Периметърът s на един триъгълник, на който върховете M_1, M_2, M_3 лежат върху три дадени криви C_1, C_2, C_3, може да бъде максимум или минимум само тогава, когато нормалите в точките M_1, M_2, M_3, прекарани към тези криви, разполовяват ъглите на триъгълника, или, което е същото, когато нормалата в един кой да е връх минава през пресечната точка на тангентите, прекарани през другите два върха към съответните криви.

31. Повърхнината

$$(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$$

е пресечена с една равнина, която минава през нейния център. Да се намери максималното и минималното разстояние от центъра до периферията на сечението.

32. Да се намери лицето на сечението на един елипсоид с една равнина, която минава през центъра му.

33. Да се опише около даден триъгълник елипса с най-голямо лице.

34. Да се впише в даден триъгълник елипса с най-голямо лице.

§ 13. Смяна на променливи

1. В следните диференциални уравнения и изрази:

a). $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a+1)\,x\dfrac{dy}{dx}-y=0;$

b). $x\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}=0;$

c) $(a^2-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=0;$

d) $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{y}{(e^x+e^{-x})^2};$

e) $\dfrac{x^2+a^2}{x^2}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{x^2-a^2}{x^3}\dfrac{dy}{dx};$

f) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\,\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}\dfrac{dy}{dx}+4\dfrac{n^2y}{(e^{2x}+e^{-2x})^2}=0;$

g) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{2x}{1+x^2}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{(1+x^2)^2}=0;$

h) $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\,(1-x^2)^2\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2ay}{1-x}=0;$

i) $(a+x)^3\dfrac{d^3y}{dx^3}+3\,(a+x)^2\dfrac{d^2y}{dx^2}+(a+x)\dfrac{dy}{dx}+by=0;$

j) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dx}+y=0;$

k) $(x-x^3)\dfrac{d^2y}{dx^2}+(2-3x^2)\dfrac{dy}{dx}-xy=0$

да се смени независимата променлива x с t, като се знае, че съществуват следните връзки:

a) $x=e^t;$

b) $x=e^t;$

c) $x=a\sin t;$

d) $x=\ln\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}};$

e) $x=a\sqrt{e^t-1};$

f) $x=\ln\sqrt{\operatorname{tg} t};$

g) $t=\operatorname{arc\,tg} x;$

h) $x=\frac{e^{2t}-1}{e^{2t}+1}$;

i) $t=\ln(a+x)$;

j) $x^2=4t$;

k) $x=\sqrt{1-t^2}$.

2. Ако y се разглежда като независима променлива, в какво ще се обърнат следните диференциални уравнения:

a) $\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+e^y\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0$;

b) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}+y\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left(3\frac{dy}{dx}+x^2\right)=0$;

c) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^4y}{dx^4}-10\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}+15\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=0$.

3. В какво ще се обърне диференциалният инвариант на Schwarz

$$\frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{\frac{dy}{dx}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}\right)^2:$$

1°) ако се смени x с t посредством връзката

$$x=\frac{at+b}{ct+d};$$

2°) ако се разглежда y като независима променлива.

4. Да се докаже, че уравнението

$$9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\frac{d^5y}{dx^5}-45\frac{d^2y}{dx^2}\frac{d^3y}{dx^3}\frac{d^4y}{dx^4}+40\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3=0$$

не се изменя, ако извършим върху променливите x и y една произволна хомографична трансформация (*диференциален инвариант на* Halphen).

5. В следните диференциални уравнения и изрази:

a) $\dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$;

b) $\dfrac{x\frac{dy}{dx}-y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$;

c) $\dfrac{x+y\frac{dy}{dx}}{x\frac{dy}{dx}-y}$;

d) $(x+y-6)\frac{dy}{dx}+x+y+6=0$;

e) $xy\frac{d^2y}{dx^2}-x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^3=0$;

f) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{Ay}{(x-a)^2(y-b)^2}$ (*уравнение на* Stokes),

да се сменят независимата променлива x и функцията y с φ и r (t и u), като се знае, че съществуват следните връзки:

a), b) и c) $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$;

d) $x=u+t$, $y=u-t$;

e) $x=e^t$, $y=e^u$;

f) $u=\frac{y}{x-b}$, $t=\ln\left|\frac{x-a}{x-b}\right|$.

6. Да се преобразува изразът

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

ако x и y се смятат като функции на дъгата s от кривата $y=y(x)$.

7. Да се докаже, че посредством субституцията $x=ye^z$ уравнението

$$x\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{dy}{dx}=0$$

се трансформира в

$$y\frac{d^2z}{dy^2}+\frac{dz}{dy}=0.$$

8. Да се докаже, че ако $x+y=z$, имаме зависимостта

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left[\left(\frac{dz}{dy}\right)^2-2\frac{dz}{dy}+2\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2z}{dy^2}}.$$

9. В уравненията

a) $$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0;$$

b) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0;$$

c) $$y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

да се сменят независимите променливи x и y с r и φ, като се знае, че

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

10. Същото за уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+2(y-y^3)\frac{\partial z}{\partial y}+3x^2y^2z^2=0,$$

гдето $x=uv$ и $y=\frac{1}{v}$.

11. Да се докаже, че съществуват равенствата:

a) $$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}=X\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}-Y\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial X};$$

b) $$4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=e^{-2\theta}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}\right),$$

ако имаме следните връзки:

a) $x+y=X,\ y=XY;$

b) $x=e^{\theta+\varphi}+e^{\theta-\varphi},\ y=e^{\theta+\varphi}-e^{\theta-\varphi}.$

12. Ако $V(x, y)$ е една произволна функция на x и y и положим $x=f(u, v)$, $y=\varphi(u, v)$, гдето функциите $f(u, v)$ и $\varphi(u, v)$ удовлетворяват условията

(1) $$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial v},\ \frac{\partial f}{\partial v}=-\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

да се докаже тъждеството

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial v^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)\left[\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2\right].$$

13. В уравнението

$$\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-e^z=0$$

да се сменят независимите променливи x, y и функцията z с u, v и w, като се знае, че

(1) $$u=x^2-y^2,\ \ln\frac{1}{2}v=z,\ w=x^2+y^2.$$

14. Същото за израза

$$\frac{y-x}{\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}},$$

гдето

$$u=\operatorname{arc\,tg} z,\ v=x+y+z,\ w=\ln\sqrt{x^2+y^2}.$$

15. Същото за уравнението

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

гдето

$$u=x+y,\ v=x-y,\ w=xy-z.$$

16. В уравнението

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

да се сменят независимите променливи x, y и z с r, θ и φ, като се знае, че

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\sin\theta\cos\varphi.$$

17. Същото за уравнението

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+yx\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+zx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+zy\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=0,$$

гдето

$$x=YZ,\quad y=XZ,\quad z=XY.$$

18. Същото за израза

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

гдето
$$X = ax + by + cz,\ Y = a_1x + b_1y + c_1z,\ Z = a_2x + b_2y + c_2z,$$
$$\sum a^2 = 1,\ \sum a_1^2 = 1, \ldots, \sum aa_1 = 0,\ \sum bb_1 = 0, \ldots^*$$

19. В уравнението
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$
да се сменят независимите променливи, като се знае, че
$$z = \varphi(r) \text{ и } r^2 = x^2 + y^2.$$

20. Същото за уравнението
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$
гдето
$$u = \varphi(r) \text{ и } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

21. Същото за уравнението
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + au = 0,$$
гдето $u = \varphi(w)$ и $w = (x - x_0)(y - y_0)$.

22. Нека означим с u и v две произволни функции на независимите променливи x и y и да положим
$$U = \frac{au + bv + c}{a''u + b''v + c''},\ V = \frac{a'u + b'v + c'}{a''u + b''v + c''},$$
гдето $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$ са константи. Да се докажат формулите
$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial x}}{(u, v)} = \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial x} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial x}}{(U, V)},$$
$$\frac{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)}{(u, v)} =$$
$$= \frac{\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}\dfrac{\partial V}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\dfrac{\partial U}{\partial y} + 2\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial U}{\partial x}\dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right)}{(U, V)}$$
и аналогичните формули, които се получават, като пермутираме x и y.

* Геометрически тези равенства представляват една трансформация на правоъгълните координатни системи (x, y, z) и (X, Y, Z) с общо начало.

Тук полагаме
$$(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x},\ (U, V) = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}$$
(Goursat и Painlevé, *Comptes rendus*, 1887

23. Да се докаже, че трансформацията
$$X = \frac{dy}{dx},\ Y = x\frac{dy}{dx} - y \quad (\textit{трансформация на } \text{Legendre}),$$
гдето X и Y са съответно новата независима променлива и новата функция, води до следните зависимости:
$$x = \frac{dY}{dX},\quad y = X\frac{dY}{dX} - Y,$$
$$\frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{1}{\dfrac{d^2y}{dx^2}},\quad \frac{d^3Y}{dX^3} = -\frac{\dfrac{d^3y}{dx^3}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3}.$$

24. Да се докаже, че трансформациите

a) $X = x,\ Y = p,\ Z = z - yq$ (трансформация на Ampère),

b) $X = p,\ Y = q,\ Z = px + qy - z$ (трансформация на Legendre),

гдето $p = \dfrac{\partial z}{\partial x},\ q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, X и Y — новите независими променливи, а Z — новата функция, водят до следните равенства:

a) $\dfrac{\partial Z}{\partial X} = p,\ \dfrac{\partial Z}{\partial Y} = -y,\ z = Z - Y\dfrac{\partial Z}{\partial Y};$

b) $\dfrac{\partial Z}{\partial X} = x,\ \dfrac{\partial Z}{\partial Y} = y,\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \dfrac{t}{rt - s^2},\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} = -\dfrac{s}{rt - s^2},\ \dfrac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \dfrac{r}{rt - s^2},$

гдето
$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

§ 14. Развитие на функции в редове

Да се развият по нарастването h на x следните функции:

1. $y = \sin^2 x.$

2. $y=\dfrac{a+x}{a-x}$.

3. $y=e^{ax}\sin bx$.

Да се развият в редове по целите степени на x следните функции:

4. $y=e^{x\cos a}\sin(x\sin a)$.

5. $y=e^{x\cos a}\cos(x\sin a)$.

6. $y=\cos^3 x$.

7. $y=\sin^3 x$.

8. $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2$.

9. $y=\dfrac{1-x}{\sqrt{1+x}}$.

10. $y=\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$.

11. $y=\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^2\ln(1+x)$.

12. $y=e^{\sin x}$.

13. $y=\arcsin x$.

14. $y=(\arcsin x)^2$.

15. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $y=e^{a\arcsin x}$.

17. $y=\operatorname{arc\,tg} x$.

18. $y=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{a-x}{a+x}$.

19. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

20. $y=\operatorname{tg} x$.

Да се докажат следните формули:

21. $\cos x=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 x-\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sin^4 x}{4}-\dfrac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\,\dfrac{\sin^6 x}{6}-\cdots$

22. $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{x}{2}+\sin x+\dfrac{\sin 2x}{2}+\dfrac{\sin 3x}{3}+\dfrac{\sin 4x}{4}+\cdots$

23. $\dfrac{\pi}{2}=x+\sin x\cos x+\dfrac{\cos^2 x\sin 2x}{2}+\dfrac{\cos^3 x\sin 3x}{3}+\cdots$

24. $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\sin 2x}{2\cos^2 x}+\dfrac{\sin 3x}{3\cos^3 x}+\cdots$

25. $\sin mx=\sin x+\dfrac{m-1}{1!}x\cos x-\dfrac{(m-1)^2}{2!}x^2\sin x$

$$-\frac{(m-1)^3}{3!}x^3\cos x+\cdots$$

26. $\cos mx=\cos x-\dfrac{m-1}{1!}x\sin x-\dfrac{(m-1)^2}{2!}x^2\cos x$

$$+\frac{(m-1)^3}{3!}x^3\sin x+\cdots$$

27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\cdots+\dfrac{1}{mn}\right)=\ln m$ (m и n цели).

28. $\operatorname{tg} x=\sin x+\dfrac{1}{2}\sin^3 x+\dfrac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\sin^5 x+\dfrac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\sin^7 x+\cdots$

29. $\sin mx=m\sin x-\dfrac{m(1-m^2)}{3!}\sin^3 x$

$$+\frac{m(1-m^2)(9-m^2)}{5!}\sin^5 x+\cdots$$

30. $\cos mx=1-\dfrac{m^2}{2!}\cos^2 x-\dfrac{(4-m^2)\,m^2}{4!}\cos^4 x$

$$\frac{(4^2-m^2)(2^2-m^2)\,m^2}{6!}\cos^6 x-\cdots$$

31. $\ln\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}+\dfrac{1}{3(x-1)^3}-\cdots$

32. $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\pi+x}-\dfrac{1}{\pi-x}+\dfrac{1}{2\pi+x}-\dfrac{1}{2\pi-x}+\cdots$

33. $\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}-\dfrac{1}{\frac{\pi}{2}+x}+\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}-x}-\dfrac{1}{\frac{3\pi}{2}+x}+\dfrac{1}{\frac{5\pi}{2}-x}-\cdots$

34. $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1+x^2}\left(1+\frac{2}{3}\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2+\cdots\right).$

35. $n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\frac{\vartheta}{12n}}$ (формула на Stirling).

36. $e^{ix} = \cos x + i\sin x.$

37. $\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h.$

38. $(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx.$

39. Дефиниция на Bernoulli'еви числа и развития на

$$x\operatorname{ctg} x, \quad \frac{x}{\sin x} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x.$$

40. Дефиниция на Euler'ови числа и развитие на $\sec x$.

41. От Taylor'овия ред

$$(1) \quad f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)$$

да се изведе следният:

$$(2) \quad f(x) = f(0) + xf'(x) - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x).$$

42. Да се пресметнат

a) $\sin 1^\circ$;

b) $\sqrt[3]{129}$;

c) $\sqrt[3]{10}$;

d) $y = \frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{2(m+2)} + \cdots + \frac{x^n}{n(m+n)} + \cdots,$

гдето m е цяло положително число и $|x| < 1$.

43. Да се докаже, че приблизителната формула за извличане на корен n от едно число N:

$$\sqrt[n]{N} = \sqrt[n]{a^n+b} \approx \frac{2ab}{2nN-(n+1)b},$$

е с грешка, приблизително равна на

$$\frac{n^2-1}{12n^2}\left(\frac{b}{a^n}\right)^2.$$

Тук a^n е близко до числото N.

44. С помощта на предната формула да се пресметнат следните корени:

a) $\sqrt[3]{30}$;

b) $\sqrt[5]{250}$;

c) $\sqrt{84}$.

45. Да се намери ъгълът на зрението, под който се вижда диаметърът на една тръба с радиус 2 м от разстояние 10 км.

46. Дискът на слънцето се вижда под ъгъл 30′. Да се намери колко пъти разстоянието до слънцето е по-голямо от диаметъра му.

47. Да се докаже приблизителната формула

$$l \approx \sqrt{13\,h},$$

където h е височината на наблюдателя над хоризонта, измерена в метри, а l — разстоянието до хоризонта в километри.

48. С помощта на тъждеството

$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

да се изчисли π с точност до 10^{-10}.

49. Да се намерят степенните развития на произведенията:

a) $y = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots$

b) $y = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1+\frac{4x^2}{(2n+1)^2\pi^2}\right)\cdots$

50. Да се намери степенното развитие на функцията y, дефинирана от уравнението

$$y^3 - y + x = 0.$$

51. Ако с α означим един централен ъгъл на окръжност с надите r, с a и b хордите, които отговарят на ъглите α и $\frac{\alpha}{2}$, да се намери грешката, която правим, ако вземем за дължина на дъгата, отговаряща на ъгъла α, стойността $\frac{1}{3}(8b-a)$. Частен случай $\alpha = 30^0$.

Да се развият в Маклоренов ред следните функции:

52. $z = x\sin y + y\sin x$.

53. $z = \frac{1}{(1-x)(1-y)}$.

54. $z = \ln(1-x)\ln(1-y)$.

55. $z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}$.

56. $z = e^{ax+by}$.

57. $z = \sin x + \cos y$.

58. Да се намерят първите три члена на степенното развитие по $x-1$ и $y-1$ на функцията z, дефинирана като неявна функция на x и y от уравнението

$$z^3 - 3xz + y = 0.$$

Отдел II

ГЕОМЕТРИЧНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 15 Тангента t, нормала n, T, N, S_t, S_n и подножица на равнинни криви

Да се намерят уравненията на тангентата и нормалата на кривите:

1. $y = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 3$ в точката $M(2, -1)$

2. $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ в точката $M(-2, 3)$.

3. $x = 3t - 5$, $y = t^2 - 4$ в точката с $t = 3$.

4. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в точката $M(x, y)$.

5. $y = x^{-\frac{3}{2}}$ в точката $M(1, 1)$.

6. Да се намери онази тангента на кривата $x^3 = y^2$, която е успоредна на правата $y = ax + b$.

7. Същото за кривата $y = x^4$ и правата $y = 4x$.

8. Да се докаже, че тангентата на кривата

$$x^2(x+y) = a^2(x-y)$$

в началото на координатната система е $y = x$.

9. Да се докаже, че лицето на триъгълника, заключено между тангентата на хиперболата $xy = k^2$ и нейните асимптоти, е постоянна величина.

10. Да се докаже, че тангентата на *верижката* (черт. 74)

$$y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$$

сключва с оста x ъгъл, на който тангенсът е равен на

$$\frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}.$$

11. Да се докаже, че отрезът между координатните оси на тангентата на астроидата

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

има постоянна дължина.

12. Кривата

$$y=x(x-a)^2$$

е пресечена с правата $y=m^2x$. Да се намерят тангентите в трите пресечни точки и да се определи точката, в която всяка от тези тангенти пресича дадената крива.

Да се намерят дължините на T, N, S_t и S_n на следните криви

13. $x=e^{\frac{x-y}{y}}$.

14. $y^2=2px$.

15. $x=a\cos t$, $y=b\sin t$.

16. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ (*циклоида* — черт. 60).

17. $r=a\theta$ (*архимедова спирала* — черт. 61).

18. $r=ae^{m\theta}$ (*логаритмична спирала* — черт. 62).

19. $r=a(1-\cos\theta)$ (*кардиоида* — черт. 63).

20. Да се докаже, че фамилията елипси

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2}-1=0,$$

где то λ е променлив параметър, имат при точки с общи абсциси еднакви субтангенти.

21. Да се установи, че полярната субтангента на *хиперболичната спирала* (черт. 65)

$$r\theta=a$$

е постоянна величина и да се построи тази крива.

22. Да се намери полярната субтангента на *кохлеоидата* черт. 66)

$$r=a\frac{\sin\theta}{\theta}$$

и да се построи тази крива.

23. Да се установи, че проекцията на полярната нормала на *квадратрисата* на Динострат (черт. 67):

$$r=\frac{a\theta}{\sin\theta}, \text{ или } x=y\operatorname{ctg}\frac{y}{a},$$

върху полярната ос е постоянна величина. Да се построи тази крива.

24. Нормалите на всички *конхоиди* $r=f(\theta)+b$, гдето b е променлив параметър, които са прекарани в точките, лежащи на един и същ радиус-вектор, се пресичат в една точка, лежаща на перпендикуляра на този радиус-вектор, прекаран през полюса.

25. Нормалите на всички *охлюви* на Pascal (черт. 69) $r=a\cos\theta+b$ гдето b е променлив параметър, които са прекарани в точките, лежащи на един и същ радиус-вектор, минават през диаметрално противоположната точка на пресечната точка на този радиус-вектор с окръжността, която се получава, като положим $b=0$.

26. Нормалата в една точка M на кривата C, която е геометричното място на върха M на един постоянен ъгъл, рамената на който постоянно се допират до две дадени криви C_1 и C_2, минава през пресечната точка на нормалите на тези две криви, прекарани в допирните точки на рамената на ъгъла M, с кривите (черт. 70).

27. Измежду всички n-ъгълници, описани около една затворена конвексна крива, n-ъгълникът с минимално лице притежава свойството, че всяка допирателна точка е среда на страната, към която тази точка принадлежи (черт. 71).

28. Тангентата в точка $M(x, y)$ на кривата

$$y=x^2-x^3$$

пресича същата крива в точка M_1. Да се намери геометричното място на средата на отсечката MM_1.

29. Дадена е кривата $4y^3=27ax^2$. Да се определи тангентата с ъглов коефициент, равен на m. Да се докаже, че през всяка точка минават три тангенти. Да се намери геометричното място на пресечната точка на две перпендикулярни тангенти.

30. Радиус-векторите, които минават през началото на координатната система, пресичат *строфоидата* (черт. 72)

$$y^2(2a-x)=x(x-a)^2$$

в две точки, M и M_1. Да се намери геометричното място на точката на пресичането на тангентите в M и M_1.

Да се намерят подножиците (podaires, Fusspunktkurven) на следните криви:

31. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ спрямо началото.

32. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ спрямо началото; случай $a=b$.

33. $x^2+y^2=a^2$ спрямо една точка от тази крива.

34. $y^2=2px$ спрямо: a) фокуса ѝ; b) върха ѝ.

35. $r^n=a^n\cos n\theta$ (*синусова спирала*) спрямо началото.

36. $x^3+y^3-a^3=0$ спрямо началото, $a>0$.

37. $\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ (крива на Lamé) спрямо началото.

38. $\begin{cases} x=a\cos t+at\sin t, \\ y=a\sin t-at\cos t, \end{cases}$ (*кръгова еволвента*) спрямо началото.

39. Ако M и P са две съответни точки на кривата и на подножицата спрямо дадена точка A, то тангентата в P допира описаната окръжност с диаметър AM.

40. Ако от една точка M прекараме нормалите към няколко дадени криви и означим с $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ пресечните точки на тези криви с нормалите, да се докаже, че нормалата на геометричното място на точката M, когато тя се премества по такъв начин, че да съществува равенството

$$\overline{MM_1}^2+\overline{MM_2}^2+\cdots+\overline{MM_n}^2+\cdots=\text{const},$$

минава през центъра на тежестта на точките $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$.

41. Ако в една равнина кривата C се търкаля върху друга постоянна крива C_1, последователните положения на една точка M, неизменно свързана с C, описват една нова крива, на която нормалата във всяка нейна точка минава през точката на допирането на кривите C и C_1.

42. Една точка M се премества по такъв начин, че сумата от дължините на двете нормали MN и MN', прекарани към една и съща крива или към две дадени криви, е постоянна величина. Да се докаже, че тангентата на геометричното място на точка M е бисектрисата на ъгъла на двете нормали.

43. Да се покаже, че следните чифтове криви се пресичат под прав ъгъл

a) $x^2-y^2=a^2$, $xy=b^2$;

b) $y^2=2ax+a^2$, $y^2=-2bx+b^2$;

c) $\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1$, $\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}=1$, $a>\mu>b$;

d) $r=ae^{\theta}$, $r=be^{-\theta}$;

e) $r^2=a^2\cos 2\theta$, $r^2=b^2\sin 2\theta$;

f) $r^2=\ln\operatorname{tg}\theta$, $r^2\cos 2\theta+1=0$;

g) $\begin{cases} x=\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \\ y=\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} \end{cases}$ и $y=x$.

§ 16. Изследване и построяване на равнинни криви линии

Да се изследват и начертаят следните криви:

1. $y=x^3+px^2+q$.

2. $y=(x-1)^3(5-x)^2$.

3. $y=\frac{x^3-3x+2}{(x+1)^2}$.

4. $y=\frac{2x^3-5x^2+4x-1}{2x^2-x-1}$.

5. $y=\frac{x^3-a^2x}{x^2-b^2}$, $a^2<b^2$.

6. $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

7. $y=x^n e^{-x^2}$.

8. $y=(x+a)e^{\frac{1}{x}}$.

9. $y=xe^{\frac{1}{1-x^2}}$.

10. $y=x\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

11. $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

12. $y=x+\frac{\cos x}{x}$.

13. $y=\sin^2 x$.

14. $y=\ln\frac{x-1}{2x-1}$.

15. $y^2 = xy^2 - x.$

16. $x^2y^2 = x^2 + y^2.$

17. $y^2 = x^2 + x^4.$

18. $y^2 = x^2 - x^4.$

19. $y^2 = x^3.$

20. $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c).$

21. $y^2 = x \sin^2 x.$

22. $y^2 = x^2 \sin x.$

23. $y^2(2-x) = (x^2-9)^2.$

24. $xy^2 + x^2y = 1.$

25. $y^2(2x-a) + a^2x^2 - x^4 = 0,$ $a > 0.$

26. $y^2(1-x) + 2x^2y + x^4 = 0.$

27. $(y-x^2)^2 - x^5 = 0.$

28. $y^4 - 2xy^2 + x^4 = 0.$

29. $x^3 - 3xy + y^3 = 0.$

30. $x^4 + x^2y^2 - 6ax^2y + a^2y^2 = 0.$

31. $(x-a)\,y^2 = (y-b)\,x^2,$ $b > a > 0.$

32. $y^3 + x^2 + 2y - x = 0.$

33. $x = \dfrac{at^2}{t-1}, \quad y = \dfrac{at}{t^2-1},$ $a > 0.$

34. $x = \dfrac{t^3}{1-t^2}, \quad y = \dfrac{1+t^3}{1-t^2}.$

35. $y = \dfrac{a^2-x^2}{2a \pm \sqrt{a^2-x^2}},$ $a > 0.$

36. $x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + a = 0,$ $a = 0, 1, 2.$

37. $x^3 + y^3 = 3axy$ (*декартов лист*) $a > 0.$

38. $x^5 + y^5 = 5ax^2y^2,$ $a > 0.$

39. $16(y^4 - 2ay^3 - 2a^2y^2) + (x^2 - 4a^2)^2 = 0,$ $a > 0.$

40. $x^4 = (x^2 - y^2)\,y.$

41. $2y^3x - y^4 - x(y-x)^2 = 0.$

42. $(x^2-1)^2 = y^2(2y+3).$

43. $x^4 + y^4 - 3x^2y - 2x^2y^2 + y^3 = 0.$

44. $r = a(2 + \cos 2\theta).$

45. $r = a(1 + \cos 3\theta).$

46. $r = \dfrac{\theta}{\theta - \alpha},$ $\alpha > 1.$

47. $r = \dfrac{\theta}{\theta^2 - 1}.$

48. $r = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$ (*строфоида*, зад. 30, § 15).

49. $r = \dfrac{1}{\cos\theta \cos 2\theta}.$

50. $r^2 = a^2 \dfrac{\sin 3\theta}{\cos\theta}.$

51. Една отсечка с дължина l се хлъзга по две правоъгълни оси Ox, Oy и нека P е една постоянна точка от бисектрисата на ъгъла xOy (черт. 131). Да се изследва геометричното място на проекцията на точката P върху хлъзгащата се отсечка. Това геометрично място е една крива, наречена *майски бръмбар (scarabée).*

§ 17. Обвивки на равнинни криви линии

1. Да се намери обвивката на фамилията прави

$$y = \alpha x + \frac{p}{2\alpha},$$

гдето α е променлив параметър.

2. Същото за

$$(x-\alpha)^2 + y^2 = \beta^2,$$

гдето α и β са свързани с релацията $\beta^2 = 4m\alpha$.

3. Същото за

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1,$$

гдето между α и β съществува следната връзка:

a) $\alpha + \beta = k$;

b) $\alpha^2 + \beta^2 = k^2$;

c) $\alpha\beta = k^2$.

4. Да се намери обвивката на фамилията прави, получени от хлъзгането на една отсечка с дължина a по две взаимно перпендикулярни прави.

5. Един прав ъгъл се движи по такъв начин, че едното му рамо минава през една постоянна точка, а върхът му лежи постоянно върху дадена права линия. Да се намери обвивката на второто рамо.

6. Да се намери обвивката на височината през върха B на един триъгълник, който има постоянен връх A и едната му страна BC — с постоянна дължина, се хлъзга по една права.

7. Дадени са двете параболи

$$y^2=2px \quad \text{и} \quad y^2=-2qx.$$

Първата се мести транслационно по такъв начин, че върхът ѝ описва постоянно втората парабола. Да се намери обвивката на така движещата се парабола. Да се изследва случаят, когато $p=q$.

8. Да се намери обвивката на една права, която отсича от координатните оси триъгълник с постоянно лице.

9. Дадени са в равнината на един ъгъл AOB две постоянни точки A и B и две точки M и N, които се движат по такъв начин, че да имаме постоянно равенството

$$\overline{OM}.\overline{ON}=\overline{MA}.\overline{NB}.$$

Да се намери обвивката на фамилията прави MN.

10. Да се намери обвивката на фамилията окръжности, които имат за диаметри хордите на параболата

$$y^2=2px,$$

които са перпендикулярни на оста x.

11. Да се намери обвивката на фамилията криви

$$y^4-y^2+(x-\alpha)^2=0,$$

гдето α е променлив параметър.

12. Да се намери обвивката на фамилията прави, на които произведението на разстоянията до две постоянни точки е постоянна величина.

13. Да се намери обвивката на правата, която съединява краищата на два спрегнати диаметъра на елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

14. Да се намери обвивката на правата, която съединява проекциите на произволна точка от една елипса върху главните ѝ оси.

15. Да се намери обвивката на правата, която съединява проекциите на една произволна точка от параболата $y^2=2px$ върху оста x и върховата ѝ тангента.

16. Да се намери обвивката на правата, която отсича от двете климогонални координатни оси триъгълник с постоянен периметър.

17. В една елипса вписваме всички триъгълници $MM'M''$, които имат центъра на елипсата за център на тежестта. Да се намери обвивката на описаните около тях окръжности.

18. От една точка P на строфоидата

$$y=x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

да прекараме две тангенти към нея и да означим с T и T' допирните им точки. Да се докаже, че обвивката на хордата TT' е параболата, която има за връх началото на координатната система.

19. Една точка описва конично сечение C. Да се намери обвивката на полярите на тази точка спрямо коничното сечение

$$px^2+2qxy+ry^2=1.$$

20. Да се намеря *каустиката на отражението* на светлинните лъчи, падащи върху параболата $y^2=2px+p^2$ перпендикулярно на нейната ос.

21. Да се намери каустиката на отражението на светлинните лъчи, падащи върху окръжността $x^2+y^2-r^2=0$ успоредно на оста x.

22. Да се намери каустиката на отражението на снопа лъчи с център $(a, 0)$, който пада върху окръжността $x^2+y^2-r^2=0$.

23. Същото за снопа с център $(a, 0)$ и параболата $y^2=2px$.

24. Да се намеря *каустиката на пречупването* на снопа светлинни лъчи, падащ върху една права g.

25. Върху кривата $y=f(x)$ лежи точката P с координати $OQ=\xi$, $OR=\eta$. Да се намери обвивката на правата QR, когато P описва дадената крива.

26. *Парабола на сигурността.* Да се намери обвивката на всички параболични траектории на една тежка материална точка, която е хвърлена (изстреляна) от началото на координатната система с една и съща скорост v_0, но с различни начални ъгли (съпротивлението на въздуха не се взема пред вид).

§ 18. Радиус на кривината и еволюта. Допиране и оскулация

Да се намерят радиусите на кривината на следните криви:

1. $y^2=4ax$.
2. $y=-ae^{-\frac{x}{a}}$.
3. $r=a(1-\cos\theta)$.
4. $r=a\sec^2\frac{\theta}{2}$.

Да се намерят радиусите на кривината и еволютите на следните криви:

5. $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ *(верижка).*

6. $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ *(цисоида).*

7. $xy = 1$ *(равнораменна хипербола).*

8. $y = ae^{\frac{x}{a}}$ *(логаритмична крива).*

9. $3ay^2 = x^3$ *(семикубична парабола).*

10. $y + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 0$ *(трактриса).*

11. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ *(астроида).*

12. $x = a\cos t,\quad y = b\sin t$ *(елипса).*

13. $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$ *(циклоида)*

14. $\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos\frac{a+b}{b}t, \\ y = (a+b)\sin t - b\sin\frac{a+b}{b}t \end{cases}$ *(епициклоида).*

15. $r = e^{a\theta}$ *(логаритмична спирала).*

16. $r = a(1 + \cos\theta)$ *(кардиоида).*

17. $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$ *(лемниската на Bernoulli).*

18. Да се докаже, че радиусът на кривината на едно централно конично сечение е обратно пропорционален на куба от разстоянието на центъра до тангентата му.

19. Ако $OM = r$ е разстоянието на началото O на координатната система до една точка M на една крива, p — разстоянието от началото O до тангентата в M, α — ъгълът, който сключва тази тангента с оста x, ds — елементът на дъгата и R — радиусът на кривината, да се докаже, че

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = p + \frac{d^2p}{d\alpha^2} = r\frac{dr}{dp}.$$

20. Когато ъгълът φ между радиус-вектора и перпендикуляра, спуснат от началото към тангентата на една крива, приема максимална или минимална стойност, да се докаже, че съществува равенството

$$pR = r^2.$$

21. От една произволна точка T на тангентата, прекарана в точка M на една елипса, спускаме перпендикуляри върху поларата на точката T и диаметъра OM. Да се докаже, че тези перпендикуляри отсичат от нормалата в точка M един сегмент, равен на радиуса на кривината.

22. Ако от някакъв източник на светлина спуснем перпендикуляр LP върху една произволна тангента на кривата на отражението и продължим този перпендикуляр до точката Q, така че $QP = LP$, да се докаже, че каустиката на отражението е еволюта на геометричното място на Q.

23. Като се има пред вид предната теорема, да се намерят каустиките на отражението на следните криви:

a) една логаритмична спирала, за която източникът на светлината е в нейния полюс;

b) една равнораменна хипербола, за която източникът на светлината е в нейния център;

c) една окръжност, за която източникът на светлината лежи върху тази окръжност.

24. Да се докаже, че окръжността

$$\left(x - \frac{3a}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

и параболата

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$$

имат допиране от трети ред в точката $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$.

25. Да се намерят две параболи, осите на които са успоредни на координатните оси и които оскулират окръжността

$$x^2 + y^2 = 5a^2$$

в точката $(a, 2a)$.

26. Да се намери уравнението на параболата, която с циклоидата

$$x = a(\varphi - \sin\varphi),\quad y = a(1 - \cos\varphi)$$

в точката $\varphi = \pi$ има допиране от 3-ти ред.

27. Да се намери уравнението на параболата, която оскулира елипсата

$$x = a\cos t,\quad y = b\sin t$$

в точката: 1° $t = \frac{1}{2}\pi$ и 2° $t = 0$.

28. Да се намери такава парабола, оста на която е успоредна на оста y и която в точката $P(a, a)$ има допиране от най-висок ред с кривата

$$a^2y = x^3.$$

29. Да се докаже, че оскулачната окръжност на една крива и самата крива имат допиране от 3-ти ред в онези точки, в които радиусът на кривината е максимум или минимум и обратно.

30. Да се намерят такива точки върху елипсата

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

в които допирането с нейните оскулачни окръжности е най-малко от 3-ти ред.

31. Да се намери геометричното място на центровете на елипсите, които имат в дадена точка допиране от 3-ти ред с дадена крива.

32. Да се намери геометричното място на центровете на равнораменните хиперболи, които имат в дадена точка допиране от 2-ри ред с дадена крива.

33. Да се намери геометричното място на фокусите на параболите, които имат в дадена точка допиране от 2-ри ред с дадена крива.

34. Да се докаже, че оскулачните окръжности в две безкрайно близки точки на една крива не се пресичат.

35. Да се докаже, че елипсата е единствената крива от втора степен, която има допиране от 4-ти ред с циклоидата.

§ 19. Пространствени криви

Да се намерят уравненията на тангентите в точката $M(x, y, z)$ на следните криви:

$$\begin{cases} y^2=ax-x^2,\\ z^2=a^2-ax.\end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\\[2mm] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

3. Да се намерят тези точки от кривата

$$\begin{cases} x+z=a,\\ x^2+y^2+z^2=a^2,\end{cases}$$

в които тангентата сключва с оста z даден ъгъл γ.

4. Да се намерят уравненията на тангентата, нормалната и оскулачната равнина на кривата

$$\begin{cases} x^2+y^2=a^2,\\ y^2+z^2=b^2.\end{cases}$$

5. Да се намерят уравненията на тангентата и нормалната равнина на кривата

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2,\\[1mm] \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

6. Да се намерят уравненията на тангентата, нормалата и оскулачната равнина и радиусът на кривината на кривата

$$\begin{cases} x^2=2az,\\ y^2=2bz.\end{cases}$$

7. Да се намерят уравненията на тангентата, оскулачната равнина, радиусът на кривината и торзията на кривата

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2}{2a},\\[2mm] z=\dfrac{x^3}{6a^2}.\end{cases}$$

8. За витловата линия

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}\cos t\,\boldsymbol{i}+a\sin t\,\boldsymbol{j}+bt\,\boldsymbol{k},$$

да се докаже:

a) тангентата на витловата линия сключва постоянен ъгъл с равнината xy;

b) радиусът на кривината е постоянен;

c) радиусът на торзията е постоянен;

d) геометричното място на центъра на кривината е също витлова линия.

Да се изследват следните криви:

9. $\boldsymbol{r}=\sin t\,\boldsymbol{i}+\dfrac{1}{2}\sin^2 t\,\boldsymbol{j}+\dfrac{1}{2}(t-\sin t\cos t)\,\boldsymbol{k}.$

10. $\boldsymbol{r}=\cos t\,\boldsymbol{i}+\sin t\,\boldsymbol{j}+\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}\,\boldsymbol{k}.$

11. Да се докаже, че оскулачната равнина на една равнинна крива съвпада с равнината на кривата и обратно, ако оскулачната равнина е постоянна или успоредна на дадена равнина, то кривата е равнинна.

12. През всяка точка от витловата линия прекарваме права, успоредна на тангентата в дадена точка на витловата линия. Да се намери геометричното място на пробода на тази права с равнината xy.

13. Ако M е точка от една крива C, M_1 — съответната точка от кривата C_1, която е геометрично място на центъра на кривината на C, да се намерят ъглите, които тангентата в точка M_1 сключва с тангентата, главната нормала и оскулачната равнина в точката M.

14. Да се покаже, че равнината

$$\alpha \equiv x + 2y - z - 2 = 0$$

пресича кубичната крива

$$\boldsymbol{r} = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}$$

в точките M_1, M_2, M_3, оскулачните равнини на които се пресичат в една точка от дадената равнина α.

15. Да се докаже, че всяка пространствена линия, на която кривината е постоянно нула, е права линия.

16. Ако във всяка точка на една крива торзията е нула, тази крива е равнинна.

17. Нека $s = \widehat{MM'}$ е една безкрайно малка дъга от една пространствена крива. Да се докаже, че разликата $s - d$, където d е дължината на хордата MM', е безкрайно малка от трети ред спрямо s и главната и стойност е $\dfrac{s^3}{24R}$.

18. Да се докаже, че оста на две безкрайно близки тангенти е безкрайно малка от 3-ти ред спрямо s и главната ѝ стойност е $\dfrac{s^3}{12RT}$. В стационерните точки оста е безкрайно малка от 4-ти ред.

19. Ако една крива е представена във вида

$$x = f(s),\ y = \varphi(s),\ z = \psi(s),$$

да се докажат зависимостите:

(1) $$f'f'' + \varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0,$$

(2) $$f''^2 + \varphi''^2 + \psi''^2 = \frac{1}{R^2},$$

(3) $$f''f''' + \varphi''\varphi''' + \psi''\psi''' = -\frac{R'}{R^3},$$

(4) $$\Delta = (\varphi'\psi'' - \psi'\varphi'')f''' + (\psi'f'' - f'\psi'')\varphi''' + (f'\varphi'' - \varphi'f'')\psi''' = \frac{1}{R^2T},$$

(5) $$f'''^2 + \varphi'''^2 + \psi'''^2 = \frac{1}{R^2T^2} + \frac{1 + R'^2}{R^4}.$$

20. Да се докаже, че кривата

$$\begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 6t^3 \end{cases}$$

е витлова линия.

21. Да се намерят еволвентите на кривата

$$\begin{cases} y = x^2, \\ z = \dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

22. Дадени са две безкрайно близки точки M и M' от една пространствена крива. Да се намери главната стойност на най-късото разстояние (оста) на главните нормали в тези две точки и граничното положение на пресечната точка на оста с една от главните нормали.

23. Да се покаже, че нормалните вектори на една крива линия не могат да бъдат успоредни помежду си във всички точки.

24. Да се докаже, че

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} \cdot \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\frac{T}{R}.$$

25. Да се намери вектор $\boldsymbol{x}$, който удовлетворява равенствата

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t},\quad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{n},\quad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{b}.$$

26. Да се докажат равенствата

$$\left(\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\,\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}\,\frac{d^3\boldsymbol{t}}{ds^3}\right) = \frac{1}{R^6}\,\frac{d\dfrac{R}{T}}{ds},$$

$$\left(\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}\,\frac{d^2\boldsymbol{b}}{ds^2}\,\frac{d^3\boldsymbol{b}}{ds^3}\right) = \frac{1}{T^6}\,\frac{d\dfrac{T}{R}}{ds}.$$

27. Да се докаже, че необходимото и достатъчно условие една крива да сключва във всяка точка постоянен ъгъл с дадена посока е

$$\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}\,\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}\,\frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}\right) = 0.$$

§ 20. Координатни линии на повърхнина и на пространството. Координатни повърхнини. Линеен, лицев и обемен елемент

Да се изследват координатните линии и да се намерят линейният и лицевият елемент на повърхнините:

1. $\boldsymbol{r} = u\cos v\,\boldsymbol{i} + u\sin v\,\boldsymbol{j} + \sqrt{a^2 - u^2}\,\boldsymbol{k}$ (полусфера),

където $0 \leqq u \leqq a$, $0 \leqq v < 2\pi$.

2. $\boldsymbol{r}=u\cos v\,\boldsymbol{i}+u\sin v\,\boldsymbol{j}+cv\,\boldsymbol{k}$ (витлов коноид)*.

3. $\boldsymbol{r}=uv\cos v\,\boldsymbol{i}+uv\sin v\,\boldsymbol{j}+cv\,\boldsymbol{k}$ (витлов коноид).

4. $\boldsymbol{r}=u\cos v\,\boldsymbol{i}+u\sin v\,\boldsymbol{j}+f(u)\,\boldsymbol{k}$ (ротационна повърхнина с ос z).

5. $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\quad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq 0)$ (равнина).

6. $\boldsymbol{r}=u\cos v\,\boldsymbol{i}+u\sin v\,\boldsymbol{j}+\varphi(v)\,\boldsymbol{k}$.

7. $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+f(x,y)\,\boldsymbol{k}$.

Да се изследват координатните повърхнини и да се намерят обемните елементи на пространството, дадено със следните аналитични представяния:

8. $\boldsymbol{r}=r\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\theta\,\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ (цилиндрични координати).

9. $\boldsymbol{r}=r\sin\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{j}+r\cos\lambda\,\boldsymbol{k}$ (сферични координати)

10. $\boldsymbol{r}=u\boldsymbol{a}+v\boldsymbol{b}+w\boldsymbol{c}$ $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})\neq 0$.

11. Пространството е разделено с една фамилия от кръгови цилиндри, от един сноп равнини и от една фамилия от витлови повърхнини с височина на завъртването h, които имат една и съща ос, например оста z. Да се намери аналитичният израз на представяне на пространството и обемният елемент.

12. Да се намери аналитичното представяне и обемният елемент на пространството, разделено от сноп равнини, една фамилия кръгови конуси с връх в началото на координатната система и една фамилия от витлови повърхнини с височина на завъртването h; и трите фамилии имат оста z за обща ос.

13. Същото за пространството, разделено от сноп равнини с ос оста z, фамилията коаксиални кръгови цилиндри със същата ос и фамилията ротационни параболоиди

$$z-w=w(x^2+y^2).$$

14. Същото за пространството, разделено от двата снопа равнини с оси оста x и оста y и една фамилия кръгови цилиндри с ос оста z.

15. Същото за пространството, разделено от фамилните повърхнини

$$x^2+y^2+(z-u)^2=u^2,$$
$$z=v,$$
$$x=y\operatorname{tg}w.$$

* Геометричното място на права, която пресича постоянно дадена права и дадена крива и остава успоредна на дадена равнина, се нарича коноида повърхнина или коноид.

16. Пространството е разделено с повърхнините

$$y^2-z^2=u,\quad y^2+z^2=vx,\quad y+z=w.$$

Да се намерят линейните координати в точката $(4,-1,5)$ и обемният елемент.

17. Пространството е разделено с повърхнините

$$z^2=4w^2(x^2+y^2),\quad x=\sqrt{uz},\quad y=\sqrt{vz}.$$

Да се намерят линейните координати в точката $(3,-4,-6)$ и обемният елемент.

18. Да се намери линейният и обемният елемент на пространството с елиптични координати

$$x^2=\frac{(\alpha-u)(\alpha-v)(\alpha-w)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},$$

$$y^2=\frac{(\beta-u)(\beta-v)(\beta-w)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},$$

$$z^2=\frac{(\gamma-u)(\gamma-v)(\gamma-w)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

19. Верижката $y=c\operatorname{ch}\dfrac{x}{c}$ се върти около оста x. Повърхнината, получена от въртенето, представлява катеноид, в който дължината на дъгата на меридиана вземаме за параметър u и географската дължина за параметър v. Да се покаже, че линейният елемент съвпада с този на витловата повърхнина.

§ 21. Повърхнини. Допирателна равнина, нормала, главни радиуси на кривината, омбилици

Да се намерят уравненията на допирателната равнина и нормалата на следните повърхнини:

1. $\boldsymbol{r}=\sin\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{j}+\cos\lambda\,\boldsymbol{k}$.

2. $x^2z^2+a^2y^2-r^2x^2=0$.

3. $az=\left(\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$.

4. $\boldsymbol{r}=(u+v)\,\boldsymbol{i}+(u^2+v^2)\,\boldsymbol{j}+(u^3+v^3)\,\boldsymbol{k}$ в точката $(2,\ 2,\ 2)$.

5. Да се прекара допирателна равнина към повърхнината $xyz=1$, успоредна на кривината $x+y+z-3=0$.

6. Да се намери пресечницата на допирателната равнина на повърхнината

$$(a^2-z^2)\,x^2-b^2y^2=0$$

със самата повърхнина.

7. Да се намери геометричното място на проекцията на центъра на елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \tag{1}$$

върху допирателната му равнина *(подножица)*.

8. Да се намери разстоянието от началото до допирателната равнина на витловия коноид

$$\boldsymbol{r}=u\cos v\,\boldsymbol{i}+u\sin v\,\boldsymbol{j}+cv\,\boldsymbol{k}.$$

9. Същото за центъра на повърхнината

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=(x^2+y^2+z^2)^2$$

и допирателната ѝ равнина.

10. Същото за началото и повърхнината

$$x\cos\frac{z}{k}-y\sin\frac{z}{k}=0.$$

11. Да се докаже, че допирателните равнини на повърхнините

$$\boldsymbol{r}=x\,\boldsymbol{i}+y\,\boldsymbol{j}+xf\left(\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{k},$$

където $f\left(\frac{y}{x}\right)$ е произволна функция на $\frac{y}{x}$, минават през една и съща точка.

12. Да се намери геометричното място на допирателната точка на тангенциалната равнина на повърхнината

$$x^2+y^2=2c\,(z-c),$$

която равнина минава през началото; c е променлив параметър.

13. Да се намери уравнението на конуса, описан около повърхнината $f(x,\,y,\,z)=0$ и с връх точката $A(a,\,b,\,c)$. Приложение за сферата

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

и точката $A\,(a,\,0,\,0)$.

14. Да се докаже, че допирателната равнина на повърхнината

$$y-nz=\varphi(x-mz)$$

е успоредна на правата

$$y=nz,\quad x=mz.$$

15. Да се докаже, че трите повърхнини

$$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{p^2-h^2}+\frac{z^2}{p^2-k^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{x^2}{q^2}+\frac{y^2}{q^2-h^2}+\frac{z^2}{q^2-k^2}=1, \tag{2}$$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2-h^2}+\frac{z^2}{r^2-k^2}=1 \tag{3}$$

образуват една тройно ортогонална система.

16. Да се докаже, че нормалите на една ротационна повърхнина, прекарани в различни точки на един и същ паралел, се пресичат в една и съща точка, лежаща на оста на въртенето.

17. Да се докаже, че нормалата в една точка на подножицата на една повърхнина спрямо началото на координатната система минава през средата на радиус-вектора, който съединява началото със съответната точка от дадената повърхнина.

18. От точка M на повърхнината

$$\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\,\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\,\boldsymbol{j}+\sqrt{-r^2+f(re^{\varphi})}\,\boldsymbol{k}$$

е прекарана нормала MN до точката N от равнината (xy) и спуснат перпендикуляр MP до същата равнина. Да се докаже, че ъгълът $\widehat{NOP}$, където O е началото на координатната система, е $\frac{\pi}{4}$.

19. Дадена е една крива, която среща всички образуващи на една праволинейна повърхнина, и то така, че косинус-директорите на всяка образуваща в точката, гдето тя пресича кривата, са функции на координатите на тази точка. Да се намери:

1°. Граничното направление на оста между две безкрайно близки образуващи.

2°. Границата на отношението $\frac{\delta}{\nu}$, гдето δ е най-късото разстояние и ν — ъгълът между тези образуващи.

3°. Граничното положение (*централна* точка) на пресечната точка на едната образуваща с оста, която е определена от тази права, и другата безкрайно близка образуваща.

20. В повърхнините, за които δ е безкрайно малко от по-висок ред от ν (зад. 19), тангенциалната равнина в една точка е допирателна по цялата дължина на образуващата, която минава през тази точка (*развиваема* повърхнина).

21. Всяка развиваема повърхнина (зад. 20) може да се разглежда като геометрично място на тангентите на една пространствена крива и обратно.

22. Допирателните равнини на една развиваема повърхнина са също оскулачни равнини на ръба на възвръщането (зад. 21).

23. Да се докаже, че тангентите на меридианите и паралелите на една сфера са перпендикулярни.

24. Същото за координатните линии на повърхнината

$$x^2 = \frac{a(a-u)(a-v)}{(b-a)(c-a)},$$

$$y^2 = \frac{b(b-u)(b-v)}{(a-b)(c-b)},$$

$$z^2 = \frac{c(c-u)(c-v)}{(b-c)(a-c)}.$$

25. Да се намерят главните радиуси на кривината на повърхнината от втора степен.

26. Да се намерят главните радиуси на кривината на повърхнината

$$xyz = m^3.$$

Да се намерят омбилиците на следните повърхнини:

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\quad (a > b > c).$

28. $z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 0$ $\quad (b > a).$

29. $xyz - m^3 = 0.$

Да се намерят средната и Gauss'овата кривина и омбиличните точки за повърхнините:

30. $\boldsymbol{r} = a \sin\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{i} + a \sin\lambda \sin\theta\, \boldsymbol{j} + a \cos\lambda\, \boldsymbol{k}.$

31. $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}.$

32. 1°. Да се докаже, че във всяка точка M от една повърхнина S има изобщо ∞^1 кръгове, които имат контакт от 3-ти ред с S.

2°. През всяка тангента на повърхнината в точката M минава равнината само на един от тези кръгове.

3°. Ако точката M не е омбилик, има десет кръга, които имат в точката M контакт от 4-ти ред с повърхнината.

§ 22. Обвивки на повърхнини

1. Да се намери обвивката на фамилията равнини

$$\frac{z}{c} = \frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi, \tag{1}$$

където φ е променлив параметър.

2. Да се намери обвивката на фамилията равнини

$$ax - y + bz - a^2 b = 0,$$

ако: 1° a е константа и b параметър;

2° a е параметър и b константа;

3° a и b са параметри;

4° $ab^2 = k$. В този случай да се определи ръбът на възвръщането на обвивката и геометричното място на този ръб, когато k е променлив параметър.

3. Да се намери обвивката на една равнина, която загражда с координатните равнини постоянен обем.

4. Да се намери обвивката на повърхнината

$$\frac{x^m}{\alpha^m} + \frac{y^m}{\beta^m} + \frac{z^m}{\gamma^m} = 1,$$

ако

$$\frac{\alpha^p}{a^p} + \frac{\beta^p}{b^p} + \frac{\gamma^p}{c^p} = 1,$$

където a, b, c са константи, а α, β, γ — променливи параметри.

5. Да се намери обвивката на сфера, която минава през началото и центърът на която описва параболата

$$z = 0, \quad y^2 - 2px - p^2 = 0.$$

6. Да се намери обвивката на полярната равнина на една точка M от елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

спрямо сферата

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

7. Да се намери обвивката на оскулачната равнина на кривата

$$x = t, \quad x = t^2, \quad z = t^3.$$

8. Дадени са две параболи с една и съща ос, един и същ връх и които лежат в две перпендикулярни равнини. Да се намери обвивката на променливата равнина, която остава допирателна до двете параболи.

9. Да се намери обвивката на фамилията сфери, които имат за голям кръг един кръг, начертан върху даден параболоид.

10. Да се намери обвивката на фамилията сфери, които секат даден елипсоид в два еднакви кръга.

11. Даден е един параболоид. Да се намери обвивката на фамилията равнини, поляри на точките от една сфера, на която центърът лежи върху оста на параболоида, спрямо дадения параболоид.

12. Да се намери обвивката на фамилията равнини, които с един ран кръгов конус образуват конуси с даден обем.

13. Да се намери обвивката на фамилията равнини, които минават рез краищата на трите конюговани диаметри на един елипсоид.

14. Да се намери обвивката на сфера, центърът на която описва на окръжност.

15. Един елипсоид е пресечен с една равнина. Да се намери обвивта на допирателните равнини, прекарани през точките на кривата на чението към повърхнината.

16. Да се намери обвивката на фамилията равнини

$$lx+my+nz=p,$$

о променливите параметри l, m, n са свързани с уравненията

$$l^2+m^2+n^2=1,$$

$$\frac{l^2}{p^2-a^2}+\frac{m^2}{p^2-b^2}+\frac{n^2}{p^2-c^2}=0,$$

цето a, b, c са константи.

17. Да се намери обвивката на една равнина, която се допира до ве сфери.

18. Да се намери обвивката на нормалните равнини на една сфечна елипса.

РЕШЕНИЯ

ВЪВЕДЕНИЕ

§ 1. Обратни функции. Обратни кръгови (циклометрични) функции

Основни указания

Обратна функция. Ако в уравнението $y=f(x)$ разменим местата на x и y, полученото уравнение $x=f(y)$ дефинира неявно обратната функция $y=g(x)$ на $f(x)$.

За правата и обратната функция съществува тъждеството

$$x=f[g(x)], \tag{1}$$

т. е. правото действие f и обратното g взаимно се унищожават.

1. Заменяваме x с y:

$$x=\frac{1}{2}y\pm\sqrt{\frac{1}{4}y^2-1}.$$

След като прехвърлим $\frac{1}{2}y$ от лявата страна, рационализираме уравнението, отгдето получаваме търсената функция

$$y=x+\frac{1}{x}.$$

2. $y=-\frac{x}{(1+x)^2}$.

3. $y=\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$.

4. В уравнението

$$x=\sqrt[3]{y+\sqrt{1+y^2}}+\sqrt[3]{y-\sqrt{1+y^2}}$$

полагаме

$$a=\sqrt[3]{y+\sqrt{1+y^2}},\quad b=\sqrt[3]{y-\sqrt{1+y^2}}$$

и повдигаме двете страни на равенството на 3-та степен:

$$x^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

или

$$x^3=a^3+a^3+3abx.$$

Оттук, като заместим a и b с техните равни, добиваме

$$x^3 = 2y - 3x,$$

отгдето

$$y = \frac{1}{2}(x^3 + 3x).$$

5. $y = x^5 - 5px^3 + 5p^2x$. Прилага се формулата на Нютон.

6. Доказателството следва непосредствено от дефиницията за обратни функции, а именно

$$y = f[\varphi(y)].$$

Доказателството може да се извърши още така:

Полагаме

$$\sin(\operatorname{arc}\sin x) = \alpha,$$

или като обърнем равенството, получаваме

$$\operatorname{arc}\sin x = \operatorname{arc}\sin \alpha,$$

отгдето следва, че $\alpha = x$.

Аналогично се доказва и второто равенство.

8. Представяме лявата страна на равенството във вида

$$\sqrt{1 - [\cos(\operatorname{arc}\cos x)]^2}.$$

Като вземем пред вид равенство (1), горният израз се обръща в

$$\sqrt{1 - x^2}, \qquad \text{к. т. д. д.}$$

9. I начин. Взимаме синус от двете страни на равенството и получаваме

$$\sin[\operatorname{arc}\sin(\cos x)] = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

отгдето, като вземем пред вид (1), имаме тъждеството

$$\cos x \equiv \cos x, \qquad \text{к. т. д. д.}$$

II начин. Равенството написваме във вида

$$\operatorname{arc}\sin\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \frac{\pi}{2} - x$$

което въз основа на (1) е тъждество:

$$\frac{\pi}{2} - x \equiv \frac{\pi}{2} - x.$$

11. Полагаме

$$\operatorname{arc}\sin x = \alpha, \quad \text{или} \quad \sin\alpha = x,$$

$$\operatorname{arc}\cos x = \beta, \quad \text{или} \quad \cos\beta = x.$$

Като заместим тези стойности в даденото равенство, получаваме

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

или

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$

Последното равенство ни дава

$$\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = xx + \sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - x^2} \equiv 1, \qquad \text{к. т. д. д.}$$

14. Изхожда се от формулата

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

отгдето

$$\alpha \pm \beta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Ако в това тъждество положим $\alpha = \operatorname{arc}\operatorname{tg} x$, $\beta = \operatorname{arc}\operatorname{tg} y$, получаваме веднага търсеното равенство.

19. Взема се пред вид, че

$$5\operatorname{arc}\sin\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

20. Във формулата

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sin z}$$

полагаме

$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}.$$

Тогава получаваме

$$\sin\left(\frac{u}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)},$$

или

$$\sin\left(\frac{u}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 - 2\sin u}}.$$

Заместваме $\sin u = x$ в последното равенство:

$$\sin\left(\frac{\arcsin x}{4}+\frac{\pi}{8}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}},$$

или

$$\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\arcsin x.$$

22. Полагаме $x=\sin z$. Тогава

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+\sin z}{1-\sin z}}=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}+z\right)}}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{z}{2}.$$

Като заместим в това равенство z с $\arcsin x$, получаваме искания резултат:

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{\pi}{4}+\frac{\arcsin x}{2}.$$

23. Като положим $x=\sin z$, получаваме

$$\arccos\frac{\sin z+\sqrt{1-\sin^2 z}}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{\sin z+\cos z}{\sqrt{2}}.$$

Като вземем пред вид, че $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, горният израз се обръща във вида

$$\arccos\left(\cos z\,.\cos\frac{\pi}{4}+\sin z\sin\frac{\pi}{4}\right)=\arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)\right]=\frac{\pi}{4}-z.$$

В последния преобразуван израз заместваме z с $\arcsin x$ и получаваме търсения резултат

$$\frac{\pi}{4}-\arcsin x.$$

24. $\frac{\arcsin x}{2}$.

25. Полагаме $x=\operatorname{tg} z$. Тогава изразът добива вида

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1-\operatorname{tg} z}{1+\operatorname{tg} z},\ \text{или}\ \operatorname{arc\,tg}\frac{\cos z-\sin z}{\cos z+\sin z}.$$

Последният израз може да се напише още така:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos z+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin z},$$

или като вземем пред вид $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, този израз получава следния вид:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos z-\cos\frac{\pi}{4}\sin z}{\cos\frac{\pi}{4}\cos z+\sin\frac{\pi}{4}\sin z}=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-z\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-z\right)}=\frac{\pi}{4}-z.$$

Заместваме z с $\operatorname{arc\,tg} x$ и добиваме търсения резултат:

$$\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} x.$$

26. $\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} x$.

27. $2\operatorname{arc\,tg} x$.

28. Като имаме пред вид зад. 14, даденото уравнение се замества с

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{x^2}=\frac{\pi}{12},$$

отгдето

$$x^2=\frac{2}{2-\sqrt{3}},\ \text{или}\ x_{1,2}=\pm(1+\sqrt{3}).$$

29. $x_{1,2}=-\sqrt{3}\pm\sqrt{20}$.

30. $x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

31. $x_{1,2}=\pm\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{15}}{4}+k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$.

32. $x_{1,2}=\pm ab$.

33. Дадените уравнения могат да се заместят със следните:

$$\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2ax-a^2}}{x}\right)=\sin\left(\arcsin\sqrt{1-\frac{b^2}{y^2}}\right),$$

$$\cos\left[\arccos\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\right]=\cos\left(2\arccos\sqrt{\frac{y}{b}}\right).$$

или

$$\frac{2ax-a^2}{x^2}=1-\frac{b^2}{y^2}, \quad \frac{y}{b}-\frac{x}{a}=1.$$

Корените на тази система уравнения са

$$x_{1,2,3,4}=\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}}\;a, \quad y_{1,2,3,4}=\left(1\pm\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}\right)b.$$

От всички значения само тези, които отговарят на знака + пред големите корени, са решения на дадената система.

34. $x=-1,\ y=1.$

35. $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$

§ 2. Граници и редици

Основни граници

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^n}=\infty \qquad (a>1,\quad n>0).$

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n\ln x}{x^n}=0 \qquad (n>0).$

g) $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0 \qquad (n>0)$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \qquad (n>0,\ \text{цяло}).$

1. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^3-2x^2-x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)-3(x-2)}{x^2(x-2)-(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x^2-1)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x^2-1}=-\frac{1}{3}.$$

2. $$\lim_{x\to a}\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{2x^3-3ax^2+a^3}=\lim_{x\to a}\frac{x^2(x-a)-a^2(x-a)}{2x^2(x-a)-(x^2-a^2)a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^2(x+a)}{(x-a)(2x^2-ax-a^2)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(2x+a)}=\frac{2}{3}.$$

3. $\frac{1}{4}.$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}=0.$

5. $\frac{a+b}{2}.$

6. Даденият израз може да се напише още така:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}}-\sqrt{1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{1+\frac{x}{a}}-\sqrt{1-\frac{x}{a}}}.$$

Като развием радикалите в редове, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{a}\,\frac{1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)-\cdots-1-\frac{1}{2}\left(-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}\right)+\cdots}{1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}-\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{x^2}{2!\,a^2}+\cdots-1+\frac{1}{2}\frac{x}{a}+\frac{1}{2\cdot 2}\frac{x^2}{2!\,a^2}+\cdots}$$

$$=\lim_{x\to 0}\sqrt{a}\,\frac{\frac{1}{a}+Mx}{\frac{1}{a}+Nx}=\sqrt{a},$$

където M и N са крайни числа за $x=0$.

Границата може да се намери непосредствено, като дадения израз едновременно умножим и разделим с

$$\sqrt{a^2+ax+x^2}+\sqrt{a^2-ax+x^2},$$
$$\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x},$$

отгдето получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x})}{2x(\sqrt{a^2+ax+x^2}+\sqrt{a^2-ax+x^2})}=\sqrt{a}.$$

7. $-\frac{1}{6}$. — Радикалите се развиват в степенни редове.

8. $\cos a$. — Взема се пред вид, че

$$\sin x - \sin a = 2\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}.$$

9. $\sqrt{2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x) = \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+a\sin x)^{\frac{1}{a\sin x}}\right]^{a} = \ln e^{a} = a.$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\ln(1-x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}{\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-1}} = \frac{1}{-1} = -1.$

12. $e^{\frac{a}{b}}$.

13. $\frac{1}{9}$. — Полага се $x = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

14. -1.

15. $a-b$.

16. Полагаме

$$\operatorname{arc\,cos}(1-x) = \alpha, \text{ или } x = 1-\cos\alpha.$$

Тогава

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arc\,cos}(1-x)}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{2}.$$

17. 1.

18. 1.

19. e^{a}.

20. Полагаме

$$b_n = n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right), \text{ или } \sqrt[n]{a_n} = \frac{b_n+n}{n},$$

или още

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b_n}{n}\right)^n = e^b.$$

Като логаритмуваме това равенство, получаваме

$$b = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a_n}-1\right) = \ln a.$$

21. Даденият израз може да се напише още така:

$$\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2}+1\right)^n.$$

Тогава, ако положим

$$\frac{c_n}{n} = \frac{\sqrt[n]{a}-1+\sqrt[n]{b}-1}{2},$$

добиваме

$$l_n = \left(1+\frac{c_n}{n}\right)^n.$$

Според зад. 20 имаме

$$c = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty} l_n = e^c = \sqrt{ab}.$$

22. Като вземем пред вид, че

$$(1\pm x)^n - 1 = 1 \pm \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 \pm \cdots - 1,$$

получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1\pm x)^n-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\pm\binom{n}{1} + Mx\right] = \pm n.$$

Тук M е крайно число за $x=0$.

23. Като положим $a^x - 1 = \varepsilon$, получаваме

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon\ln a}{\ln(\varepsilon+1)} = \ln a.$$

24. 1. — Може да се реши, като се използува зад. 23.

25. $4a$. — Използува се зад. 22.

26. $n\frac{b}{c}a^{n-1}$.

27. $n\frac{b}{c}a^{n-1}$.

28. $e^{-\frac{1}{a}}$.

29. n. — Полага се $n\operatorname{arc\,sin} x = \varepsilon$.

30. 1. — Взема се пред вид, че
$$\left(\cos\frac{\alpha}{x}\right)^x=\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{x}\right)^{\frac{x}{2}}.$$

31. $\frac{\sin 2a}{2a}$. — Използува се формулата
$$\cos x\cos\frac{x}{2}\dots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}.$$

32. $\frac{8}{\pi^2}$. — Използува се формулата
$$\cos x+\cos 2x+\dots+\cos nx=\frac{\cos\frac{n-1}{2}x\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

33. $\frac{\pi}{2}$. — Използува се формулата
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2n^2}\pi=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n^2}}.$$

34. x. — Взема се пред вид, че
$$\frac{x}{n(n-1)+x^2}=\frac{\frac{x}{n-1}-\frac{x}{n}}{1+\frac{x}{n}\,\frac{x}{n-1}}.$$

35. а) *Случай, когато k е крайно.*

Тогава винаги е възможно да се намери на всяко положително число ε едно достатъчно голямо число l, тъй че при $x\geqq l$ да съществуват неравенствата
$$k-\varepsilon<f(x+1)-f(x)<k+\varepsilon.$$
В тези неравенства даваме на x стойности от l до $l+n$:
$$k-\varepsilon<f(l+1)-f(l)\qquad<k+\varepsilon,$$
$$k-\varepsilon<f(l+2)-f(l+1)\qquad<k+\varepsilon,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$k-\varepsilon<f(l+n)-f(l+n-1)<k+\varepsilon.$$
Като съберем тези неравенства, получаваме
$$k-\varepsilon<\frac{f(l+n)-f(l)}{n}<k+\varepsilon.$$

Следователно можем да пишем

(1) $$\frac{f(l+n)-f(l)}{n}=k+\alpha,$$

гдето α е едно число между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$.

В равенството (1) полагаме $l+n=x$, тогава

(2) $$\frac{f(x)-f(l)}{x-l}=k+\alpha,$$

или
$$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(l)}{x}+\left(1-\frac{l}{x}\right)(k+\alpha),$$
отгдето
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k+\lim_{x\to\infty}\alpha.$$
Но α е число между $-\varepsilon$ и $+\varepsilon$; следователно
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k=\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)].$$

b) *Случай, когато $k=\infty$.*

В този случай на всяко произволно голямо число L може да се намери едно достатъчно голямо число l, тъй че
$$f(x+1)-f(x)>L,$$
щом $x\geqq l$.

Като разсъждаваме буквално по същия начин, както преди малко, може да се докаже, че е в сила неравенството
$$\frac{f(l+n)-f(l)}{n}>L.$$

Ако положим $x=l+n$, получаваме
$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(l)}{x}+L\left(1-\frac{l}{x}\right),$$
или
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty,$$
к. т. д. д.

Втората теорема се свежда към първата, като се положи $F(x)=\ln f(x)$ и после се антилогаритмува.

36. Като положим $\varphi(n)=\frac{n!}{n^n}$, получаваме
$$\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\sqrt[n]{\varphi(n)}.$$

Като приложим теорема **35**, можем да напишем:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\varphi(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=e^{-1}.$$

37. **0.** — Прилага се теорема **35**.

38. **0.** — Може да се приложи теорема **35**.

39. Разделяме израза с x^a:

$$\frac{y}{x^a}=\frac{\sin 2x}{x^a};\ \text{при}\ \ \alpha=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2,$$

отдето главната стойност на $\sin 2x$ е $2x$.

40. $-\dfrac{1}{6}x$.

41. $3x^{\sqrt{2}}$.

42. $-\sqrt{2x}$.

43. Общият член на тази редица има два вида:

$$x_n=\frac{n}{n+1}\ \text{или}\ x'_n=\frac{n+1}{n}.$$

Обаче

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x'_n=1,$$

отдето следва, че редицата е сходяща.

44. Разходяща.

45. Сходяща.

46. Общият член на редицата може да се представи във вида

$$x_n=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1},$$

отдето

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,\ \text{т. е. редицата е сходяща.}$$

47. Сходяща. — Взема се пред вид, че

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{(n+1)!}+\cdots+\frac{1}{(n+p)!}<\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{n+1}}=\frac{1}{n\cdot n!}.$$

48. Сходяща.

49. Нека означим с l границата на втория член. Тогава на всяко положително число ε отговаря един индекс ν, тъй че, щом $n\geqq\nu$, да имаме неравенството

$$\left|\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-l\right|<\varepsilon,$$

или, което е все същото,

$$(l-\varepsilon)(b_{n-1}-b_n)<a_n-a_{n-1}<(l+\varepsilon)(b_{n-1}-b_n).$$

Като даваме на n стойности от $\nu+1$ до $\nu+p$, получаваме следните неравенства:

$$(l-\varepsilon)(b_\nu-b_{\nu+1})\ <a_{\nu+1}-a_\nu\ <(l+\varepsilon)(b_\nu-b_{\nu+1}),$$

$$(l-\varepsilon)(b_{\nu+1}-b_{\nu+2})<a_{\nu+2}-a_{\nu+1}<(l+\varepsilon)(b_{\nu+1}-b_{\nu+2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(l-\varepsilon)(b_{\nu+p-1}-b_{\nu+p})<a_{\nu+p}-a_{\nu+p-1}<(l+\varepsilon)(b_{\nu+p-1}-b_{\nu+p}).$$

Чрез събиране на тези неравенства получаваме

$$\left|\frac{a_{\nu+p}-a_\nu}{b_{\nu+p}-b_\nu}-l\right|<\varepsilon$$

или, като положим $n=\nu+p$,

$$(1)\qquad\left|\frac{a_n-a_\nu}{b_n-b_\nu}-l\right|<\varepsilon.$$

При дадено ν и при безпределно растене на n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_\nu}{b_n-b_\nu}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Оттук следва, че можем да изберем n така, че да съществува неравенството

$$\left|\frac{a_n-a_\nu}{b_n-b_\nu}-\frac{a_n}{b_n}\right|<\varepsilon,$$

отдето въз основа на неравенство (1) имаме най-после

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-l\right|<2\varepsilon,\quad\text{или}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

50. Доказателството е аналогично на доказателството на теорема **49**.

51. 1°. Като имаме пред вид теорема **50**, получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}a_n.$$

2°. Ако положим в това равенство

$$a_1=\ln\alpha_1,\quad a_2=\ln\alpha_2,\ldots,a_n=\ln\alpha_n,$$

получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\alpha_1+\ln\alpha_2+\cdots+\ln\alpha_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_n,$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\ln\alpha_n,$$

или още

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}=\lim_{n\to\infty}\alpha_n.$$

Трябва да се обърне внимание, че и при двете доказателства се предполага съществуването на $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ и на $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

52. Тази задача не е нищо друго, освен второто предложение на теорема **35**. Доказателството обаче може да се изведе от зад. **51**:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdots\frac{a_n}{a_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}},$$

или

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}},\ \text{к. т. д. д.}$$

53. Ако означим с ν най-голямото цяло число, което се съдържа в $\frac{n}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\nu}{n}=\frac{1}{2}^{*}.$$

Като вземем пред вид зад. 51 и понеже $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=|a|$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_\nu|)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{n}\cdot\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_\nu|)=\frac{1}{2}|a|.$$

---

* $\nu=\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}-r$, където $0\leq r<1$; $n-\nu=\frac{n}{2}+r$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{r}{n}=0$.

Ако изберем едно число $\alpha>\frac{1}{2}|a|$, неравенството

$$\frac{1}{n}(|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_\nu|)<\alpha$$

винаги съществува, щом n се избере достатъчно голямо.

Да разгледаме сега израза

$$\sigma_n=\frac{1}{n}[a_1(b_n-b)+a_2(b_{n-1}-b)+\cdots+a_\nu(b_{n-\nu+1}-b)].$$

Винаги е възможно да се избере числото n достатъчно голямо, тъй че $|b_r-b|<\frac{\varepsilon}{\alpha}$ за всички значения на $r>n-\nu$. Тогава за тези значения на n имаме

$$|\sigma_n|<\frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_\nu|}{n}<\varepsilon,$$

отдето следва, че $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n=0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_\nu b_{n-\nu+1})=b\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_\nu).$$

Обаче

$$b\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{n}\cdot\lim_{\nu\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_\nu}{\nu}=\frac{1}{2}ab,$$

тогава

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_\nu b_{n-\nu+1})=\frac{1}{2}ab.$$

По същия начин се доказва, че

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_{\nu+1}b_{n-\nu})=\frac{1}{2}ab.$$

Следователно чрез събиране на (1) и (2) получаваме търсения резултат

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)=ab.$$

54. Да допуснем, че втората граница съществува и е равна на l. Тогава може да напишем (зад. **50**)

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{n}=\lim_{n\to\infty}[na_n-(n-1)a_{n-1}]=\lim_{n\to\infty}n(a_n-a_{n-1})+\lim_{n\to\infty}a_{n-1}$$

или $a=l+a$, отдето следва, че $l=0$. Оттук заключаваме, че $n(a_n-a_{n-1})$ или клони към 0, или няма определена граница. Лесно може да се покаже, че средно аритметичната на първите n члена на редицата с общ член $n(a_n - a_{n-1})$ има при всички случаи граница нула. И наистина средно аритметичната на тази редица е равна на

$$\left(1+\frac{1}{n}\right) a_n - \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

и клони (зад. 51) към $a - a$, т. е. 0.

55. На основание на зад. 54 предложението $l \neq 0$ изключва съществуването на крайна граница. Обаче можем да покажем още, че $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_n - a_{n-1}) = l$ при $l \neq 0$ съдържа в себе си указанието, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$. И наистина равенствата (зад. 50)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{\ln n - \ln(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(a_n - a_{n-1})}{\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}} = l$$

показват, че ако $l > 0$ и α е произволно положително число, по-малко от l, то за достатъчно големи значения на n имаме неравенството $a_n > \alpha \ln n$, което показва, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. По същия начин се доказва че при $l < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

56. Като вземем пред вид зад. **52**, можем да пишем, че

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1} = 1.$$

Границата на този израз може също така да се намери, като той се логаритмува предварително.

57. Ако положим

$$b_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p \text{ и } c_n = n^{p+1},$$

тогава

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n - b_{n-1}}{c_n - c_{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p - 1^p - 2^p - \cdots - (n-1)^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^p}{(p+1)n^p - \frac{(p-1)(p-2)}{2!}n^{p-1} + \cdots} = \frac{1}{p+1}.$$

58. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. — Използува се теорема **50**.

59. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$. Разглежда се отношението $a_n = \frac{n^{-p} a_n}{n^{-p}}$ и се прилага теорема 49.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{e}$. Използува се зад. 52.

61. Ще докажем най-напред, че $a_n \leqq b_n$. И наистина

$$(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{b_{n-1}})^2 \geqq 0,$$

или

$$a_{n-1} + b_{n-1} - 2\sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \geqq 0,$$

или още

$$\sqrt{a_{n-1} b_{n-1}} \leqq \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \text{ т. е. } a_n \leqq b_n.$$

От релациите

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \geqq \sqrt{a_n^2} = a_n$$

и

$$b_n - b_{n+1} = \frac{2b_n - a_n - b_n}{2} = \frac{b_n - a_n}{2} \geqq 0$$

се вижда, че редицата a е растяща, а редицата b — намаляваща. Оттук следва, че двете редици имат определени граници.

Ако означим с α и β съответно границите на редиците a и b тогава

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

отгдето следва, че $\alpha = \beta$. Общата граница се нарича средно аритметично-геометрична на a и b.

62. *Случай, когато $a < b$.*

Ако положим

$$a = b\cos\alpha, \text{ гдето } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

то

$$a_1 = b_1\cos\frac{\alpha}{2}, \text{ гдето } b_1 = b\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$a_2 = b_2\cos\frac{\alpha}{2^2}, \text{ гдето } b_2 = b\frac{\sin\alpha}{2^2\sin\frac{\alpha}{2^2}}$$

. . . .

. . . .

$$a_n = b_n\cos\frac{\alpha}{2^n}, \text{ гдето } b_n = b\frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}.$$

Оттук следва, че

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b\sin\alpha}{\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\frac{\alpha}{2^n}}\,\alpha} = \frac{b\sin\alpha}{\alpha} \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{b\sin\alpha}{\alpha}.$$

Случай, когато $a > b$.

Като се положи $a = b\,\mathrm{ch}\,\alpha$ и се разсъждава буквално по същия начин както в първия случай, се получава

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = b\frac{\mathrm{sh}\,\alpha}{\alpha}.$$

64. a_n расте постоянно и остава по-малко от $\alpha+1$, защото, ако предположим, че $a_n < \alpha+1$, то също

$$a_{n+1} = \sqrt{\alpha + a_n} < \sqrt{2\alpha+1} < \alpha+1.$$

Но $a_1 < \alpha+1$, отгдето следва, че

$$a_2 < \alpha+1,\ a_3 < \alpha+1, \ldots,\ a_n < \alpha+1, \ldots$$

Следователно редицата $a_1, a_2, \ldots$ клони към определена граница a.

От друга страна,

$$a^2_{n+1} = \alpha + a_n, \text{ или } a^2 - a = \alpha,$$

отгдето

$$a = \frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

е търсената граница.

Приложение на границите

65. Ако означим с α елементарното нарастване на силата на раздразнението, с η — елементарното нарастване на силата на усещането, съответствуващо на α, с a_0 — първоначалното раздразнение и с k — една константа, установява се емпирически, че

$$\eta = \frac{1}{k}\,\frac{\alpha}{a_0}.$$

Нека означим с α_1 първоначалното нарастване на раздразнението. Прибавиме го към началното раздразнение a_0 и получаваме ново раздразнение:

$$a_0' = a_0 + \alpha_1.$$

Но $\alpha = k\eta a_0$, тогава

$$a_0' = a_0(1+k\eta).$$

Ако означим с α_2 вторичното нарастване на раздразнението, то

$$\alpha_2 = k\eta a_0' = k\eta a_0(1+k\eta)$$

и

$$a_0'' = a_0' + \alpha_2 = a_0(1+k\eta)^2.$$

Като продължаваме по същия начин, получаваме

$$a_n = a_0^{(n)} = a_0(1+k\eta)^n = a_0\left[(1+k\eta)^{\frac{1}{k\eta}}\right]^{k\eta n}.$$

Да означим с $y = n\eta$ силата на усещането след n-кратно нарастване на η, т. е. y е усещането в даден момент, когато съответното раздразнение е a. Тогава

(1) $$a_n = a_0\left[(1+k\eta)^{\frac{1}{k\eta}}\right]^{ky}.$$

Ако положим η безкрайно малко и преминем към граница в равенство (1), получаваме

$$a = a_0 e^{ky}, \text{ или } y = \frac{1}{k}\ln\frac{a}{a_0}.$$

Явно е, че за да се мени силата на усещането в аритметична прогресия, трябва силата на раздразнението, което се обуславя от силата на усещането, да се мени в геометрична прогресия.

66. Ако означим с η количеството вещество, което се е разрушило при радиоизлъчване за безкрайно малко време τ, установява се емпирически, че

$$\eta = kJ_0\tau,$$

гдето k е константа и J_0 — първоначалното неразрушено количество. Тогава неразрушеното количество вещество след момента τ ще бъде

$$J_1 = J_0 - \eta = J_0(1-k\tau).$$

След още безкрайно малко време τ неразрушеното количество вещество е

$$J_2 = J_1 - \eta_1 = J_0(1-k\tau)^2.$$

Като продължаваме по същия начин, след n момента с продължителност τ ще имаме за неразрушеното количество вещество следния израз:

(1) $$J_n = J_0(1-k\tau)^n.$$

Ако положим $t = n\tau$, уравнението (1) може да се напише още така:

(2) $$J_n = J_0\left[(1-k\tau)^{-\frac{1}{k\tau}}\right]^{-kt}.$$

Като оставим τ да клони към нула, изразът (2) приема вида

$$J = J_0 e^{-kt}.$$

Следователно, когато времето расте в аритметична прогресия, количеството на радиоактивното вещество намалява в геометрична прогресия.

67. При годишно капитализиране

k лв. в края на 1-та година ще се обърнат в $k\left(1+\frac{p}{100}\right)$,

k " " " 2-та " " " " " $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$,

. . . .

k лв. в края на t-тата година ще се обърнат в $k\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$.

При 6-месечно капитализиране в края на t-тата година ще имаме

$$K_2=k\left(1+\frac{p}{100 \cdot 2}\right).$$

При капитализиране всяка n-та част от годината ще имаме

$$K_n=k\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}=k\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{p}{100}t}$$

или при $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty} K_n=K_\infty=ke^{\frac{p}{100}t}.$$

Тази формула ни дава в каква сума ще се обърне капиталът k лв. след t години, ако капитализирането се извършва всеки момент.

Така например капиталът 100 лв., даден по 4% сложна лихва, след една година ще се обърне в:

104 лв., ако капитализирането се извършва в края на годината;

104,081 лв., ако капитализирането се извършва в края на всеки момент.

68. Опитно се установява, че когато имаме една безкрайно тънка пластинка, погълнатото количество светлина е $a\delta J$, където a е количеството светлина, погълнато от пластинката, ако $J=1$ и $\delta=1$, и δ = дебелината на пластинката.

Разделиме разстоянието x на голям брой части, всяка от които е равна на δ, и през точките на делението прекарваме плоскости, успоредни на повърхнината на тялото. Така получаваме $\frac{x}{\delta}$ слоеве, през които трябва да мине светлината, за да дойде в точката P.

Количеството светлина, погълната последователно от пластинките, е съответно

1-ва пл.	2-ра пл.	3-та пл. . . .	n-та пл.
$a\delta J$,	$J(1-a\delta)a\delta$,	$J(1-a\delta)^2 a\delta, \ldots,$	$J(1-a\delta)^{n-1}a\delta$.

Оттук следва, че силата на светлината в точката P ще бъде

$$D=J-[a\delta J+J(1-a\delta)a\delta+\cdots+J(1-a\delta)^{n-1}a\delta]$$
$$=J(1-a\delta)^n=J(1-a\delta)^{\frac{x}{\delta}}.$$

Понеже дебелината на тази пластинка трябва да бъде безкрайно малка, то като преминем към граница в последния израз, получаваме

$$I=Je^{-ax}.$$

От тази формула е ясно, че ако разстоянието расте в аритметична прогресия, силата на светлината I намалява в геометрична прогресия.

69. $$\lim\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\lim\frac{\sin\widehat{OAB}}{\sin\widehat{OBA}}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

где то α и β са ъглите, които правата OC сключва съответно с рамената на ъгъла. Понеже отношението $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ е крайно и отлично от нула, то показва, че границата на отношението на дължините на отсечките $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ е от един и същ ред.

§ 3. Редове и безкрайни произведения

Основни указания

А. Основни критерии за сходимост на редове:

$$\Sigma u_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

Критерии за редове с положителни членове:

а. На Cauchy: ако $\sqrt[n]{u_n}\leq a<1$ за $n>N$, сходящ;

" $\sqrt[n]{u_n}\geq 1$ за $n>N$, разходящ.

Горна граница на остатъка

$$R_n\leq\frac{a^{n+1}}{1-a}.$$

Частен случай:

$$\text{ако } \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l, \quad \text{при } \begin{cases} l<1 & \text{сходящ,}\\ l>1 & \text{разходящ,}\\ l=1 & \text{съмнителен случай.}\end{cases}$$

Не можем да се произнесем върху сходимостта на реда, освен ако знаем още, че $\sqrt[n]{u_n}\geqq 1$; в този случай редът е разходящ.

b. На d'Alembert: ако $\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqq a<1$ за $n>N$, сходящ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1 \text{ за } n>N, \text{ разходящ.}$$

Горна граница на остатъка

$$R_n\leqq u_n\frac{a}{1-a}.$$

Частен случай:

$$\text{ако } \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l, \text{ при } \begin{cases} l<1 & \text{сходящ,}\\ l>1 & \text{разходящ,}\\ l=1 & \text{съмнителен случай.}\end{cases}$$

Не можем да се произнесем върху сходимостта на реда, освен ако знаем още, че $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqq 1$; в този случай редът е сходящ.

c. Логаритмичен: ако $\dfrac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\leqq 1$ за $n>N$, разходящ,

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}\geqq l>1 \text{ за } n>N, \text{ сходящ.}$$

Частен случай:

$$\text{ако } \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=l \text{ при } \begin{cases} l<1 & \text{разходящ,}\\ l>1 & \text{сходящ,}\\ l=1 & \text{съмнителен случай.}\end{cases}$$

d. На Raabe: ако $n\alpha_n\leqq 1$ за $n>N$, разходящ,

$$n\alpha_n\geqq l>1 \text{ за } n>N, \text{ сходящ } \left(\alpha_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right).$$

Частен случай:

$$\text{ако } \lim_{n\to\infty} n\alpha_n=l, \quad \text{при } \begin{cases} l<1 & \text{разходящ,}\\ l>1 & \text{сходящ,}\\ l=1 & \text{съмнителен случай.}\end{cases}$$

Критерий на редове с алтернативни членове:

e. На Leibniz: ако $|u_n|\leqq|u_{n-1}|$ и $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, редът е най-малко полусходящ.

B. Умножение на два реда

$$U=u_0+u_1+\cdots+u_n+\cdots,\quad V=v_0+v_1+\cdots+v_n+\cdots,$$

където поне единият ред е абсолютно сходящ:

$$U.V=u_0v_0+(u_0v_1+v_0u_1)+\cdots+(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\cdots+u_n v_0)+\cdots$$

C. Критерий за сходимост на безкрайните произведения

Безкрайното произведение $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$ е сходящо или разходящо едновременно с реда $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

1. Според критерия на Cauchy имаме

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}<1, \text{ сходящ.}$$

2. Според критерия на d'Alembert имаме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\frac{\frac{1.1.3\ldots(2n-3)(2n-1)}{2.4.6\ldots2(n-1)2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{\frac{1.1.3\ldots(2n-3)}{2.4.6\ldots2(n-1)}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)-5}{2n}\frac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-3}{2n}\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}>1, \text{ разходящ.}$$

3. Като логаритмуваме двете страни на равенството, което дава общия член на дадения ред, получаваме

$$\ln\frac{1}{u_n}=2\ln n-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

За да изследваме дадения ред, ще се възползуваме от *логаритмичния* критерий:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\ln n-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln n}=2-\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n}=2-\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\ln n}$$

$$=2>1, \text{ сходящ.}$$

4. Като се възползуваме от критерия на d'Alembert, получаваме

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n+1)}}{\dfrac{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2(n-1)}{3\,.\,5\,.\,7\ldots(2n-1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}=1.$$

Понеже този израз клони към единица, като остава по-малък от единица, то чрез критерия на d'Alembert не може да се установи неговият характер; в такива случаи изобщо се прилага критерият на Raabe. Именно, като вземем пред вид, че $\alpha_n=\frac{u_n}{u_{n+1}}-1=\frac{1}{2n}$, то

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}<1,\ \text{разходящ.}$$

5. $u_n=\frac{1}{n^n}$, сходящ.

6. $u_n=\frac{1}{2}\,\frac{n^2+n}{(n+1)!}$, сходящ.

7. $u_n=\frac{1\,.\,5\,.\,9\ldots(4n-3)}{1\,.\,8\,.\,11\ldots(3n+2)}$, разходящ.

8. $u_n=\frac{n!}{1\,.\,4\ldots(3n-5)}$, сходящ.

9. $u_n=\frac{n^n}{(n+1)^n\sqrt{n}}$, разходящ.

10. $u_n=\frac{n^{m-\frac{3}{2}}}{(n+1)^m-n^m}$, разходящ.

11. $u_n=\frac{\ln(n+1)}{n+1}$, разходящ.

12. $u_n=\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}$, разходящ.

13. $u_n=\frac{2^n\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$, сходящ.

14. $u_n=\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n}\,\frac{1}{2n+1}$, сходящ.

15. Ако допуснем, че произведението $a_n u_n$ клони към положителна граница, тогава и членовете на реда

$$(u)\qquad u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

от известно място нататък ще бъдат положителни числа и този ред може да се разглежда като получен от реда

$$(1)\qquad \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\cdots$$

чрез умножение на неговите членове с $a_1u_1,\ a_2u_2,\ldots$ Но тези величини от известно място нататък според допущането са по-големи от някое положително число. Следователно според една теорема от диференциалното смятане редът (u) е разходящ заедно с реда (1), което противоречи на условието, че редът (u) е сходящ. Разсъжденията са същите, ако a_nu_n клони към отрицателна граница.

16. Доказателството на това предложение следва непосредствено от теорема 15, като се вземе за реда (1) хармоничният ред. Доказателството може да се изведе и като се вземе пред вид, че ако n-тата парциална сума S_n клони към крайна граница, тогава $n(S_n-S_{n-1})$, т. е. nu_n, или не клони към определена граница, или клони към нула (§ 2, зад. 54).

Оттук можем да заключим, че ако $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n\neq 0$, тогава редът (u) е разходящ. Обаче условието $\lim nu_n=0$ не е нито необходимо, нито достатъчно за сходящите редове. Това условие не е достатъчно, защото съществуват разходящи редове, за които то е изпълнено. Например за реда

$$\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}+\cdots$$

условието $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$ е изпълнено, но въпреки това той е разходящ ред (зад. 54)

От реда
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

който според критерия на Leibniz е сходящ, се вижда, че nu_n клони към ± 1, което показва, че условието не е необходимо. Същото нещо може да се види от сходящия ред

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10^2}\cdots,$$

на който общият член е или $u_n=\frac{1}{n}$, ако n е точен квадрат, или пък $u_n=\frac{1}{n^2}$ ако n не е точен квадрат.

17. Доказателството се извършва, като се положи

$$a_n = \frac{S_n}{u_n} - n, \quad b_n = \frac{1}{u_n}$$

и се приложи теорема **50**, § 2.

18. $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} x\,\frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}}$$

$$= x\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}+\sqrt{\frac{1+n}{n^2}}} = x.$$

Редът е сходящ, ако $|x| < 1$. Ако $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} n u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}} = 1,$$

което показва (зад. 16), че даденият ред е разходящ. Ако $x = -1$, тогава

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}},$$

което от своя страна показва според критерия на Leibniz, че редът е полусходящ.

19. Сходящ за $|x| < 1$; разходящ за $x = \pm 1$.

20. Сходящ за всяко x.

21. Сходящ за $|x| < 2$.

22. Сходящ за всяко x.

23. Сходящ за $|x| < 1$, разходящ за $|x| > 1$ и $x = 1$.

24. Сходящ за $x > 1$.

25. Сходящ за $|x| < 1$, разходящ за $|x| \geqq 1$. Взема се пред вид, че

$$u_n = 2\sin^2\left(\frac{a}{2}x^n\right)$$

26. $u_n = \dfrac{1}{2^{n-1}\left(e^{\frac{x}{2^{n-1}}}+1\right)}$, сходящ за всяко x.

27. Сходящ за всяко x.

28. Даденият ред е разходящ, защото е равен на

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right);$$

изразът в скобите представлява хармоничният ред.

29. Общият член на дадения ред може да се представи във вида

$$u_n = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}.$$

Обаче от известно място нататък $\ln(\ln n) > 2$. Следователно от известно място нататък членовете на дадения ред са по-малки от членовете на сходящия ред $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, което показва също, че даденият ред е сходящ.

30. Даденият ред е сходящ едновременно с реда

$$1+2\frac{1}{2(\ln 2)^k}+4\frac{1}{4(\ln 4)^k}+\cdots+2^n\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^k}+\cdots,$$

който може да се напише още така:

$$1+\frac{1}{(\ln 2)^k}+\frac{1}{2^k(\ln 2)^k}+\cdots+\frac{1}{n^k(\ln 2)^k}+\cdots$$

Като пренебрегнем първия член на този ред и извадим пред скоби $\frac{1}{(\ln 2)^k}$, виждаме, че даденият ред е сходящ едновременно с

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots,$$

който от своя страна е сходящ, ако $k > 1$. Впрочем, ако $k > 1$, изследваният ред е сигурно сходящ. За $k = 1$ виж зад. **54**.

31. $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{4n+3} = \dfrac{3}{4}.$

$$u_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n+2}{4n+3} - \frac{3(n-1)+2}{4(n-1)+3} = \frac{1}{(4n+3)(4n-1)}.$$

32. $S = \dfrac{4}{9}, \quad u_n = \dfrac{(4b^2-9a^2)(1-2n)}{(9n^2-b^2)[9(n-1)^2-b^2]}.$

33. $S = 1, \quad u_n = \dfrac{(2n+2)!}{4^2 8^2\ldots(2n+2)^2}\,\dfrac{1}{4(n+2)}.$

34. За $x = 0$ $S = 0$; за $x \neq 0$ $S = \dfrac{1}{2\sin\frac{x}{2}}$;

за $x = \dfrac{\pi}{2}$ $S = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $u_n = \cos^{n-1}x\sin\dfrac{x}{2}$.

17. Доказателството се извършва, като се положи

$$a_n=\frac{S_n}{u_n}-n,\quad b_n=\frac{1}{u_n}$$

и се приложи теорема **50, § 2**.

18. $$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}x\,\frac{n+\sqrt{n}}{n+1+\sqrt{n+1}}$$

$$=x\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{1+\dfrac{1}{n}+\sqrt{\dfrac{1+n}{n^2}}}=x.$$

Редът е сходящ, ако $|x|<1$. Ако $x=1$,

$$\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=1,$$

което показва (зад. 16), че даденият ред е разходящ. Ако $x=-1$, тогава

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}},$$

което от своя страна показва според критерия на Leibniz, че редът е полусходящ.

19. Сходящ за $|x|<1$; разходящ за $x=\pm 1$.
20. Сходящ за всяко x.
21. Сходящ за $|x|<2$.
22. Сходящ за всяко x.
23. Сходящ за $|x|<1$, разходящ за $|x|>1$ и $x=1$.
24. Сходящ за $x>1$.
25. Сходящ за $|x|<1$, разходящ за $|x|\geqq 1$. Взема се пред вид, че

$$u_n=2\sin^2\left(\frac{a}{2}x^n\right)$$

26. $u_n=\dfrac{1}{2^{n-1}\left(e^{\frac{x}{2^{n-1}}}+1\right)}$, сходящ за всяко x.

27. Сходящ за всяко x.
28. Даденият ред е разходящ, защото е равен на

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right);$$

изразът в скобите представлява хармоничният ред.

29. Общият член на дадения ред може да се представи във вида

$$u_n=\frac{1}{n^{\ln(\ln n)}}.$$

Обаче от известно място нататък $\ln(\ln n)>2$. Следователно от известно място нататък членовете на дадения ред са по-малки от членовете на сходящия ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, което показва също, че даденият ред е сходящ.

30. Даденият ред е сходящ едновременно с реда

$$1+2\frac{1}{2(\ln 2)^k}+4\frac{1}{4(\ln 4)^k}+\cdots+2^n\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^k}+\cdots,$$

който може да се напише още така:

$$1+\frac{1}{(\ln 2)^k}+\frac{1}{2^k(\ln 2)^k}+\cdots+\frac{1}{n^k(\ln 2)^k}+\cdots$$

Като пренебрегнем първия член на този ред и извадим пред скоби $\frac{1}{(\ln 2)^k}$, виждаме, че даденият ред е сходящ едновременно с

$$1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\cdots+\frac{1}{n^k}+\cdots,$$

който от своя страна е сходящ, ако $k>1$. Прочее, ако $k>1$, изследваният ред е сигурно сходящ. За $k=1$ виж зад. **54**.

31. $$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{4n+3}=\frac{3}{4}.$$

$$u_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3n+2}{4n+3}-\frac{3(n-1)+2}{4(n-1)+3}=\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}.$$

32. $S=\dfrac{4}{9}$, $u_n=\dfrac{(4b^2-9a^2)(1-2n)}{(9n^2-b^2)[9(n-1)^2-b^2]}$

33. $S=1$, $u_n=\dfrac{(2n+2)!}{4^2 8^2\ldots(2n+2)^2}\,\dfrac{1}{4(n+2)}$

34. За $x=0$ $S=0$; за $x\neq 0$ $S=\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}$;

за $x=\dfrac{\pi}{2}$ $S=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $u_n=\cos^{n-1}x\sin\dfrac{x}{2}$.

35. Като вземем пред вид, че

$$u_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

то

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

или

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

36. $S=\frac{1}{4}$.

37. $S=\frac{3}{4}$.

38. $S=\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)$.

39. $S=\frac{1}{a^2}$.

40. $S=\frac{7}{9}$.

41. Сходящ за $|x|<1$, $S=\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$. Съвместно се работи със зад. 42, като редът от 42 се умножава с i и се събира с дадения ред.

42. Сходящ за $|x|<1$, $S=\frac{x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

43. С помощта на критерия на Raabe се установява, че даденият ред е сходящ за $|x|>1$ и разходящ за $|x|<1$. Също се вижда, че редът е разходящ за $|x|=1$.

Установява се следната рекурентна зависимост между два последователни члена:

$$(x-1)u_k=ku_{k-1}-u_k(k+1).$$

Като дадеме на k стойности от 2 до n, получаваме следните равенства:

$$(x-1)u_2=2u_1-3u_2,$$
$$(x-1)u_3=3u_2-4u_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-1)u_n=nu_{n-1}-(n+1)u_n.$$

След като съберем тези равенства, ще получим

$$S_n=u_1+\frac{2u_1}{x-1}-\frac{nu_n}{x-1}-\frac{u_n}{x-1},$$

откъдето се вижда, че

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{x-1},$$

понеже (зад. 17) $\lim_{n\to\infty} nu_n=0$.

44. $S=\frac{1}{3x(x+1)(x+2)}$. Разсъждава се, както в зад. 35.

45. $S=\frac{x}{(1-x)^2}$. Доказва се най-напред по индуктивен път, че

$$S_n=\frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

Задачата може още да се реши и с помощта на двойни редове.

46. $S_n=\operatorname{ctg} n x$, разходящ.

47. $S_n=\frac{1+x^{2^n}}{1-x^{2^n}}$, сходящ за $|x|>1$, $S=-1$.

48. Редът е полусходящ въз основа на критерия на Leibniz. Обаче това може да се установи и по следния начин. Сумираме члените на дадения ред по два:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots,$$

или

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\cdots$$

Но този ред според критерия на Raabe е сходящ, откъдето следва, че даденият ред е полусходящ.

49. Полусходящ.

50. Разходящ.

51. Полусходящ.

52. Полусходящ за всяко x.

53. Ако означим със σ_n n-тата парциална сума на реда (2), ще имаме

$$\sigma_{n+p}-\sigma_n\geqq\left(\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots+\frac{1}{a_{n+p}}\right)\frac{1}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}.$$

Ако си мислим, че n е фиксирано и понеже редът (1) е разходящ, тогава винаги може да се намери едно такова значение на p, че S_{n+p} да бъде по-голямо от $2S_n$, отгдето следва, че $\sigma_{n+p}-\sigma_n>\frac{1}{2}$.

Ако сега даваме на n стойности $n_1, n_2, \ldots$, които клонят към безкрайност, и ако означим с $p_1, p_2, \ldots$ редицата стойности на p, съответствуващи на $n_1, n_2, \ldots$ и които отговарят на горното условие, тогава $\sigma_{n+p}-\sigma_n$ не ще клони към нула, когато p взема стойности $p_1, p_2, \ldots$ Следователно редът (2) ще бъде също разходящ. Нещо повече, неговата разходимост ще бъде по-слаба от тази на реда (2), защото отношението на техните общи членове $\frac{1}{S_n}$ клони към нула заедно с $\frac{1}{n}$.

54. Най-напред ще докажем, че ако членовете на реда (1) в теорема **53** остават крайни, тогава σ_n клони към безкрайност по същия начин както $\ln S_n$. И наистина, като вземем пред вид **§ 2**, теорема **50**, можем да пишем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln S_n}{\sigma_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln S_n-\ln S_{n-1}}{\sigma_n-\sigma_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{a_nS_n}\right)^{-a_nS_n}=1,$$

понеже a_nS_n клони към безкрайност заедно с n.

От реда (2) в предната теорема и като вземем пред вид самата теорема, получаваме реда

$$\frac{1}{a_1S_1\sigma_1}+\frac{1}{a_2S_2\sigma_2}+\frac{1}{a_3S_3\sigma_3}+\cdots,$$

който е още по-слабо разходящ от реда (1). Ако в този ред заместим σ_n с $\ln S_n$, тогава редът

$$\frac{1}{a_1S_1\ln S_1}+\frac{1}{a_2S_2\ln S_2}+\cdots$$

е също разходящ заедно с горния ред, понеже отношението на общия му член към общия член на предидущия ред клони към единица. По силата на същите разсъждения n-тата парциална сума на последния ред клони към безкрайност както $\ln\sigma_n$, т. е. както $\ln\ln S_n$, и от този ред можем да получим следния ред*:

$$\frac{1}{a_1S_1\ln S_1\ln\ln S_1}+\frac{1}{a_2S_2\ln S_2\ln\ln S_2}+\cdots,$$

* В реда с общ член

$$\frac{1}{a_n\ln a_n\ln\ln a_n}$$

първите членове могат да нямат смисъл, но от известно място нататък членовете ще бъдат положителни числа.

който е по-слабо разходящ от предния ред и т. н. В частност, ако $a_n=1$, получаваме дадените в задачата редове — всички разходящи и всеки от тях по-слабо разходящ от предидущия.

55. Наистина от неравенството

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\geqq l>0,$$

когато $u_n>0$, следва, че

$$(1)\qquad a_nu_n-a_{n+1}u_{n+1}\geqq l\,u_{n+1},$$

отгдето се вижда, че положителното число a_nu_n клони към крайна граница, понеже това число постоянно намалява.

Оттук следва, че редът

$$(a_1u_1-a_2u_2)+(a_2u_2-a_3u_3)+(a_3u_3-a_4u_4)+\cdots$$

е сходящ, защото n-тата му парциална сума a_nu_n клони към крайна граница. Полученият ред ще остане сходящ, когато умножим членовете му с $\frac{1}{l}$. Даденият ред

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

ще бъде също сходящ, защото по условие членовете му са положителни и от известно място нататък ще бъдат по-малки от съответните членове на сходящия ред

$$\frac{1}{l}(a_1u_1-a_2u_2)+\frac{1}{l}(a_2u_2-a_3u_3)+\frac{1}{l}(a_3u_3-a_4u_4)+\cdots$$

Обратно, от неравенството

$$a_n\frac{u_n}{u_{n+1}}-a_{n+1}\leqq 0$$

се вижда, че от известно място нататък a_nu_n расте заедно с n, т. е. a_nu_n или клони към безкрайност, или клони към граница, отлична от нула. Следователно даденият ред $u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ е разходящ според теорема **15**.

От този критерий за сходимост могат да се изведат критериите на Raabe и d'Alembert.

56. Ако положим $u_n=n^{-p_n}$, от неравенството

$$\sqrt[n]{u_n}=n^{-\frac{p_n}{n}}=e^{-\frac{p_n}{n}\ln n}\geqq 1-\frac{p_n}{n}\ln n$$

се вижда, че

$$p_n\geqq\left(1-\sqrt[n]{u_n}\right)\frac{n}{\ln n},$$

Ако дясната страна на това неравенство от известно място нататък е по-голяма от единица, тогава съществува такова p, което удовлетворява условието $p_n > p > 1$. Следователно даденият ред ще бъде сходящ, защото от известно място нататък неговите членове са по-малки от съответните членове на сходящия ред

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\cdots$$

Обратно, ако

$$\left(1-\sqrt[n]{u_n}\right)\frac{n}{\ln n} \leqq 1, \quad \text{т. е. } u_n \geqq \left(1-\frac{1}{n}\ln n\right)^n,$$

тогава даденият ред ще бъде разходящ, защото неговите членове от известно място нататък са по-големи от съответните членове на разходящия ред

$$1+\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\right)^2+\left(1-\frac{1}{3}\ln 3\right)^3+\cdots$$

Разходимостта на последния ред може да се установи по следния начин:

Ако положим $\nu=\frac{n}{\ln n}$, тогава

$$\ln nu_n \geqq \ln n\left(1-\frac{1}{n}\ln n\right)^n=\left[(1+\nu)\ln\left(1-\frac{1}{\nu}\right)\right]\ln n.$$

Но

$$\frac{1}{\nu}<-\ln\left(1-\frac{1}{\nu}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)<\frac{1}{\nu-1},$$

отгдето

$$0<-\ln nu_n<\frac{\ln n}{\nu-1}.$$

Понеже, когато n клони към безкрайност, ν клони също към безкрайност, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\nu-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\nu}{\nu-1}\,\frac{\ln^2 n}{n}=0.$$

Следователно

$$\lim_{n\to\infty}\ln nu_n=0, \text{ или } \lim_{n\to\infty}nu_n=1,$$

което показва, че редът е разходящ.

57. $$\frac{\ln(1+x)}{1+x}=x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\cdots$$
$$+(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n+\cdots \qquad \text{за } |x|<1.$$

58. $$\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}+\cdots \qquad \text{за } |x|<1.$$

59. $$1-\frac{2}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2\,.\,2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1\,.\,n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n\,.\,1}}\right)+\cdots, \text{ разх.}$$

60. Двойният ред може да се напише още така:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$
$$+\frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\right)$$
$$+\frac{3}{16}\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Сумираме по хоризонтални редове, които представляват безкрайни геометрични прогресии. Тогава

$$s_1=1,\quad s_2=\frac{3}{2},\quad s_3=\frac{4}{3},\ldots,\quad s_n=\frac{n+1}{n},\ldots$$

По такъв начин двойният ред ще се замени със следния прост ред:

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots,$$

който е също геометрична прогресия. Неговата сума е

$$S=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2,$$

което показва, че двойният ред е сходящ.

61. Разходящ.

62. Сходящ.

63. Полусходящ.

64. Сходящ за $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

65. Сходящ за $|x|<1$.

66. Ако $|x|$ и $|ax|$ са по-малки от единица, сумите на членовете по редове и по стълбове представляват абсолютно сходящи редове. Тогава, ако сумираме по редове или по стълбове, ще получим съответно

$$s_1=\frac{ax}{1-ax},\quad s_2=\frac{ax^2}{1-ax^2},\quad s_3=\frac{ax^3}{1-ax^3},\dots$$

или

$$\sigma_1=\frac{ax}{1-x},\quad \sigma_2=\frac{a^2x^2}{1-x^2},\quad \sigma_3=\frac{a^3x^3}{1-x^3},\dots$$

Като съберем поотделно членовете на тези редици и приравним сумите им, понеже представляват и в двата случая сума на двойния ред, ще получим искания резултат:

$$\frac{ax}{1-ax}+\frac{ax^2}{1-ax^2}+\frac{ax^3}{1-ax^3}+\cdots=\frac{ax}{1-x}+\frac{a^2x^2}{1-x^2}+\frac{a^3x^3}{1-x^3}+\cdots$$

67. Редът в лявата страна на даденото равенство е сходящ за $|x|<1$. Ако всеки член на този ред разложим в един безкраен ред

$$u_p=\frac{x^p}{1-x^p}=x^p+x^{2p}+x^{3p}+\cdots,$$

тогава даденият ред може да се напише, както следният двоен ред:

$$\begin{array}{llllllll}
S=x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+\cdots \\
\qquad\;\; +x^2 \qquad +x^4 \qquad +x^6 \qquad +x^8+\cdots \\
\qquad\qquad\quad +x^3 \qquad\qquad +x^6 \qquad\qquad +\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\quad +x^4 \qquad\qquad\qquad +x^8+\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +x^5 \qquad\qquad\qquad +\cdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

В този ред, ако сумираме по колони и вземем пред вид, че x^n се съдържа в u_p само тогава, когато n се дели на p, получаваме

$$S=x\theta(1)+x^2\theta(2)+x^3\theta(3)+\cdots$$

Това равенство има голямо приложение в аритметиката.

68. Безкрайното произведение е разходящо, защото редът

$$\sum_1^\infty u_n=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt4}+\cdots+\frac{1}{\sqrt n}+\cdots$$

е разходящ, $P=0$.

69. Разходящ, $P=0$.

70. Сходящ.

71. Разходящ.

72. Сходящ на всяко x.

73. Сходящ.

74. Сходящ за всяко x, отлично от $k\frac{\pi}{2}$, гдето k е цяло. Взема се пред вид, че $\cos\frac{x}{n}=1-2\sin^2\frac{x}{2n}$.

75. 1°. Ако S е сумата на реда и S_{n+1} сумата на $n+1$-те членове, можем да напишем

$$(1)\quad S_{n+1}=(1+u_1)\left(\frac{1+u_1+u_2}{1+u_1}\right)\left(\frac{1+u_1+u_2+u_3}{1+u_1+u_2}\right)\cdots\left(\frac{1+u_1+u_2+\cdots+u_n}{1+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}}\right)$$

и следователно

$$S=(1+u_1)\left(1+\frac{u_2}{1+u_1}\right)\left(1+\frac{u_3}{1+u_1+u_2}\right)\cdots\left(1+\frac{u_n}{1+u_1+\cdots+u_{n-1}}\right),$$

т. е.

$$S=(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)\dots,$$

гдето

$$v_n=\frac{u_n}{1+u_1+u_2+\cdots+u_{n-1}}.$$

Оттук се вижда, че това произведение клони към същата граница както даденият ред.

2°. Ако сравним произведението

$$(1+v_1)(1+v_2)\dots(1+v_n)\dots$$

с втория член на равенството (1), получаваме

$$v_1=u_1,\ v_2=\frac{u_2}{1+u_1},\ v_3=\frac{u_3}{1+u_1+u_2},\dots,\ v_n=\frac{u_n}{1+u_1+\cdots+u_{n-1}},$$

или

$$u_1=v_1,\ u_2=(1+v_1)v_2,\ u_3=(1+v_1)(1+v_2)v_3,\dots,$$
$$u_n=(1+v_1)\dots(1+v_{n-1})v_n.$$

Тази редица ни дава членовете на търсения ред.

α) $\left(1+\frac{1}{1-x}\right)\left(1+\frac{x^2}{1-x^2}\right)\left(1+\frac{x^3}{1-x^3}\right)\cdots$

β) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1.5}{2^2.3^2}+\frac{1.5.10}{2^2.3^2.4^2}+\cdots$

76. Ако $|x|<1$, произведението е сходящо. Като вземем пред вид, че

$$1+x=\frac{1-x^2}{1-x},\quad 1+x^2=\frac{1-x^4}{1-x^2},\ \dots,\ 1+x^{2^n}=\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^n}},$$

тогава

$$P=\lim_{n\to\infty}\prod_1^n(1+x^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

77. С помощта на формулата на Moivre лесно се установява, че

(1) $$\sin m\varphi=m\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-\binom{m}{3}\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi+\cdots$$

Тази формула за m нечетно може да се напише още така:

(2) $$\sin m\varphi=m\sin\varphi\,(1+a_2\sin^2\varphi+\cdots+a_{m-1}\sin^{m-1}\varphi).$$

Ако тук положим $\sin\varphi=y$ и приравним получения израз на нула, добиваме

$$\sin m\varphi=my\,(1+a_2y^2+\cdots+a_{m-1}y^{m-1})=0.$$

Това уравнение допуска следните корени:

$$0,\ \sin\left(\pm\frac{\pi}{m}\right),\ \sin\left(\pm\frac{2\pi}{m}\right),\dots,\ \sin\left(\pm\frac{m-1}{2}\,\frac{\pi}{m}\right).$$

Следователно равенството (2) получава следния вид:

(3) $$\sin mx=A\sin\varphi\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2 2\frac{\pi}{m}}\right)\cdots\left(1-\frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\frac{m-1}{2}\,\frac{\pi}{m}}\right).$$

За да определим A, полагаме $\varphi=0$. Тогава

$$A=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sin m\varphi}{\sin\varphi}=m.$$

Ако в равенство (3) положим

$$m\varphi=x\ \text{ и }\ \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2 n\frac{\pi}{m}}=u_n,$$

получаваме

$$\sin x=m\sin\frac{x}{m}(1-u_1)(1-u_2)\dots(1-u_{\frac{m-1}{2}}).$$

Да предположим, че дъгата x е заключена между $n\pi$ и $(n+1)\pi$, където n е цяло число, по-малко от m. Тогава можем да си изберем m достатъчно голямо, тъй че $\frac{x}{m}$ да бъде по-малко от $\frac{\pi}{2}$. Като вземем пред вид, че

$$\frac{\sin(\alpha+h)}{\sin\alpha}<\frac{\alpha+h}{\alpha}\,*,$$

където α и $\alpha+h$ са по-малки от $\frac{\pi}{2}$, и h е положително, имаме

$$u_1<\frac{x^2}{\pi^2},\ u_2<\frac{x^2}{4\pi^2},\dots,\ u_n<\frac{x^2}{n^2\pi^2},$$

$$u_{n+1}>\frac{x^2}{(n+1)^2\pi^2},\dots,\ u_{\frac{m-1}{2}}>\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}.$$

Оттук следва, че

$$(u_1-1)(u_2-1)\dots(u_n-1)(1-u_{n+1})\dots(1-u_{\frac{m-1}{2}})<$$

$$<\left(\frac{x^2}{\pi^2}-1\right)\left(\frac{x^2}{4\pi^2}-1\right)\dots\left(\frac{x^2}{n^2\pi^2}-1\right)\times\left(1-\frac{x^2}{(n+1)^2\pi^2}\right)\dots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right],$$

или

(4) $$(-1)^n\sin x<(-1)^n x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\dots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Формулата (1) може да се преобрази още във вида

$$\sin m\varphi=m\cos^m\varphi\operatorname{tg}\varphi\,(1+b_2\operatorname{tg}^2\varphi+\cdots+b_{m-1}\operatorname{tg}^{m-1}\varphi).$$

Ако за тази формула приложим същите разсъждения както за формулата (2) и вземем пред вид неравенството

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+h)}{\alpha+h}>\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha},$$

* Това неравенство може да се напише още в следния вид:

$$\frac{\sin(\alpha+h)-\sin\alpha}{\sin\alpha}<\frac{h}{\alpha},\ \text{ или }\ \alpha\sin\frac{h}{2}\cos\left(\alpha+\frac{h}{2}\right)<\frac{h}{2}\sin\alpha.$$

Последното неравенство се проверява веднага, защото

$$\sin\frac{h}{2}<\frac{h}{2},\ \alpha\cos\alpha<\sin\alpha.$$

понеже $\operatorname{tg} h > h$ и $(1+\operatorname{tg}^2\alpha) > \operatorname{tg}\alpha$, ще получим

$$(5)\qquad (-1)^p \sin x > (-1)^p x \cos^m \frac{x}{m}\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right].$$

Ако оставим m да клони към безкрайност, тогава десните страни на неравенствата (4) и (5) клонят към една и съща граница:

$$(-1)^p x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right]\cdots,$$

защото това произведение е сходящо и

$$\lim_{m\to\infty}\cos^{2m}\frac{x}{m}=\lim_{m\to\infty}\left(1-\sin^2\frac{x}{m}\right)^m=1.$$

Следователно

$$(6)\qquad \sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots\left[1-\frac{x^2}{\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\pi^2}\right]\cdots.$$

Като се възползуваме от формулата

$$\cos x=\frac{\sin 2x}{2\sin x},$$

получаваме аналогично

$$(7)\qquad \cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{4x^2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cdots.$$

Тези формули са намерени от Euler.

78. Ако във формулата (6) на предната задача положим $x=\frac{\pi}{2}$, получаваме

$$\frac{2}{\pi}=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{36}\right)\left(1-\frac{1}{64}\right)\left(1-\frac{1}{100}\right)\cdots$$

Общият член на това произведение е

$$1-\frac{1}{4n^2}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n}.$$

Следователно

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdots$$

79. а) Безкрайното произведение

$$\frac{\left(\frac{2}{1}\right)^x}{1+\frac{x}{1}}\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\frac{x}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{1+\frac{x}{3}}\cdots,$$

което се бележи с $\Gamma(x+1)$, се нарича *гама*-функция. Това произведение е сходящо за всяко значение на x с изключение на отрицателните цели числа. И наистина, като вземем пред вид, че

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^x=1+\frac{x}{n}+\frac{a_n}{n^2},$$

гдето a_n клони към $\frac{1}{2}x(x-1)$, когато n клони към безкрайност, общият член на горното произведение е от вида $1+\frac{b_n}{n^2}$, гдето $b_n=a_n\frac{n}{n+x}$, от което се вижда, че произведението е сходящо, защото редът $\sum\frac{b_n}{n^2}$ е сходящ. Въз основа на това можем да пишем, че

$$(1)\qquad \Gamma(x+1)=\prod_1^\infty\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

Като се вземе пред вид, че безкрайното произведение

$$\prod_1^\infty\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}$$

е сходящо и релацията

$$H_n=\ln n+C+r_n{}^*,$$

гдето H_n е n-тата парциална сума на хармоничния ред, r_n е една вели-

* Тази релация може да се напише още така:

$$C=\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(H_n-\ln n).$$

Оттук се вижда, че a_n са положителни числа и клонят към крайна и определена граница. И наистина

$$e>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ или } \frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

чина, която клони към нула заедно с $\frac{1}{n}$, и

$$C = 0{,}5772156649\ldots$$

е Euler'овата константа, можем да напишем

$$\prod_1^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{H_n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{H_n - \ln n}}{1+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{C+\varepsilon_n}}{1+\frac{1}{n}} = e^C.$$

От равенство (1) се вижда, че

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = \prod_1^\infty \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x} \cdot \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}} = \prod_1^\infty \left(\frac{e^{\frac{1}{n}}}{1+\frac{1}{n}}\right)^x \prod_1^\infty \frac{1+\frac{x}{n}}{e^{\frac{x}{n}}},$$

или

(2) $$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{Cx} \prod_1^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

Тази формула е изведена от Weierstrass.

b) Понеже

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \left(1+\frac{1}{n}\right)^x$$

$$= 2^x \cdot \frac{3^x}{2^x} \cdot \frac{4^x}{3^x} \cdots \frac{n^x}{(n-1)^x} \cdot \frac{(n+1)^x}{n^x} = (n+1)^x,$$

функцията Γ може да се напише още в следния вид, въведен от Gauss:

(3) $$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} n^x \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}.$$

откъдето

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n+1),$$

което показва, че числата a_n са положителни. От друга страна,

$$e^{-1} > \left(1-\frac{1}{n}\right)^n, \text{ или } \frac{1}{n} < -\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n}{n-1}.$$

Оттук следва, че

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n} - \ln\frac{n}{n-1} < 0,$$

което показва, че числата a_n постоянно намаляват и понеже са положителни, трябва да клонят към една напълно определена граница C, наречена Euler'ова константа.

Като вземем отношението

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{n+x} = x,$$

получаваме

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),$$

откъдето намираме, че

$$\Gamma(2) = 1!,\ \Gamma(3) = 2!, \ldots, \Gamma(n+1) = n!$$

От формула (3) получаваме, че

$$\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot n^{2x-\frac{1}{2}} \cdot (n!)^2}{(2x+1)(2x+2)\ldots(2x+2n)}$$

и

$$\Gamma(2x+1) = 4^x \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2x} \cdot 2n!}{(2x+1)(2x+2)\ldots(2x+2n)}.$$

Като разделим тези равенства и вземем пред вид формулата на Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n e^{-n+\frac{\theta}{12n}},$$

намираме, че

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x+1)} = \frac{1}{4^x} \lim_{n\to\infty} \frac{4^n \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot 2n!} = \frac{\sqrt{\pi}}{4^x},$$

откъдето получаваме формулата на Lagrange

$$\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \frac{\Gamma(2x)}{\Gamma(x)}.$$

Ако в горната формула положим $x = 0$, намираме, че

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

От формула (2) и като се вземе пред вид формула (6) от зад. 77, получаваме

$$\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)} = \prod_1^\infty \left(1-\frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi x},$$

откъдето намираме

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Ако в тази формула положим $x = \frac{1}{2}$, добиваме пак

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Отдел I

ДИФЕРЕНЦИАЛНО СМЯТАНЕ

§ 4. Производни на явни функции на една независима променлива

Основни указания

А. Правила за диференциране

a) Производна на константа, C: $(C)' = 0$.

b) Производна на произведение от константа и функция, $Au(x)$:

$$[Au(x)]' = Au'(x).$$

c) Производна на крайна сума, $u(x)+v(x)+\cdots$:

$$[u(x)+v(x)+\ldots]' = u'(x)+v'(x)+\cdots$$

d) Производна на крайно произведение,

$$u(x)\,v(x)\,w(x)\ldots:$$

$$[u(x)\,v(x)\,w(x)\ldots]' = u'(x)\,v(x)\,w(x)\ldots + u(x)\,.\,v'(x)\,.\,w(x)\ldots + \ldots$$

e) Производна на дроб, $\dfrac{u(x)}{v(x)}$:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}.$$

f) Производна на съставна функция, $y = f(w)$, където $w = \varphi(v)$, $v = \psi(u)$, $u = \tau(x)$:

$$y' = f'(w)\,.\,\varphi'(v)\,.\,\psi'(u)\,.\,\tau'(x).$$

g) Производна на обратна функция; $g(y)$ е обратна функция на $y = f(x)$:

$$g_y'(y) = \frac{1}{f_x'(x)}.$$

B. Първообразни производни

a) $\dfrac{d\,(x^m)}{dx} = mx^{m-1}$.

b) $\dfrac{d\ln x}{dx} = \dfrac{1}{x}$.

c) $\dfrac{d\log_a x}{dx} = \dfrac{1}{x\ln a}$.

d) $\dfrac{d\sin x}{dx} = \cos x$.

e) $\dfrac{d\cos x}{dx} = -\sin x$.

f) $\dfrac{d\,\mathrm{tg}\,x}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

g) $\dfrac{d\,\mathrm{ctg}\,x}{dx} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

h) $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$.

i) $\dfrac{dA^x}{dx} = A^x\ln A$.

j) $\dfrac{d\arcsin x}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

k) $\dfrac{d\arccos x}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

l) $\dfrac{d\,\mathrm{arc\,tg}\,x}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2}$.

m) $\dfrac{d\,\mathrm{arc\,ctg}\,x}{dx} = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

n) $$\frac{d\,\mathrm{arc\,sec}\,x}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\begin{cases} 0 < \mathrm{arc\,sec}\,x < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2} < \mathrm{arc\,sec}\,x < \pi. \end{cases}$$

o) $$\frac{d\,\mathrm{arc\,cosec}\,x}{dx} = \pm\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\begin{cases} 0 < \mathrm{arc\,cosec}\,x < \dfrac{\pi}{2}, \\ -\dfrac{\pi}{2} < \mathrm{arc\,cosec}\,x < 0. \end{cases}$$

p) $\dfrac{d\,\mathrm{sh}\,x}{dx}=\mathrm{ch}\,x.$

q) $\dfrac{d\,\mathrm{ch}\,x}{dx}=\mathrm{sh}\,x.$

r) $\dfrac{d\,\mathrm{th}\,x}{dx}=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}.$

s) $\dfrac{d\,\mathrm{cth}\,x}{dx}=-\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$

t) $\dfrac{d\,\mathrm{arg\,sh}\,x}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

u) $\dfrac{d\,\mathrm{arg\,ch}\,x}{dx}=\dfrac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad(|x|>1).$

v) $\dfrac{d\,\mathrm{arg\,th}\,x}{dx}=\dfrac{1}{1-x^2}$ $\qquad(|x|<1).$

w) $\dfrac{d\,\mathrm{arg\,cth}\,x}{dx}=\dfrac{1}{1-x^2}$ $\qquad(|x|>1).$

1. $y'=-\dfrac{4a}{x^5}.$

2. $y'=\dfrac{7}{4}\sqrt[4]{x^3}.$

3. $y'=n(b+2cx)(a+bx+cx^2)^{n-1}.$

4. $y'=\dfrac{x^2-2}{(x-1)^4}.$

5. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}.$

6. $y'=-\dfrac{a^3}{x^2\sqrt{a^3+x^3}}.$

7. $y'=\dfrac{3a^2+2ab(b-1)x^2}{x^4\sqrt{a+b^2x^2}}.$

8. $y'=2\dfrac{x-1}{(x+1)^3}.$

9. $y'=\dfrac{3a^4}{2(ax+bx^2)^{\frac{5}{2}}}.$

При търсенето на производната удобно е най-напред да се логаритмува. Това се прилага често, когато се търси производната на функция, представена като произведение от няколко множители.

10. $y'=\dfrac{(x-2)^8}{(x-1)^{\frac{7}{2}}(x-3)^{\frac{13}{2}}}(x^2-7x+1).$

11. $y'=\dfrac{x^2}{(x+2)^3}\left[\dfrac{(x+3)^7}{x+1}\right]^{\frac{1}{2}}.$

12. $y'=\dfrac{1}{x}.$

13. $y'=-\dfrac{1}{x^2(1+x)^5}.$

14. $y'=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}.$

15. $y'=\dfrac{1}{x\ln x}.$

16. $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,e^{\arcsin x}.$

17. $y'=x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right).$

18. Полагаме $x=\sin z$. Тогава

$$y=\mathrm{arc\,tg\,tg}\,z=z.$$

Следователно

$$y'=z'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Този пример показва ясно, че за някои функции операциите при търсене на техните производни се много намаляват, ако се правят предварително някои субституции или преобразувания на тези функции.

19. $y'=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}.$

20. $y'=\dfrac{2ax^2}{x^4-a^4}.$

21. $y'=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right).$

22. $y' = \dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

23. $y' = -\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-3}$.

24. $y' = -\dfrac{nx^{n-1}}{\sqrt{1-x^{2n}}}$.

25. $y' = (\operatorname{arc\,tg} x)^x \left(\ln \operatorname{arc\,tg} x + \dfrac{1}{\operatorname{arc\,tg} x}\,\dfrac{x}{1+x^2}\right)$.

26. $y' = \dfrac{\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}$.

27. $y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{(\ln x)^2-1}\,.\,\ln x}$.

28. $y' = x^{\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\operatorname{arc\,sin} x}{x}\right)$.

29. $y' = \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{\frac{1}{2}}$.

30. $y' = \dfrac{a\cos x\, e^{-\frac{a}{\sin x}}}{2\sin^2 x\left(1-e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\left[1-\left(1-e^{-\frac{a}{\sin x}}\right)^{\frac{1}{2}}\right]}$.

31. $y' = 1$.

32. $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

33. $y' = a^{\operatorname{tg} x}\dfrac{1}{\cos^2 x}\ln a$.

34. $y' = -a^{\operatorname{arc\,sin}(\cos x)}\ln a$.

35. $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

36. $y' = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

37. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}\left[1+\left(\operatorname{arc\,sin}\dfrac{x}{a}\right)^2\right]}$.

38. $y' = \dfrac{1}{a+b\cos x}$.

39. $y' = \sqrt{2}\cos(\ln x)$.

40. $y' = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$.

41. $y' = -\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{1-x}{x}\right)^{\frac{1-x}{x}}\left(1+\ln\dfrac{1-x}{x}\right)$.

42. $y' = y(\ln x)^{\ln x}\ln_2 x\left(\dfrac{\ln_2 x+1}{x} + \dfrac{1}{x\ln x\ln_2 x}\right)$*.

43. $y' = \dfrac{2}{\sin^3 x\cos^2 x}$.

44. $y' = \operatorname{arc\,sin} x\ln x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

45. $y' = \dfrac{\sqrt{a(a-b)}\sin\dfrac{x}{2}}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}$.

46. $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

47. $y' = \dfrac{3}{\cos^2 3x}$.

48. $y' = \dfrac{\sqrt{a(a+b)}\cos\dfrac{x}{2}}{(a+b\cos x)\sqrt{\cos x}}$.

49. $y' = (1+2x\operatorname{arc\,tg} x)\,e^{(1+x)\operatorname{arc\,tg} x}$.

50. $y' = (\operatorname{tg} x)^{\ln x}\left(\dfrac{\ln x}{\sin x\cos x} + \dfrac{\ln\operatorname{tg} x}{x}\right)$.

51. $y' = \dfrac{\frac{1}{2}e^{\operatorname{arc\,tg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

52. $y' = \dfrac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

* $\ln_2 x = \ln(\ln x)$, $\ln_3 x = \ln[\ln(\ln x)]$, ...

53. Представяме най-напред функцията във вида

$$y = x + e^{x \ln x} + e^{\cos x \ln x}$$

и диференцираме

$$y' = 1 + e^{x \ln x}(\ln x + 1) + e^{\cos x \ln x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

$$= 1 + x^x(\ln x + 1) + x^{\cos x}\left(-\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

Задачата може да се реши и като се положи

$$u = x, \quad v = x^x, \quad w = x^{\cos x}.$$

54. $y' = 3\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$.

55. $y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.

56. $y' = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.

57. $y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \,.\, \operatorname{ch} x$.

58. $y' = e^{\operatorname{ch}^2 x} . \operatorname{sh} 2x$.

59. $y' = \operatorname{th}^3 x$.

60. $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x} - \operatorname{sh} x}$.

61. $y' = -\dfrac{2}{\operatorname{sh}^3 x}$.

62. $y' = \dfrac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x}$.

63. $y' = \dfrac{a + b \operatorname{ch} x}{b + a \operatorname{ch} x}$.

64. $y' = \dfrac{1}{1 - \operatorname{sh}^4 x}$.

65. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos x}$.

66. $y' = \dfrac{-2}{\pm\sqrt{4x^2 + 1}}$.

67. $y' = \dfrac{1}{\cos x}$.

68. $y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$.

69. $y' = -\dfrac{2x}{x^4 - 1} + \dfrac{2}{\cos^2 2x}$.

70. $y' = 2$.

71. $y' = 2x$.

72. $y' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

73. $y' = f' \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. — Полага се $u = 1 + \sqrt{x}$.

74. Наистина

$$y' = \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{1-ax}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\dfrac{a+x}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Ще установим сега, че

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc\,tg} x = \text{const}.$$

За тази цел полагаме

$$\frac{x+a}{1-ax} = \operatorname{tg} y.$$

Оттук

$$x = \frac{\operatorname{tg} y - a}{1 + a \operatorname{tg} y} = \operatorname{tg}(y - \operatorname{arc\,tg} a).$$

Като вземем arc tg от двете страни на последното равенство, получаваме търсения резултат:

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} a.$$

75. $-\dfrac{\pi}{2}$.

76. $\dfrac{\pi}{2}$.

77. 0.

78. $k\pi$, $k = 0, 1$.

79. Ако означим с $a_1, a_2, \ldots, a_n$ степенните показатели на x в $x_1, x_2, \ldots, x_n$, намираме

$$a_1=\frac{1}{p}\left(2+\frac{1}{q}\right),$$

$$a_2=a_1\left(1+\frac{1}{pq}\right),$$

$$a_3=a_1+\frac{a_2}{pq}=a_1\left(1+\frac{1}{pq}+\frac{1}{p^2q^2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=a_1\left(1+\frac{1}{pq}+\frac{1}{p^2q^2}+\cdots+\frac{1}{p^{n-1}q^{n-1}}\right).$$

Оттук, ако $pq>1$, имаме

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\frac{2q+1}{pq-1},\quad \text{отгдето}\quad \lim_{n\to\infty} x_n=x^{\frac{2q+1}{pq-1}}.$$

Следователно производната на последния израз е

$$\left(x^{\frac{2q+1}{pq-1}}\right)'=\frac{2q+1}{pq-1}x^{\frac{2q-pq+2}{pq-1}}.$$

80. Формулата **a)** се получава, като даденото равенство се диференцира един път по x. Формулата **b)** се доказва, като двете страни на a) се умножат с x и полученият резултат се диференцира по x.

Приложение на производните

85. Силата на галваничния ток, измерена с *тангенсовия галванометър*, се дава от формулата

$$J=A\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{1}$$

където J е силата на тока, φ — ъгълът на отклонението и A — константа, характерна за уреда.

Ако при определянето на ъгъла φ е направена малка грешка $\Delta\varphi$, то и в определянето на силата на тока J ще се направи съответно грешка ΔJ. Ако заместим $\Delta\varphi$ и ΔJ с техните диференциали, ще търсим връзката между тези грешки и кога измерването на тока е най-точно. Диференцираме равенството (1):

$$dJ=A\frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi.$$

Ако от тази зависимост и от равенството (1) елиминираме константата A, получаваме

$$dJ=\frac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}J.$$

От тази формула се вижда, че при $\varphi=45^0$ dJ е най-малко и следователно в околността на 45^0 тангенсовият галванометър определя с най-голяма точност силата на тока J. При 0^0 и 90^0 уредът е най-неточен.

86. $v=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{a-(a-bc)\,e^{-bt}}{b}$.

Скоростта при $t=0$, т. е. началната скорост на движението, е равна на 0; при $t=\infty$ $v_\infty=\dfrac{a}{b}$, което показва, че движението се стреми да стане равномерно със скорост $\dfrac{a}{b}$.

Като диференцираме израза на скоростта, получаваме ускорението

$$J=\frac{d^2s}{dt^2}=(a-bc)\,e^{-bt}.$$

Този израз показва, че ускорението при $t=0$ е $a-bc$ и когато времето расте, то намалява.

87. $\dfrac{ds}{dt}=v=\dfrac{1}{k}\dfrac{e^{gkt}-e^{-gkt}}{e^{gkt}+e^{-gkt}},\quad \dfrac{d^2s}{dt^2}=\dfrac{4g}{(e^{gkt}+e^{-gkt})^2},$

$$v_0=0,\ v_\infty=\frac{1}{k},\ J_0=g \text{ и } J_\infty=0.$$

88. Силите на притеглянето между полюсите N и N_1 и S и N_1 са съответно

$$\frac{cmm_1}{r^2} \text{ и } \frac{cmm_1}{(r+\delta)^2}.$$

Тогава равнодействуващата сила ще бъде

$$f=\frac{cmm_1}{r^2}-\frac{cmm_1}{(r+\delta)^2}=cmm_1\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{(r+\delta)^2}\right).$$

Ако δ в сравнение с r е много малко, то, като положим $\delta=\Delta r$, можем да напишем

$$f=-cmm_1\left(\frac{1}{(r+\Delta r)^2}-\frac{1}{r^2}\right)$$

или като преминем към граница,

$$f=-cmm_1\,d\frac{1}{r^2}=2\,cmm_1\frac{1}{r^3}\,dr.$$

Ако тук заместим отново dr с δ, ще получим

$$f=\frac{2cmm_1\,\delta}{r^3}.$$

§ 5. Последователни производни на явни функции на една независима променлива

Основни указания

Формула на Leibniz

$$[u(x)\,.\,v(x)]^{(n)} =$$

$$= u^{(n)}(x)\,v(x) + \binom{n}{1} u^{(n-1)}(x)\,v'(x) + \cdots + \binom{n}{n} u(x)\,v^{(n)}(x).$$

1. $y'' = 12b^2 (a - bx)^2$.

2. $y'' = 3 + 2 \ln x$.

3. $y'' = 30x^4 + 100x^3 + 6$.

4. $y'' = e^{\sin x}(2 \cos x + x \cos^2 x - x \sin x)$.

5. Диференцираме последователно три пъти дадената функция:

$$y' = -pb\,(a - bx)^{p-1},$$

$$y'' = (-1)^2 p(p-1)\, b^2 (a - bx)^{p-2},$$

$$y''' = (-1)^3 p\,(p-1)(p-2)\, b^3 (a - bx)^{p-3}.$$

Оттук е ясен законът, по който се образуват останалите производни. Следователно можем да пишем по аналогия, че

(1) $$y^{(n)} = (-1)^n p\,(p-1) \ldots (p - n + 1)\, b^n (a - bx)^{p-n}.$$

Обаче за да бъдем последователни в нашите разсъждения, че тази формула за всяко значение на n ни дава n-тата производна на дадената функция, ще покажем, че ако тя е вярна за известно значение на n, то тя ще бъде вярна и за значение $n+1$. Това се вижда много лесно, ако диференцираме (1) още един път:

$$y^{(n+1)} = (-1)^n p\,(p-1) \ldots (p - n + 1)(p - n)\, b^n (a - bx)^{p-n-1}(-b)$$

$$= (-1)^{n+1} p\,(p-1) \ldots (p-n)\, b^{n+1} (a - bx)^{p-n-1}.$$

6. $y^{(n)} = 2a \dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$.

7. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{(n-1)!}{x^n}$.

8. $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \dfrac{n!}{x^{n+1}} \left(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln x\right)$.

9. $y' = -a \sin ax = a \cos\left(ax + \dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = -a^2 \sin\left(ax + \frac{\pi}{2}\right) = a^2 \cos\left(ax + \frac{2\pi}{2}\right),$$

. . . .

$$y^{(n)} = a^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right).$$

10. $y^{(n)} = a^n \sin\left(ax + \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

11. $y^{(n)} = \dfrac{1}{2^p} \displaystyle\sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} (p - 2h)^n \cos\left[(p - 2h)\,x + \dfrac{n\pi}{2}\right]$.

Използува се зад. 9 и формулата

$$2^p \cos^p x = \sum_{h=0}^{p} \binom{p}{h} \cos(p - 2h)\,x.$$

12. Като вземем пред вид, че

$$\frac{d^n (a + bx)^{\frac{p}{2}}}{dx^n} = \frac{b^n}{2^n} p\,(p-2) \ldots (p - 2n + 2)(a + bx)^{\frac{p}{2} - n}$$

и приложим формулата на Leibniz

$$\frac{d^n uv}{dx^n} = u^{(n)} v + \binom{n}{1} u^{(n-1)} v' + \cdots + \binom{n}{n} uv^{(n)},$$

получаваме

$$y^{(n)} = \frac{b^{n-1}}{2^{n-1}} p\,(p-2) \cdots (p - 2n + 4)\left[na + \left(\frac{p}{2} + 1\right) bx\,(a + bx)^{\frac{p}{2} - n}\right].$$

13. $y^{(n)} = 2(-1)^{n-1} \dfrac{(n-3)!}{x^{n-2}}$.

14. $y^{(n)} = e^x (ax + b + na)$.

15. $y' = e^{x \cos\alpha} \cos\alpha \cos(x \sin\alpha) - e^{x \cos\alpha} \sin(x \sin\alpha) \sin\alpha$

$$= e^{x \cos\alpha} \cos(x \sin\alpha + \alpha),$$

$$y'' = e^{x \cos\alpha} \cos(x \sin\alpha + 2\alpha).$$

Оттук е ясно, че

$$y^{(n)} = e^{x \cos\alpha} \cos(x \sin\alpha + n\alpha)$$

16. $y^{(n)} = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha).$

17. $u = y + iz = e^{ax}[\cos(bx+c) + i\sin(bx+c)]$

$$= e^{ax}e^{i(bx+c)} = e^{ax+i(bx+c)}.$$

Лесно се вижда, че n-тата производна на u е

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a+bi)^n e^{ax+i(bx+c)}.$$

Ако положим

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha \text{ и } \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha,$$

ще получим

$$\frac{d^n u}{dx^n} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)[\cos(bx+c) + i\sin(bx+c)]e^{ax}.$$

Ако в този израз заместим u с $y+iz$ и отъждествим реалните и имагинерните части, получаваме

$$\frac{d^n y}{dx^n} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos(bx+c+n\alpha),$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = (a^2+b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin(bx+c+n\alpha).$$

18. Лесно се вижда, че за функциите $z = x^2\ln x$, $u = x^3\ln x, \ldots$ имаме

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = \frac{2}{x},$$

и

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{2.3}{x},$$

. . . . .

Сега, за да намерим n-тата производна на дадената функция, ще си послужим с метода на пълната индукция. Нека предположим, че за функцията

(1) $$v = x^{n-2}\ln x$$

имаме

$$\frac{d^{n-1} v}{dx^{n-1}} = \frac{(n-2)!}{x}.$$

Ако умножим равенство (1) с x и после диференцираме по правилото на Leibniz функцията $y = xv$, получаваме

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d^n v}{dx^n}x + n\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}} = -\frac{(n-2)!}{x} + n\frac{(n-2)!}{x} = \frac{(n-1)!}{x}.$$

19. Разлагаме дадената функция на елементарни дроби и получаваме

$$y = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-bx} + \frac{1}{a+bx}\right).$$

Оттук лесно се вижда, че

$$y^{(n)} = \frac{n!}{2a}b^n\left[\frac{1}{(a-bx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+bx)^{n+1}}\right].$$

Ако n е четно или нечетно, тази формула може да се напише съответно в два вида:

$$y^{(n)} = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2k}a^{n-2k}b^{2k}x^{2k},$$

или

$$y^{(n)} = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n+1}{2k+1}a^{n-2k-1}b^{2k+1}x^{2k+1}.$$

20. При n четно

$$y^{(n)} = \frac{n!\,b^n}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}\binom{n+1}{2k+1}a^{n-2k}b^{2k}x^{2k+1},$$

при n нечетно

$$y^{(n)} = \frac{n!\,b^{n-1}}{(a^2-b^2x^2)^{n+1}}\sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}}\binom{n+1}{2k}a^{n-2k+1}b^{2k}x^{2k}.$$

— Работи се както в зад. 19.

21. n-тата производна на дадената функция може да се получи от тази в зад. 19, ако заместим b с ib. Обаче ще работим по друг начин, който дава по-прост резултат. Като вземем пред вид, че

$$\frac{1}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a-ib\,x} + \frac{1}{a+ib\,x}\right),$$

получаваме

$$y^{(n)} = i^n\frac{n!}{2a}b^n\left[\frac{1}{(a-ibx)^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{(a+ibx)^{n+1}}\right].$$

Ако положим

$$a = r\cos\varphi, \quad bx = r\sin\varphi,$$

ще имаме

$$y^{(n)} = i^n \frac{n!\,b^n}{2a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\left[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi\right.$$

$$\left.+(-1)^n\cos(n+1)\varphi - (-1)^n i\sin(n+1)\varphi\right].$$

Оттук следва, че за n четно

$$y^{(n)} = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}x\right],$$

за n нечетно

$$y^{(n)} = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}x\right].$$

Тези формули могат да се групират в една единствена, като излезем от

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{a^2+b^2x^2} = \frac{1}{2ai}\left(\frac{1}{bx-ai} - \frac{1}{bx+ai}\right)$$

и разсъждаваме буквално по същия начин както по-горе, намираме, че

$$\text{(2)} \qquad y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!\,b^n}{a(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{bx}\right].$$

От друга страна, като разсъждаваме както в зад. 19, намираме, че n-тата производна на (1) е

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!\,b^n}{(a^2+b^2x^2)^{n+1}}\left[\binom{n+1}{1}(bx)^n - \binom{n+1}{3}a^2(bx)^{n-2}\right.$$

$$\left.+\binom{n+1}{5}a^4(bx)^{n-4} - \cdots\right].$$

Ако сравним този резултат с (2), получаваме

$$\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2x^2}}{bx}\right)^{n+1}\sin\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{bx}\right]$$

$$= \binom{n+1}{1}\frac{a}{bx} - \binom{n+1}{3}\left(\frac{a}{bx}\right)^3 + \binom{n+1}{5}\left(\frac{a}{bx}\right)^5 - \cdots$$

Ако в този израз положим

$$n = p-1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{bx} = \operatorname{tg}\alpha,$$

получаваме

$$\frac{\sin p\alpha}{\cos^p\alpha} = \binom{p}{1}\operatorname{tg}\alpha - \binom{p}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \binom{p}{5}\operatorname{tg}^5\alpha - \cdots$$

22. $$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!\,b^{n-1}}{(a^2+b^2x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\cos\left[(n+1)\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{bx}\right]$$

и

$$\frac{\cos p\alpha}{\cos^p\alpha} = 1 - \binom{p}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{p}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots$$

— Разсъждава се както в предната задача.

23. Като се вземе пред вид, че

$$y' = \frac{a}{a^2+x^2}$$

и се използува формула (2) от зад. 21, получава се

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(a^2+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{a}{x}\right).$$

24. Като положим

$$\cos\alpha + i\sin\alpha = p, \quad \cos\alpha - i\sin\alpha = q,$$

имаме

$$y' = \frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2} = \frac{\sin\alpha}{(1-px)(1-qx)},$$

или

$$y' = \frac{1}{2i}\left(\frac{p}{1-px} - \frac{q}{1-qx}\right).$$

Следователно, като вземем пред вид зад. 5, получаваме

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{2i}\,\frac{p^n(1-qx)^n - q^n(1-px)^n}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^n}.$$

Ако положим в този израз

$$1-\cos\alpha = r\cos\varphi, \quad x\sin\alpha = r\sin\varphi,$$

намираме

$$y^{(n)} = (n-1)!\,\frac{\sin n(\alpha+\varphi)}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

25. Първо решение. Ако положим

(1) $$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

имаме

$$\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Последователно намираме

(2) $$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{9x+6x^3}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{9+72x^2+24x^4}{(1-x)^{\frac{9}{2}}},$$

. . . .

От тези производни се вижда, че можем да положим

(3) $$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

където P_n е полином от n-та степен и от четност както n, и на който коефициентът пред x^n е $n!$ И наистина коефициентът в $\frac{d^3 y}{dx^3}$ е $6 = 1.2.3$, в $\frac{d^4 y}{dx^4}$ е $24 = 1.2.3.4$ и се доказва лесно, че ако се предположи, че този коефициент в $\frac{d^n y}{dx^n}$ е $n!$, в следната производна той ще бъде $\overline{n+1}\,!$

За да определим другите коефициенти на P_n, е нужно да намерим едно линейно диференциално уравнение, на което P_n е едно решение. За тази цел от (1) и (2) извличаме

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$$

Като диференцираме с помощта на формулата на Leibniz n пъти това уравнение, получаваме

$$(1-x^2)\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} - 2nx\frac{d^n y}{dx^n} - n(n-1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - x\frac{d^n y}{dx^n} - n\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = 0.$$

Като заместим производните с техните стойности, дадени от формула (3), намираме

(4) $$P_{n+1} - (2n+1)xP_n - n^2(1-x^2)P_{n-1} = 0.$$

Диференцираме след това уравнение (3) и заместваме $\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}$ с $\frac{P_{n+1}}{(1-x^2)^{n+\frac{3}{2}}}$; така получаваме

$$\frac{P_{n+1} - (2n+1)xP_n}{1-x^2} = \frac{dP_n}{dx}$$

или като вземем пред вид (4),

(5) $$\frac{dP_n}{dx} = n^2 P_{n-1}.$$

Чрез диференциране от последното уравнение намираме

$$\frac{d^2P_n}{dx^2} = n^2\frac{dP_{n-1}}{dx}.$$

Обаче като сменим n с $n-1$, уравнение (5) ни дава

$$\frac{dP_{n-1}}{dx} = (n-1)^2 P_{n-2},$$

откъдето доказваме, че

(6) $$\frac{d^2P_n}{dx^2} = n^2(n-1)^2 P_{n-2}.$$

Елиминационният резултат на P_{n-1} и P_{n-2} от уравненията (4), (5) и (6) е

(7) $$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} + (2n-1)x\frac{dP_n}{dx} - n^2 P_n = 0.$$

По този начин получихме едно линейно уравнение, което ще ни послужи, за да определим коефициентите на полинома P_n.

Полагаме

$$P_n = A_0 x^n + A_1 x^{n-2} + A_2 x^{n-4} + \dots$$

и заместваме този израз в (7). Като приравним на нула коефициентите пред различните степени на x, получаваме следните зависимости:

$$-2^2 A_1 + n(n-1)A_0 = 0,$$
$$-4^2 A_2 + (n-2)(n-3)A_1 = 0,$$

. . . .

отгдето намираме

$$A_1 = \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{2}\,A_0,$$

$$A_2 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}\,\frac{1.3}{2.4}\,A_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Като заместим A_0 с неговата стойност, ще намерим следното развитие за n-тата производна на $\arcsin x$:

(8)
$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^{n+1}\arcsin x}{dx^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}\left[x^n + \binom{n}{2}\frac{1}{2}\,x^{n-2} + \binom{n}{4}\frac{1.3}{2.4}\,x^{n-4} + \binom{n}{6}\frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^{n-6} + \cdots\right].$$

Във формулата

$$\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{dx^n} = \frac{P_n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

сменяме x с ix и тя приема вида

$$\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{dx^n} = \frac{Q_n}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

гдето

$$(-1)^n \frac{Q_n}{n!} = x^n - \binom{n}{2}\frac{1}{2}\,x^{n-2} + \binom{n}{4}\frac{1.3}{2.4}\,x^{n-4} - \cdots$$

Уравнението $Q_n = 0$ притежава само реални корени. Доказателството ще извършим с помощта на теоремата на Rolle. Наистина функцията $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, която се анулира за $x = -\infty$ и $x = +\infty$, остава крайна и непрекъсната в този интервал. Прочее нейната производна $\frac{Q_1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ се анулира за една стойност $x = \alpha$ между $-\infty$ и $+\infty$ и α е единствен корен на уравнението $Q_1 = 0$. Понеже изразът $\frac{Q_1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ се анулира за $x = -\infty$, $x = \alpha$, $x = +\infty$ и остава непрекъснат и краен, неговата производна се анулира поне за две стойности β и γ на x, гдето

β е между $-\infty$ и α, γ — между α и $+\infty$. Но тъй като производната е $\frac{Q_2}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$, то уравнението от втора степен $Q_2 = 0$ има корени β и γ. Като продължаваме по същия начин, заключаваме, че уравнението $Q_n = 0$ има само реални корени.

Ще дадем едно друго средство, дължимо на Hermite, за получаване на n-тата производна на

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{или на} \quad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.\,*$$

Да разгледаме определения интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

в който $a > 1$ и следователно подинтегралната функция става безкрайност само за границите на интеграла. За да намерим стойността на този интеграл, полагаме

(9)
$$x = \frac{1 + a\cos\varphi}{a + \cos\varphi},$$

отгдето

$$a - x = \frac{a^2-1}{a+\cos\varphi},$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{a^2-1}\,\frac{\sin\varphi}{a+\cos\varphi},$$

$$dx = -(a^2-1)\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(a+\cos\varphi)^2}.$$

Тук $d\varphi$ е отрицателно. За $x = -1$ вземаме $\varphi = \pi$ и за $x = +1$ $\varphi = 0$. Тогава интегралът приема вида

$$-\int_{\pi}^{0} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2-1}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Прочее имаме

$$\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}} = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

* Този начин за се разгледа, след като читателят се е запознал с интегралното смятане.

Като диференцираме това равенство спрямо a, а това е винаги възможно, понеже подинтегралната функция остава крайна, получаваме

$$(10)\qquad \frac{\pi}{n}\,\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n} = \int_{-1}^{+1} \frac{(-1)^n\,dx}{(a-x)^{n+1}\sqrt{1-x^2}}.$$

Заместваме в подинтегралната функция x от (9) и намираме

$$\frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi}(a-\cos\varphi)^n\,d\varphi,$$

отгдето равенство (10) приема вида

$$\frac{\pi}{n}\,\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n} = \frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\int_0^{\pi}(a+\cos\varphi)^n\,d\varphi.$$

Обаче като вземем пред вид, че

$$(a+\cos\varphi)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cos\varphi + \binom{n}{2}a^{n-2}\cos^2\varphi + \cdots + \binom{n}{n}\cos^n\varphi$$

и

$$\int_0^{\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\pi,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^3\varphi\,d\varphi = 0,$$

$$\int_0^{\pi}\cos^4\varphi\,d\varphi = \frac{1.3}{2.4}\pi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

получаваме

$$\frac{1}{n!}\,\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}}{da^n} = \frac{(-1)^n}{(a^2-1)^{n+\frac{1}{2}}}\left[a^n + \binom{n}{2}\frac{1}{2}a^{n-2} + \binom{n}{4}\frac{1.3}{2.4}a^{n-4} + \cdots\right].$$

Като разделим двете страни с i и заместим a с ai, получаваме стойността на

$$\frac{d^n \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}}{dx^n}.$$

Второ решение. Един друг израз за n-тата производна ще намерим, като постъпим по следния начин. Представяме първата производна на $\arcsin x$ във вида

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Като приложим за дясната страна правилото на Leibniz и вземем пред вид от зад. 5, че

$$\frac{d^{n-1}(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-2\right)(1+x)^{\frac{1}{2}-n},$$

$$\frac{d^{n-1}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{dx^{n-1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n-2\right)(1-x)^{\frac{1}{2}-n},$$

получаваме

$$y^{(n)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(1-x)^{n-1}\sqrt{1-x^2}}\left[1 - \binom{n-1}{1}\frac{1}{2n-3}\,\frac{1-x}{1+x}\right.$$

$$\left. + \binom{n-1}{2}\frac{1.3}{(2n-3)(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right].$$

26. Ако диференцираме 4 пъти дадената функция, ще получим

$$y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y'' = \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$y''' = (-1)^3\left[\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{3}{1}\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{3}{2}\frac{2!}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$y^{IV} = (-1)^4\left[\frac{1}{x^8}f^{IV}\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{1}\frac{3}{x^7}f'''\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{2}\frac{3.2}{x^6}f''\left(\frac{1}{x}\right) + \binom{4}{3}\frac{3!}{x^5}f'\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Оттук се вижда ясно закономерността, по която се получават последователните производни и следователно можем да напишем

$$(1)\quad y^{(n)}=(-1)^n\left[\frac{1}{x^{2n}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\binom{n}{1}\frac{(n-1)}{x^{2n-1}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\binom{n}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{x^{2n-2}}f^{(n-2)}\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right]$$

Обаче за да бъде оправдана тази аналогия ще трябва да покажем, че ако диференцираме тази формула още един път, ще получим за $y^{(n+1)}$ един израз, който може да се добие от (1) чрез формално заместване на n с $n+1$. Наистина

$$y^{(n+1)}=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{x^{2n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2n}{x^{2n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)+\binom{n}{1}\frac{n-1}{x^{2n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\binom{n}{1}\frac{(2n-1)(n-1)}{x^{2n}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\binom{n}{2}\frac{(n-1)(n-2)}{x^{2n}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\left[\frac{1}{x^{2n+2}}f^{(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\binom{n+1}{1}\frac{n}{x^{2n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)\right.$$

$$\left.+\binom{n+1}{2}\frac{n(n-1)}{x^{2n}}f^{(n-1)}\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right].$$

От получения израз се вижда, че действително $y^{(n+1)}$ се получава от $y^{(n)}$ чрез формално заместване на n с $n+1$.

27. Ако заместим във формула (1) на предната задача $f\left(\frac{1}{x}\right)$ с $e^{\frac{1}{x}}$, получаваме

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^n}\left[\frac{1}{x^n}+(n-1)\binom{n}{1}\frac{1}{x^{n-1}}+(n-1)(n-2)\binom{n}{2}\frac{1}{x^{n-2}}+\cdots\right].$$

28. Понеже

$$y'=-\frac{1}{1+x^2}$$

и като вземем пред вид зад. 21, получаваме

$$y^{(n)}=(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right).$$

От друга страна, от формула (1) на зад. 26 добиваме

$$y^{(n)}=(-1)^n\frac{(n-1)!}{x^2}\left[\frac{\binom{n}{1}}{x}f'\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\binom{n}{2}}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{1.2}\frac{\binom{n}{3}}{x^3}f'''\left(\frac{1}{x}\right)+\cdots\right].$$

Ако положим

$$\frac{1}{x}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

и сравним горните два резултата за $y^{(n)}$, получаваме формулата

$$\sin^n\varphi\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$$

$$=\binom{n}{1}\cos\varphi\sin\varphi-\binom{n}{2}\cos^2\varphi\sin 2\varphi+\binom{n}{3}\cos^3\varphi\sin 3\varphi-\cdots$$

29. Ако диференцираме четири пъти дадената функция, получаваме

$$y'=2xf'(x^2),$$

$$y''=(2x)^2f''(x^2)+2f'(x^2),$$

$$y'''=(2x)^3f'''(x^2)+3(3-1)(2x)f''(x^2),$$

$$y^{IV}=(2x)^4f^{IV}(x^2)+4(4-1)(2x)^2f'''(x^2)$$

$$+\frac{4(4-1)(4-2)(4-3)}{2!}f''(x^2).$$

По аналогия

$$(1)\quad y^{(n)}=(2x)^nf^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n-2p}f^{(n-p)}(x^2)+\cdots,$$

където p варира от нула до най-голямото цяло число, което се съдържа в $\frac{n}{2}$. Обаче по метода на пълната индукция ще покажем, че тази формула е вярна за всяко значение на n, т. е. ще докажем, че ако е вярна за n, тя ще бъде също вярна и за $n+1$.

За тази цел диференцираме (1) и преобразуваме общия член u_p на така получения израз:

$$u_p = 2\frac{n(n-1)\ldots[n-2(p-1)+1]}{(p-1)!}[n-2(p-1)](2x)^{n-2p+1}f^{(n+1-p)}(x^2)$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n-2p+1}f^{(n+1-p)}(x^2)$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots[n-2(p-1)+1]}{(p-1)!}\left\{2[n-2(p-1)]\right.$$

$$\left.+\frac{(n-2p+1)[n-2(p-1)]}{p}\right\}(2x)^{n-2p+1}f^{(n+1-p)}(x^2)$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\ldots[n-2(p-1)]}{p!}(2x)^{n+1-2p}f^{(n+1-p)}(x^2).$$

Този израз представлява точно общият член на $y^{(n)}$, гдето сме заместили n с $n+1$.

Приложения

1°. Като частен случай нека

$$f(x^2)=\frac{1}{1+x^2}$$

и $n=m-1$. Тогава

$$f^{(p)}(x^2)=(-1)^p\frac{p!}{(1+x^2)^{p+1}}$$

и формулата (1) ще ни даде

$$\frac{d^m \operatorname{arc\,tg} x}{dx^m}=(-1)^{m-1}(m-1)!\left[\frac{(2x)^{m-1}}{(1+x^2)^m}-\frac{m-2}{1!}\frac{(2x)^{m-3}}{(1+x^2)^{m-1}}\right.$$

$$\left.+\frac{(m-3)(m-4)}{2!}\frac{(2x)^{m-5}}{(1+x^2)^{m-2}}-\cdots\right].$$

Като положим $x=\operatorname{tg}\varphi$, получаваме

$$\frac{d^m \operatorname{arc\,tg} x}{dx^m}=(-1)^{m-1}(m-1)!\cos^{m+1}\varphi\left[(2\sin\varphi)^{m-1}\right.$$

$$\left.-\frac{m-2}{1!}(2\sin\varphi)^{m-3}+\frac{(m-3)(m-4)}{2!}(2\sin\varphi)^{m-5}-\cdots\right].$$

2°. Като положим сега

$$f(x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

получаваме

$$f^{(p)}(x^2)=\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2^p}(1-x^2)^{-p-\frac{1}{2}}.$$

Формула (1) при $n=m-1$ се обръща в

$$\frac{d^m \arcsin x}{dx^m}$$

$$=1.3.5\ldots(2m-3)\left(\frac{x}{1-x^2}\right)^m\left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\frac{(m-1)(m-2)}{2(2m-3)}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^3\right.$$

$$\left.+\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.4(2m-3)(2m-5)}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5+\cdots\right]$$

(Сравни със зад. **25.**)

30. Като заместим във формула (1) на предната задача $f(x)$ с e^{-x}, получаваме

(1) $$y^{(n)}=(-1)^n e^{-x^2}\left[(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^p\frac{n(n-1)\ldots(n-2p+1)}{p!}(2x)^{n-2p}+\cdots\right].$$

С помощта на теоремата на Rolle лесно може да се покаже, че уравнението

$$U_n\equiv(2x)^n-\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}+\cdots=0,$$

лявата страна на което представлява изразът в скобите на (1), притежава само реални корени. И наистина функцията $y=e^{-x^2}$ се анулира за $x=-\infty$ и $x=+\infty$. В тези граници тя е непрекъсната за x. Прочее производната ѝ се анулира най-малко един път, когато x варира от $-\infty$ до $+\infty$. Нека α е стойността на x, която анулира производната на y, т. е. $e^{-x^2}U_1$, гдето U_1 е изразът в скобите при $n=1$. Следователно тази стойност анулира U_1. Така се вижда, че производната се анулира за $x=-\infty$, $x=\alpha$, $x=+\infty$. Между тези граници тя е непрекъсната функция на x. Нейната производна $y''=e^{-x^2}U_2$ ще се анулира най-малко за две стойности β и γ на x, гдето β е между $-\infty$ и α, γ — между α и $+\infty$. Следователно β и γ са корени на уравнението $U_2=0$, което е от втора степен. Функцията $e^{-x^2}U_2$ се анулира за $x=-\infty$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $x=+\infty$. Нейната производна $e^{-x^2}U_3$ ще има три нули δ, ε, ζ, които се съдържат съответно между $-\infty$ и β, β и γ, γ и ∞. Прочее уравнението от трета степен $U_3=0$ ще има три реални корена. По аналогичен начин ще се достигне най-сетне до твърдението, че и уравнението $U_n=0$ има всичките си корени реални.

Може да се покаже още, че абсолютните стойности на корените на уравнението $U_n = 0$ се намират между стойностите

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ и } \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \qquad \text{(Hermite).}$$

31. Като положим $u = e^x$ и вземем под внимание, че

$$\begin{aligned} y' &= e^x f'(u), \\ y'' &= e^{2x} f''(u) + e^x f'(u), \\ y''' &= e^{3x} f'''(u) + 3e^{2x} f''(u) + e^x f'(u), \end{aligned}$$

можем да пишем

$$y^{(n)} = e^x f'(u) + \frac{a_2}{2!} e^{2x} f''(u) + \frac{a_3}{3!} e^{3x} f'''(u) + \cdots + e^{nx} f^{(n)}(u), \tag{1}$$

гдето $a_2, a_3, a_4, \ldots$ са неопределени коефициенти и не зависят от естеството на функцията f. За да определим тези коефициенти, ще положим

$$f(u) = u^z = e^{zx}.$$

Тогава уравнението (1) става

$$z^n = z + a_2 \frac{z(z-1)}{2!} + a_3 \frac{z(z-1)(z-2)}{3!} + \ldots$$

Ако в това уравнение положим последователно

$$z = 2, 3, 4, \ldots,$$

получаваме

$$\begin{aligned} 2^n &= 2 + a_2, \\ 3^n &= 3 + 3a_2 + a_3, \\ 4^n &= 4 + 2 \cdot 3a_2 + 4a_3 + a_4, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

отгдето добиваме

$$\begin{aligned} a_2 &= 2^n - 2, \\ a_3 &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 1^n, \\ a_4 &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \cdot 1^n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= k^n - \binom{k}{1}(k-1)^n + \binom{k}{2}(k-2)^n - \cdots \end{aligned}$$

Като приложение можем да намерим n-тата производна на $\operatorname{tg} x$. Тук можем да пишем

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{i} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{1}{i} \frac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1}$$

или като положим

$$\xi = 2xi,$$

добиваме

$$i \operatorname{tg} x = \frac{e^\xi - 1}{e^\xi + 1} = 1 - \frac{2}{e^\xi + 1}.$$

Понеже

$$d\xi = 2i\,dx,$$

получаваме най-сетне

$$\frac{d^n \operatorname{tg} x}{dx^n} = (2i)^{n+1} \frac{d^n \frac{1}{e^\xi + 1}}{d\xi^n}.$$

По същия начин може още да се намери n-тата производна на $\sin x$ и $\cos x$, като се има пред вид, че

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

32. Ако положим

$$\ln x = u,$$

отгдето

$$x = e^u, \quad dx = e^u\,du,$$

получаваме

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{-u} \frac{dy}{du}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{-u} \frac{d\left(e^{-u} \frac{dy}{du}\right)}{du} = e^{-2u} \frac{d^2y}{du^2} - e^{-2u} \frac{dy}{du}, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= e^{-u} \frac{d}{du}\left(e^{-2u} \frac{d^2y}{du^2} - e^{-2u} \frac{dy}{du}\right) = e^{-3u} \frac{d^3y}{du^3} - 3e^{-3u} \frac{d^2y}{du^2} + 2e^{-3u} \frac{dy}{du}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Тези уравнения символично и по-нагледно могат да се напишат така:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{-2u} \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du} - 1\right) y, \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= e^{-3u} \frac{d}{du}\left(\frac{d}{du} - 1\right)\left(\frac{d}{du} - 2\right) y, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \right. \tag{1}$$

гдето, след като извършим умножението, ще разбираме например за $\frac{d^2}{du^2} y$ втората производна на y по u.

От уравненията (1) е ясно, че

$$(2)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} = e^{-nu}\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}-1\right)\left(\frac{d}{du}-2\right)\cdots\left[\frac{d}{du}-(n-1)\right]y = e^{-nu}\Phi(u).$$

Сега ще докажем с помощта на пълната индукция, че тази формула е вярна за всяко значение на n. За тази цел, ако диференцираме уравнението (2), получаваме

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-u}\frac{d\,[e^{-nu}\Phi(u)]}{du} = e^{-(n+1)u}\left[\frac{d\Phi(u)}{du} - n\Phi(u)\right]$$

или според нашия символичен начин за изразяване

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = e^{-(n+1)u}\left(\frac{d}{du}-n\right)\Phi(u) = e^{-(n+1)u}\frac{d}{du}\left(\frac{d}{du}-1\right)\cdots\left(\frac{d}{du}-n\right)y,$$

отдето се вижда, че формула (2) е обща. Ако развием последния израз и заместим e^{-nu} с x^{-n}, ще получим

$$y^{(n)} = x^{-n}[f^{(n)}(u) - A_1 f^{(n-1)}(u) + A_2 f^{(n-2)}(u) - \cdots],$$

гдето коефициентите $A_1, A_2, \ldots$ удовлетворяват равенството

$$(z-1)(z-2)\cdots[z-(n-1)] = z^{n-1} - A_1 z^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}A_{n-1}.$$

Това равенство показва, че A_1 е сумата на първите $n-1$ числа, A_2 — сумата на произведенията на тези числа, взети две по две, и т. н.

33. Ако диференцираме n пъти дадената функция, получаваме

$$(1)\qquad y^{(n)} = A_1 f'(u) + \frac{A_2}{2!}f''(u) + \cdots + \frac{A_n}{n!}f^{(n)}(u),$$

гдето коефициентите $A_1, A_2, \ldots, A_n$ не зависят очевидно от вида на функцията $f(u)$. Следователно, за да определим тези коефициенти, достатъчно е да положим последователно

$$f(u) = u,\quad f(u) = u^2, \ldots, f(u) = u^n$$

и да решим получените уравнения относно $A_1, A_2, \ldots, A_n$. И наистина

$$y_1 = u,\ y_1' = \frac{du}{dx}, \ldots, y_1^{(n)} = \frac{d^n u}{dx^n} = A_1;$$

$$y_2 = u^2,\ y_2' = \frac{du^2}{dx}, \ldots, y_2^{(n)} = \frac{d^n u^2}{dx^n} = 2A_1 u + A_2,$$

отдето

$$A_2 = \frac{d^n u^2}{dx^n} - 2u\frac{d^n u}{dx^n}.$$

Като търсим последователно още няколко коефициента, по аналогия можем да заключим, че

$$(2)\qquad A_k = \frac{d^n u^k}{dx^n} - \binom{k}{1}u\frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \binom{k}{2}u^2\frac{d^n u^{k-2}}{dx^n} - \cdots + (-1)^{k-1}ku^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n}.$$

За да докажем обаче, че тази формула е валидна за всяко значение на x, ще си послужим с метода на пълната индукция. Ако предположим, че всички коефициенти до A_k включително се получават по формула (2), ще докажем, че и A_{k+1} се получава от същата формула, като заместим k с $k+1$.

Ако положим

$$f(u) = u^{k+1}$$

и диференцираме n пъти, ще получим

$$\frac{d^n u^{k+1}}{dx^n} = A_1(k+1)u^k + A_2\frac{k(k+1)}{2!}u^{k-1} + \cdots + A_k\frac{(k+1)!}{k!}u + A_{k+1}.$$

Оттук

$$A_{k+1} = \frac{d^n u^{k+1}}{dx^n} - (k+1)u\left[\frac{d^n u^k}{dx^n} - \binom{k}{1}u\frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} + \binom{k}{2}u^2\frac{d^n u^{k-2}}{dx^n} - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{k-1}ku^{k-1}\frac{d^n u}{dx^n}\right]$$
$$- \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$-\frac{k(k+1)}{2}u^{k-1}\left(\frac{d^n u^2}{dx^n} - 2u\frac{d^n u}{dx^n}\right)$$
$$-(k+1)u^k\frac{d^n u}{dx^n},$$

или

$$A_{k+1} = \frac{d^n u^{k+1}}{dx^n} - \binom{k+1}{1}u\frac{d^n u^k}{dx^n} + \binom{k+1}{2}u^2\frac{d^n u^{k-1}}{dx^n} - \cdots$$
$$+ (-1)^k(k+1)u^k\frac{d^n u}{dx^n},$$

което показва, че действително A_{k+1} се получава от A_k чрез заместване на k с $k+1$.

Faa de Bruno в *Quarterly Journal of Mathematics*, t. I, p. 359 дава n-тата производна на дадената функция с формулата

$$y^{(n)} = \sum_{i,j,\ldots,k} \frac{n!}{i!\,j!\ldots k!}D_u^p f\left(\frac{u'}{1!}\right)^i\left(\frac{u''}{2!}\right)^j\left(\frac{u'''}{3!}\right)^k\cdots\left(\frac{u^{(l)}}{l!}\right)^\lambda,$$

гдето знакът Σ е разпрострян за всички цели положителни решения на уравнението $i+2j+3h+\cdots+lk=n$ и гдето $p=i+j+\cdots+k$.

Върху доказването на тази формула не ще се спираме.

34. a) Производната на дадената функция е

$$y'=n\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n}{\sqrt{x^2-1}}=n\frac{y}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Ако напишем това равенство във вида

$$(1)\qquad \sqrt{x^2-1}\,y'=ny$$

и след това го диференцираме, получаваме

$$\frac{xy'}{\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2-1}\,y''=ny'.$$

Оттук, като вземем пред вид (1), ще добием търсеното уравнение

$$(x^2-1)\,y''+xy'-n^2y=0.$$

b) Полагаме $u=(x^2-1)^n$. Тогава

$$u'=n(x^2-1)^{n-1}2x$$

или

$$(x^2-1)\,u'=2n\,xu.$$

Ако диференцираме това равенство $n+1$ път, намираме, че

$$(2)\qquad (x^2-1)\,u^{(n+2)}+2\,x\,u^{(n+1)}-n\,(n+1)\,u^{(n)}=0.$$

Обаче като вземем пред вид, че

$$u^{(n)}=\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}=2^n\,n!\,y,$$

и заместим този израз в (2), получаваме

$$(x^2-1)\,y''+2xy'-n\,(n+1)\,y=0.$$

35. — Диференцира се един път даденото тъждество.

37. Като положим $f(x)=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ и вземем пред вид, че

$$f'_{x^2}=-\left(n-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{n-\frac{3}{2}},$$

$$f''_{x^2}=+\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)(1-x^2)^{n-\frac{5}{2}},$$

. . . .

$$f^{(n-1)}_{x^2}=(-1)^{n-1}\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{2n-3}{2}\right)(1-x^2)^{n-\frac{2n-1}{2}}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3}{2^{n-1}}\sin\varphi,$$

въз основа на зад. **29** получаваме

$$\frac{d^{n-1}f(x^2)}{dx^{n-1}}=(-1)^{n-1}\Big[2^{n-1}\frac{(2n-1)\ldots3}{2^{n-1}}\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi$$

$$-2^{n-3}(n-1)(n-2)\frac{(2n-1)\ldots5}{2^{n-2}}\sin^3\varphi\cos^{n-3}\varphi+\cdots$$

$$\pm2^{n-2p-1}\frac{(n-1)\ldots(n-2p)}{p!}\frac{(2n-1)\ldots(2p+3)}{2^{n-1-p}}\sin^{2p+1}\varphi\cos^{n-2p-1}\varphi+\cdots\Big]$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)\ldots3}{n}\Big[n\sin\varphi\cos^{n-1}\varphi$$

$$-\binom{n}{3}\sin^3\varphi\cos^{n-3}\varphi+\cdots\pm\binom{n}{2p+1}\sin^{2p+1}\varphi\cos^{n-2p-1}\varphi+\cdots\Big]$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{(2n-1)\ldots3}{n}\sin n\varphi.$$

38. — Може да се работи или с метода на пълната индукция, или с помощта на развитието на $e^{\frac{1}{x}}$ в степенен ред по $\frac{1}{x}$.

39. Като положим $a=\operatorname{ctg}\alpha$, получаваме

$$\frac{x-a}{1+x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-ai}{x+i}+\frac{1+ai}{x-i}\right).$$

$n-1$-та производна на това равенство е равна на

$$\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(\frac{x-a}{1+x^2}\right)=\frac{(-1)^{n-1}}{2}\left[\frac{1-ai}{(x+i)^n}+\frac{1+ai}{(x-i)^n}\right].$$

Тогава

$$f(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{2}[(1-ai)(x-i)^n+(1+ai)(x+i)^n],$$

което представлява един полином от n-та степен.

Ако положим $x=\operatorname{ctg}\varphi$, добиваме

$$(1-ai)(x-i)^n+(1+ai)(x+i)^n=\frac{2\sin n\varphi}{\sin^n\varphi}(\operatorname{ctg}n\varphi-\operatorname{ctg}\alpha).$$

Така корените на уравнението $f(x)=0$ ще се дадат от уравнението

$$\operatorname{ctg} n\varphi = \operatorname{ctg}\alpha.$$

Следователно

$$x_1=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{n},\ x_2=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{\pi}{n}\right),\ldots,\ x_n=\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{n-1}{n}\pi\right).$$

40. a) Формулата на Leibniz ни дава

$$(1)\quad y^{(n)}=n!\left[(1-x)^n-\binom{n}{1}^2x(1-x)^{n-1}+\binom{n}{2}^2x^2(1-x)^{n-2}-\cdots\right].$$

Тази производна можем да намерим още, като развием $(1-x)^n$ по биномната формула и след това диференцираме n пъти. Така получаваме

$$(2)\quad y^{(n)}=(-1)^n\left[2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n\right.$$

$$\left.-\binom{n}{1}(2n-1)(2n-2)\ldots nx^{n-1}+\cdots\right].$$

Като сравним коефициентите пред x^n на (1) и (2), получаваме

$$1.2.3\ldots n(-1)^n\left[1+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2\right]=(-1)^n2n(2n-1)\ldots(n+1),$$

отдето

$$1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

b) Като вземем пред вид, че за n-тата производна имаме двата израза

$$y^{(n)}=n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^k(x+1)^{n-k}$$

и

$$y^{(n)}=2n(2n-1)\ldots(n+1)x^n-n(2n-2)\ldots(n-1)x^{n-2}+\cdots,$$

гдето последният член е

$$0 \text{ или } (-1)^{\frac{n}{2}}n\binom{n}{\frac{n}{2}}$$

в зависимост от това, дали n е нечетно или четно, и сравним свободните членове на тези два израза, ще получим търсените формули.

41. От една страна, ако диференцираме функцията

$$y=e^x\sin x$$

по правилото на Leibniz, получаваме

$$y^{(n)}=e^x\left[\sin x+\binom{n}{1}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cdots+\binom{n}{n}\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

от друга страна, като вземем пред вид зад. **17**, имаме

$$y^{(n)}=(\sqrt{2})^n\sin\left(x+n\frac{\pi}{4}\right)e^x.$$

Чрез приравняване на тези два израза за $y^{(n)}$ получаваме търсената формула.

42. Да разгледаме функцията

$$(1)\qquad y=\frac{x}{e^x-1}$$

или

$$(e^x-1)y=x.$$

Ако последното равенство диференцираме последователно n пъти, ще получим

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{l} e^xy+(e^x-1)y'=1,\\ e^xy+2e^xy'+(e^x-1)y''=0,\\ e^xy+3e^xy'+3e^xy''+(e^x-1)y'''=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ e^xy+\binom{n}{1}e^xy'+\binom{n}{2}e^xy''+\cdots+(e^x-1)y^{(n)}=0. \end{array}\right.$$

От друга страна, функцията $\dfrac{x}{e^x-1}$ има всички производни от 2-ри ред нататък равни с тези на функцията

$$\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}.$$

Обаче тази функция е четна, което показва, че всички нейни производни от нечетен ред са нули за $x=0$. Следователно в уравненията (2) за $x=0$ можем да премахнем всички производни от нечетен ред от y''' нататък. Така получаваме за $x=0$

$$y_0=1,\ y_0'=-\frac{1}{2}$$

и следните две системи:

$$
(3)\qquad \begin{cases}
\frac{1}{2} = \binom{3}{2} y_0'', \\
\frac{3}{2} = \binom{5}{2} y_0'' + \binom{5}{4} y_0^{(4)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\frac{2n-3}{2} = \binom{2n-1}{2} y_0'' + \binom{2n-1}{4} y_0^{(4)} + \dots + \binom{2n-1}{2n-2} y_0^{(2n-2)}
\end{cases}
$$

$$
(4)\qquad \begin{cases}
1 = \binom{4}{2} y_0'', \\
2 = \binom{6}{2} y_0'' + \binom{6}{4} y_0^{(4)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
n-1 = \binom{2n}{2} y_0'' + \binom{2n}{4} y_0^{(4)} + \dots + \binom{2n}{2n-2} y_0^{(2n-2)}.
\end{cases}
$$

Ако положим в тези системи

$$y_0^{(2n)} = (-1)^{n-1} B_{2n-1},$$

получаваме числата на Bernoulli:

$$B_1 = \frac{1}{6},\quad B_3 = \frac{1}{30},\quad B_5 = \frac{1}{42},\quad B_7 = \frac{1}{30},\quad B_9 = \frac{5}{66}, \dots$$

§ 6. Истинска стойност на неопределени форми

1. Понеже $f(3) = \frac{0}{0}$, за да премахнем тази неопределеност, прилагаме теоремата на l'Hospital:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \dots = \lim_{x\to a} \frac{\varphi^{(n)}(x)}{\psi^{(n)}(x)},$$

ако последната граница съществува.

За нашия пример имаме

$$f(3) = \lim_{x\to 3} \frac{4x^3 - 20x}{4x^3 - 16x} = \frac{4}{5}.$$

2. $f(0) = \frac{0}{0} = \ln\frac{a}{b}$.

3. $f(2) = \frac{0}{0} = \frac{4}{7}$.

4. $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{0}{0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5. $f(0) = \frac{0}{0} = 2$.

6. $f(0) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2\cos x}{2e^x - 2} = \frac{0}{0}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\sin 2x + \sin x}{e^x} = 0.$$

7. $f(3) = \frac{0}{0} = 8$.

8. $f(0) = \frac{0}{0} = \frac{1}{6}$.

9. За дадената задача правилото на l'Hospital не е приложимо, защото

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}}{1} = \frac{0}{0},$$

и като продължаваме по същия начин, всякога ще имаме $\frac{0}{0}$.

Но ако положим $x = \frac{1}{y}$, получаваме

$$\lim_{y\to\pm\infty} \frac{e^{-y}}{\frac{1}{y}} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{y}{e^y} = \lim_{y\to\pm\infty} \frac{1}{e^y} = 0 \text{ или } \infty$$

в зависимост от това, дали y е положително или отрицателно.

10. $f(1) = \frac{0}{0} = \ln a - 1$.

11. $f(a) = \frac{0}{0} = \frac{n}{a} \frac{1}{\cos a}$.

12. $f(0) = \frac{0}{0} = -\frac{1}{2}$.

13. $f(0) = \frac{0}{0} = 1$.

14. $f(2) = \frac{0}{0} = 0.$

15. $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{0}{0} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

16. $f(a) = \frac{0}{0} = \frac{1}{24a}.$

17. $f(\infty) = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \frac{\infty}{\infty} = \cdots$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{a^p e^{ax}} x^{n-p} = 0, \text{ когато } p > n.$$

18. $f(\infty) = \frac{\infty}{\infty} = 0.$

19. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{5}.$

20. $f(0) = \frac{\infty}{\infty} = 1.$

21. Ако приложим правилото на l'Hospital, получаваме

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + \cos x}{1}.$$

Обаче вторият израз представлява неопределеност. Следователно в този случай теоремата на l'Hospital не може да се приложи, въпреки че даденият израз има определена граница. И наистина

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

22. $f(\infty) = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{b} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{b}\frac{e^x}{e^x} = \frac{1}{b}.$

23. $f(0) = \infty - \infty.$ — За да можем да приложим теоремата на l'Hospital, привеждаме под единакъв знаменател:

$$f(0) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{\sin x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x^3}{x^3 \sin x} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 3x^2}{3x^2 \sin x + x^3 \cos x} = \infty.$$

Може да се реши по-лесно без теоремата на l'Hospital, като се забележи, че $\frac{1}{\sin x}$ е безкрайно голямо от първи ред, а $\frac{1}{x^3}$ — от трети.

24. $f(1) = \infty - \infty = \frac{1}{2}.$

25. $f(0) = \infty - \infty = \frac{1}{2}.$

26. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty - \infty = -1.$

27. $f(1) = \infty - \infty = -\frac{1}{2}.$

28. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \infty - \infty = \infty.$

29. $f(0) = \infty - \infty = \frac{\pi^2}{8}.$

30. $f(0) = \infty - \infty = \frac{2}{3}.$

31. $f(\infty) = \infty - \infty = \frac{1}{2}(a + b).$

32. $f(1) = 0 \cdot \infty.$ — За да можем да приложим теоремата на l'Hospital, трябва да представим дадения израз във вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(1) = \lim_{x\to 1}(1 - x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = \lim_{x\to 1} \frac{1 - x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{-\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}} = \frac{2}{\pi}.$$

33. $f(a) = 0 \cdot \infty = \frac{1}{a}.$

34. $f(\infty) = \infty \cdot 0 = -2a.$

35. $f(1) = \infty \cdot 0 = 0.$

36. $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \cdot \infty = \infty.$

37. $f(0)=0^0$. — Този случай и следните: 1^∞, ∞^0, се привеждат чрез логаритмуване във вида $0\,.\,\infty$.

Логаритмуваме дадения израз:

$$\ln f(0)=\lim_{x\to 0} x\ln x=0\,.\,\infty=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=0,$$

оттдето, като антилогаритмуваме, получаваме

$$f(0)=1.$$

38. $f(\infty)=\infty^0=1.$

39. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1^\infty=1.$

40. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1^\infty=1.$

41. $f(\infty)=1^\infty=1.$

42. $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1^\infty=\frac{1}{e}.$

43. $f(0)=1^\infty=e^{-\frac{a^2}{2b^2}}.$

44. $f(0)=\infty^0=1.$

45. $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0^0=1.$

46. $f(0)=0^0=e.$

47. $f(0)=1^\infty=e^{-\frac{1}{6}}.$

48. $f(a)=1^\infty=e^{\frac{2}{\pi}}.$

49. $f(0)=-\infty+\infty=\ln 2.$

50. Търсим истинската стойност на израза

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^n}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{nx^{n-1}\cos^2 x}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\,.\,\sin x}{n(n-1)x^{n-2}\cos^2 x-nx^{n-1}\sin 2x}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^3 x-6\cos x\sin^2 x}{n(n-1)(n-2)x^{n-3}\cos^2 x-2n(n-1)x^{n-2}\sin 2x-2nx^{n-1}\cos 2x}.$$

Последният израз за $n=3$ заема стойност $\frac{1}{2}$, което показва, че главната стойност на дадения израз е $\frac{1}{2}x^3$. Разбира се, намирането на истинската стойност на горния израз може да се опрости, като се възползуваме от познатата граница за $\frac{\operatorname{tg}x}{x}$. И наистина

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}\,\frac{1-\cos x}{x^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(n-1)x^{n-2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{(n-1)(n-2)x^{n-3}}=\frac{1}{2}\text{ за }n=3.$$

51. $\frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}}.$

52. $\frac{1}{8}x^4.$

53. $\frac{e}{2}x.$

54. Имаме

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\lim_{x\to 1}(1+2^2x+3^2x^2+\cdots+n^2x^{n-1})$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^n[n^2x^2-(2n^2+2n-1)x+(n+1)^2]-x-1}{(x-1)^3}.$$

Прилагаме трикратно формулата на l'Hospital за последния член и получаваме

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\lim_{x\to 1}\frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}[n^2x^2-(2n^2+2n-1)x+(n+1)^2]}{3\,.\,2\,.\,1}$$

$$+\frac{3n(n-1)x^{n-2}[2n^2x-(2n^2+2n-1)x]+3nx^{n-1}\,.\,2n^2}{3\,.\,2\,.\,1}$$

$$=\frac{n(2n^2+3n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)(n+1)}{6}.$$

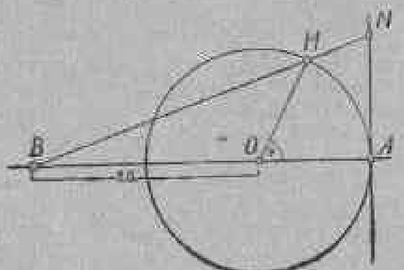
56. Пресечната точка (черт. 1) на правите MN с $OA\equiv x$ е

$$x_n=\frac{a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi-\varphi},$$

отгдето

$$x=\lim_{\varphi\to 0}x_n=\lim_{\varphi\to 0}\frac{a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)}{\sin\varphi-\varphi}=-2a.$$

Точка B може да послужи за пресмятане на дъгата AM, и то с голямо приближение. Така при $\varphi=65^{\circ}$ грешката е по-малка от 1°.



Черт. 1

57. $t=\frac{1}{k}\frac{x_0}{A(A-x_0)}$.

§ 7. Максимум и минимум на функции на една независима променлива

Основни указания

Ако производната $f'(x)$ на функцията $f(x)$ се анулира за $x=a$, то за да добие функцията $f(x)$ при $x=a$ максимум или минимум, трябва първата поред производна, която е отлична от нула за $x=a$, да е от четен ред; максимум имаме, ако тази производна е отрицателна, а минимум, ако е положителна. Намирането на точките, при които имаме евентуално максимум или минимум, става, като се търсят корените на уравнението $f'(x)=0$.

Функцията $f(x)$ може да добие евентуално максимум или минимум и за значения на x, за които първата производна $f'(x)$ не съществува. В този случай се търси директно дали условията

$$f(x+h)<f(x) \text{ или } f(x+h)>f(x)$$

са изпълнени за малки положителни и отрицателни значения на h. Ако първото условие е изпълнено, имаме максимум, а при второто — минимум.

1. $y'=3x^2-24x+45$, $y''=6x-24$.

Нулите на първата производна са: $x_1=3$, $x_2=5$, за които y'' е съответно отрицателно или положително. Следователно при първия случай имаме max $y=84$, а при втория — min $y=80$.

2. $x=0$, $y^{IV}<0$, $y=b$ max;

$$x=\frac{4a}{5},\ y=b-\frac{4^4}{5^5}a^5 \text{ min.}$$

3. $x=3$, $y=-\frac{1}{8}$ min.

4. $x=-1-\sqrt{2}$, $y=-(1+\sqrt{2})^2$ max;

$$x=-1+\sqrt{2},\quad y=-(-1+\sqrt{2})^2 \text{ min.}$$

5. $x=e^{\frac{1}{n}}$, $y=\frac{1}{ne}$ max.

6. $y'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $y'=0$ за $x=\pm 1$.

За да установим знака на втората производна, достатъчно е да търсим знака само на израза $1-x^2$, защото функцията $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ е винаги положителна и нейната производна не става безкрайност за $x=\pm 1$.

Така

$$\frac{d(1-x^2)}{dx}=-2x.$$

Прочее за $x=1$ имаме max и за $x=-1$ — min.

7. $x=\frac{1}{e}$, $y=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ min.

8. max за $x=\frac{a}{3}$,

min за $x=-a$.

9. max за $x=\frac{\pi}{2}$,

min за $x=0$.

10. max за $x=\frac{5\pi}{4}$,

min за $x=\frac{\pi}{4}$.

11. max за $x=\cos x$, $x=0{,}739$.

12. max за $x=\frac{a}{2}+\frac{\pi}{4}$,

min за $x=\frac{a}{2}-\frac{\pi}{4}$,

13. min за $x=0$; $y' = \pm\frac{\pi}{2}$ в зависимост от това, дали x клони отдясно или отляво на $x=0$. Следователно производната за тази точка не съществува.

14. max за $x=\frac{\pi}{8}$.

15. min за $x=0$.

16. $y'=1+\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}$.

За $x=0+\varepsilon$ $y'>0$ и понеже за отрицателни значения на x дадената функция е комплексна, това показва, че за $x=0$ имаме min.

17. Най-напред ще търсим max на функцията $y=x^{\frac{1}{x}}$:

$$y'=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}=0, \quad x=e.$$

За $x=e$ $y''<0$. Прочее за тази стойност на x имаме max $y=\sqrt[e]{e}$. Обаче $e^{\frac{1}{e}}$ се намира между числата $\sqrt[2]{2}$ и $\sqrt[3]{3}$, от които $\sqrt[3]{3}$ е по-голямото число. Следователно $\sqrt[3]{3}$ отговаря на максималното число от дадената редица.

18. $x=1$.

19. $x=\frac{ma}{m+n}$.

20. Лицето на триъгълника е

$$s=\frac{1}{2}ab\sin x,$$

гдето x означава ъгъла между страните a и b. Тогава

$$\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}ab\cos x=0, \quad x=\frac{\pi}{2},$$

което показва, че търсеният триъгълник е един правоъгълен триъгълник.

Това се вижда и направо, понеже $\sin x$ има максимум при $x=\frac{\pi}{2}$.

22. Нека означим с x едната страна и с $2a$ периметъра на един правоъгълник.

$$s=(a-x)x,$$

отгдето се вижда, че за $x=\frac{a}{2}$ имаме max. Прочее търсеният правоъгълник е квадрат.

Обратно, от всички правоъгълници, които имат дадено лице a^2, квадратът има най-малък периметър. И наистина, ако означим с $2y$ периметъра му и с x страната му, тогава

$$y=x+\frac{a^2}{x}, \quad y'=1-\frac{a^2}{x^2}, \quad y'=0 \text{ за } x=\pm a.$$

Оттук се вижда, че за

$$x=a \qquad y''>0, \text{ min}$$

$$x=-a \qquad y''<0, \text{ max}.$$

Първото решение доказа обратното предложение на дадената задача, а второто не отговаря на нашите изисквания, защото по същество x е положително.

23. Ако означим с p периметъра и с x броя на страните на многоъгълника, тогава лицето му е

$$s=\frac{p^2}{4x}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}.$$

Оттук

$$s'=\frac{p^2}{4}\left[-\frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}+\frac{1}{x^3}\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi}{x}}\right]=0$$

или

$$\frac{1}{x^2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}=\frac{1}{x^3}\frac{\pi}{\sin^2\frac{\pi}{x}},$$

или още

$$\sin\frac{2\pi}{x}=\frac{2\pi}{x},$$

което очевидно е удовлетворено за $x\to\infty$. От самото естество на задачата се вижда, че за тази стойност имаме max, т. е. правилният многоъгълник е една окръжност.

24. От черт. 2 се вижда ясно, че при постоянна основа правият конус s има най-голяма височина от всеки друг клиногонален конус s_1 и следователно и най-голям обем. Прочее за нашите разглеждания ще вземем само прави конуси.

Нека означим с r радиуса на една сфера и с x разстоянието на центъра ѝ до равнината на основата на конуса. Тогава обемът на този конус е

$$V=\frac{\pi(r+x)}{3}(r^2-x^2),$$

отгдето

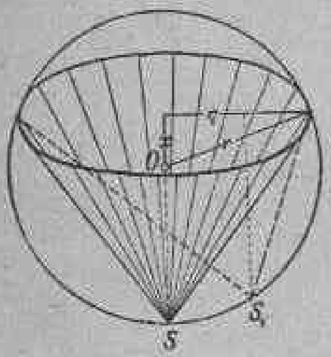
$$V'=\frac{\pi}{3}(r+x)(r-3x)=0, \quad x=\frac{r}{3}.$$

Без да търсим втората производна, геометричното естество на задачата показва, че за $x=\frac{r}{3}$ имаме максимален обем

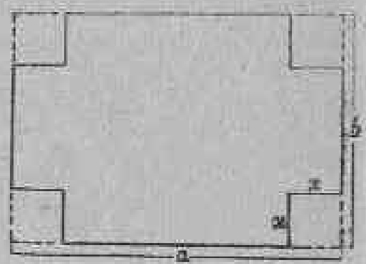
$$V=\frac{32}{81}\pi r^3.$$

25. За $x=\sqrt[3]{\frac{V}{3\pi}}$, $S=3\sqrt[3]{2\pi V^2}$ е минимум.

26. Обемът на тази кутия (черт. 3) е



Черт. 2



Черт. 3

$$V=x(a-2x)(b-2x),$$

отгдето

$$V'=ab-4(a+b)x+12x^2=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}.$$

Обаче само

$$x=\frac{a+b-\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

отговаря на решението на задачата. Другата стойност

$$x=\frac{a+b+\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$$

не отговаря на решението на задачата, защото, ако предположим $a>b$ получаваме $x>\frac{b}{2}$, което няма смисъл.

27. Ако положим $AC=a$, $AB=b$, $AX=x$ (черт. 4), получаваме, че минимум имаме за $x=\frac{b}{\sqrt{2}}$.

28. Ако означим $AC=a$, $AB=b$, $CP=x$ (черт. 5), тогава

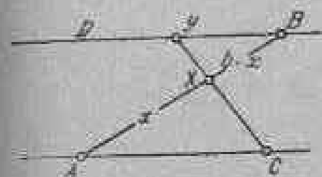
$$PD=\frac{b}{a}x,\quad EP=(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

и лицето на параболичния сегмент е

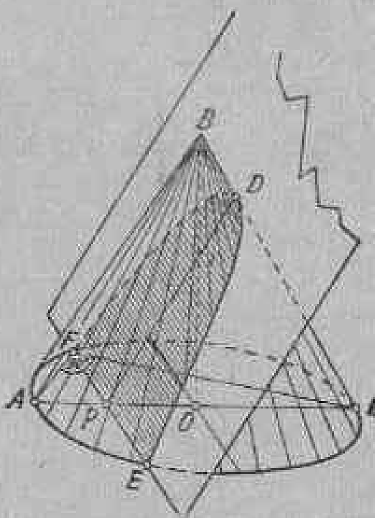
$$S=\frac{4b}{3a}x(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Това лице става максимум за $x=\frac{3a}{4}$.

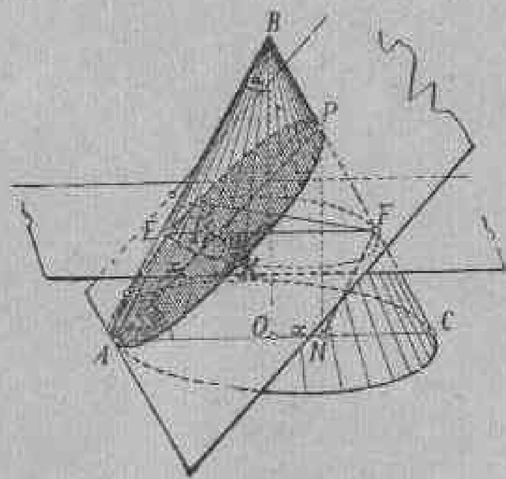
29. Нека положим (черт. 6)



Черт. 4



Черт. 5



Черт. 6

$$BO=a,\quad OC=b,\quad ON=x.$$

Като вземем пред вид, че AP е голямата ос на сечението, тогава условието за максимума се дава от уравнението

$$3(a^2+b^2)x^2-4b(a^2-b^2)x+b^2(a^2+b^2)=0.$$

Корените от това уравнение ще бъдат реални, положителни и еднократни, ако

$$a \geqq b(2+\sqrt{3}),$$

т. е., ако ъгълът на конуса е по-малък от $\frac{\pi}{6}$.

Тази задача може да се третира още, ако вземем за неизвестен ъгъла, който равнината на сечението сключва с основата на конуса. Тогава от триъгълника APC имаме

$$\frac{AP}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{2b}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha-\varphi\right)},$$

$$2x_1=AP=2b\frac{\cos\alpha}{\cos(\varphi-\alpha)},\quad AN=2b\frac{\cos\alpha\cos\varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}.$$

Оттук, понеже $MF=b$, имаме

$$EM=b\left[\frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}-1\right],$$

отгдето

$$y_1^2=b^2\left[\frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}-1\right],$$

понеже точките E, K и F лежат на една окръжност.

Следователно квадратът на лицето на елипсата е

$$s^2=b^4\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2(\varphi-\alpha)}\left[\frac{2\cos\alpha\cos\varphi}{\cos(\varphi-\alpha)}-1\right]\pi^2.$$

Уравнението, което се получава от анулирането на първата производна на този израз, е

$$-\sin 2\alpha+2\sin(\varphi-\alpha)\cos(\varphi+\alpha)=0,$$

или

$$\sin 2\varphi=2\sin 2\alpha,$$

което дава същия резултат както по-горе.

30. Ако означим респективно с $2x$ и $2y$ ъглите, които трета тангента сключва с дадените тангенти, тогава лицето на триъгълника, определен от тях, е

$$S=r^2(\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}\alpha),$$

гдето r е радиусът на окръжността и между x и y съществува равенството

$$x+y+\alpha=\frac{\pi}{2}.$$

Минимумът се получава за $x=y=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$.

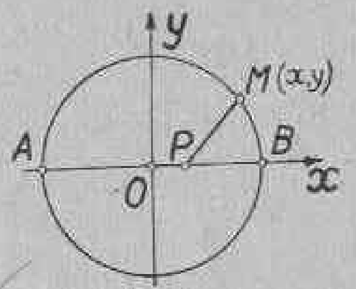
31. Ако означим с $2a$ дадената дъга и с x радиуса на търсения кръг, тогава лицето на сегмента е

$$S=-x^2\sin\frac{a}{x}\cos\frac{a}{x}+ax,$$

отгдето получаваме условието за максимум

$$\cos\frac{a}{x}\left(a\cos\frac{a}{x}-x\sin\frac{a}{x}\right)=0.$$

Първият фактор дава $x=\frac{2a}{\pi}$, което показва, че сегментът е полукръг. Вторият фактор се анулира за такива значения на x, които нямат никакъв смисъл. И така полукръгът има най-голямо лице измежду всички сегменти с дадена дъга.



Черт. 7

32. Ако означим с φ ъгъла, който отговаря на отрязания сектор, с a радиуса на кръга и с x радиуса на основата на коничната повърхнина, получаваме

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2\sqrt{a^2-x^2}.$$

Максималният обем $V=\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}a^3$ отговаря на $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ или $\varphi=66{,}06^0$.

33. Ако положим $OB=a$, $OP=c$, $PM=z$ (черт. 7), получаваме

$$z^2=\overline{PM}^2=(x-c)^2+y^2,\quad x^2+y^2=a^2,$$

или

(1) $$z^2=a^2+c^2-2cx,$$

$$2z\frac{dz}{dx}=-2c.$$

Очевидно $\frac{dz}{dx}$ не може да се анулира.

Оттук бихме заключили, че задачата няма нито минимум, нито максимум. Обаче очевидно е, че тя притежава такива.

Този парадокс се отстранява, като забележим, че във функцията a^2+c^2-2cx независимата променлива x е ограничена винаги между $-a$ и $+a$. Когато x се мени от $-a$ до $+a$, тогава z^2 е равно на a^2+c^2-2cx. Понеже функцията е линейна, можем да решим задачата, като търсим нейния max и min (най-голямата и най-малката стойност) в интервала $(-a, a)$. Очевидно е, че min и max отговарят съответно на крайните точки на този интервал.

Задачата може да се третира още, като положим в (1)

$$x=c+z\cos\varphi,$$

$$y=z\sin\varphi,$$

т. е. да ограничим изменението на x само в интервала $(-a, a)$. Тогава, като заместим x и y в уравнението на окръжността, получаваме

$$z^2+2cz\cos\varphi+c^2-a^2=0.$$

Като диференцираме два пъти това равенство (виж как се диференцират неявни функции), намираме

$$(z+c\cos\varphi)z'-cz\sin\varphi=0,$$

$$(z+c\cos\varphi)z''+z'^2-2cz'\sin\varphi-cz\cos\varphi=0.$$

Първата производна z' се анулира за $\varphi=\pi$ и 0, за които стойности z'' е съответно по-малко и по-голямо от нула. Прочее за тези стойности имаме съответно max и min.

34. а) Понеже за

$$x\to+\infty \quad \text{и} \quad x\to-\infty$$

функцията $f(x)$ става $+\infty$ и освен това тази функция е непрекъсната, тогава съществува поне едно значение на x, за което $f(x)$ е min.

Обаче

$$f'(x)=2(x-k_1)+2(x-k_2)+\cdots+2(x-k_n)=0$$

само за

$$x=\frac{k_1+k_2+\cdots+k_n}{n},$$

което показва, че само за тази стойност имаме min.

Прочее средно аритметичното на измерените величини $k_1, k_2, \ldots, k_n$ е търсеното най-вероятно значение за x.

b) Нека посредством n наблюдения за две величини a и b сме получили съответно величините

$$a_1, a_2, \ldots a_n \quad \text{и} \quad b_1, b_2, \ldots, b_n.$$

Грешките, които правим при измерването на тези величини, са

$$u_1=a_1-xb_1,$$

$$u_2=a_2-xb_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n=a_n-xb_n,$$

които могат да бъдат положителни и отрицателни.

Тогава според теорията на най-малките квадрати най-вероятната стойност на x ще бъде онази, която обръща в минимум функцията

$$f(x)=u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2=(a_1-xb_1)^2+(a_2-xb_2)^2+\cdots+(a_n-xb_n)^2.$$

Като анулираме производната на тази функция, получаваме за търсената стойност израза

$$x=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}.$$

35. Издръжливостта на гредата е

$$J=Kx(4a^2-x^2),$$

гдето $K=\frac{k}{6}$. За

$$x=\frac{2a}{\sqrt3}$$

имаме максимална издръжливост, равна на $\frac{16Ka^3}{\sqrt{27}}$.

36. Обемите на всички така получени кутийки са еднакви, защото обемите на пирамидите $BODS$ и $BADC$ (черт. 8) са равни.

Ако положим

$$SO=x, \quad QD=b \quad \text{и} \quad PQ=a,$$

тогава лицето на повърхнината на кутийката е

$$S=\frac{3a}{2}[2(2b-x)+(a+\sqrt{a^2+4x^2})\sqrt3].$$

Следователно трябва да търсим минимума на функцията

$$f(x)=\sqrt{3(a^2+4x^2)}-2x.$$

Този минимум се получава за $x=\frac{\sqrt2}{4}a$. На тази стойност на x отговаря $\sphericalangle BCD=109^\circ 28' 26''$.

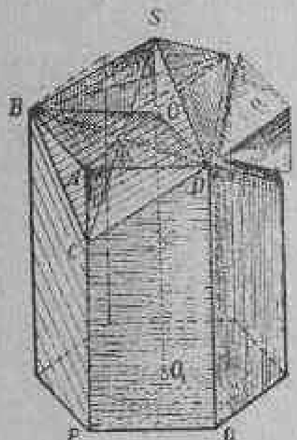
На такава форма отговарят килийките на пчелите.

37. $x = \dfrac{a r^{\frac{3}{2}}}{r^{\frac{3}{2}} + r'^{\frac{3}{2}}}$, където a е разстоянието между центровете на сферите и r и r' — техните радиуси.

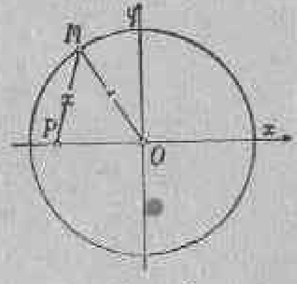
38. Ъгълът на зрението α се дава от уравнението

$$J = \operatorname{tg}\alpha = \frac{ax}{x^2 + (a+b)b}.$$

α е максимум за $x = \sqrt{b(a+b)}$. Пример: за $a = 22$ см и $b = 20$ см $x = 29$ см.



Черт. 8



Черт. 9

39. Силата на осветлението на безкрайно малкия елемент p е

$$f(x) = J\frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

където J е силата на светещата точка. Оттук получаваме, че осветлението ще бъде най-силно за $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.

40. Ако означим с r радиуса на окръжността, с α — ъгъла, който сключва MP с PO, и положим $OP = a$ (черт. 9), получаваме за силата на осветлението израза

$$J^2 = k^2\frac{4a^2x^2 - (r^2 - a^2 - x^2)^2}{4a^2x^6},$$

където k е константа.

Максимално осветление ще имаме за

$$x^2 = 2(a^2 + r^2) - \sqrt{(a^2 + r^2)^2 + 12a^2r^2}.$$

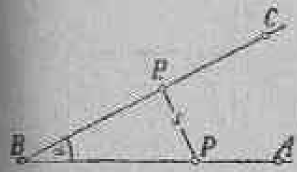
41. Ако положим $AB = a$ и $\sphericalangle ABC = \alpha$ (черт. 10), получаваме

$$s = \sqrt{(a - v_1t)^2 + v_2^2t^2 - 2(a - v_1t)v_2t\cos\alpha}.$$

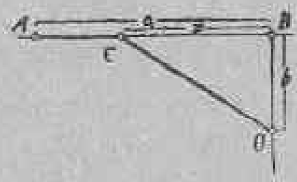
Тази функция добива минимум за

$$t = \frac{a(v_1 + v_2\cos\alpha)}{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Ако $v_2 = v_1$ и $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, тогава $t = \dfrac{a}{2v_1}$ и $s_{\min} = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$.



Черт. 10



Черт. 11

42. Ако положим $AB = a$, $OB = b$ и $CB = x$ (черт. 11), тогава времето, необходимо, за да се измине пътят $AC + CO$, е

$$t = \frac{v_2(a - x) + v_1\sqrt{b^2 + x^2}}{v_1v_2}.$$

Това време става минимум за $x = \dfrac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$.

Пример: ако $b = 10$ км, $a = 50$ км, $v_1 = 20$ м в минута, $v_2 = 16$ м в минута, тогава

$$x = 13{,}333 \text{ км} \quad \text{и} \quad t_{\min} = 47^h\,55^m.$$

43. Ако положим $AB = l$, тогава

$$l = (x + v)T.$$

Стойността на изразходвания горивен материал по целия път е

$$s = Tbx^3 = \frac{lbx^3}{x + v}.$$

За да бъде s минимум, трябва или $x = 0$, или $x = -\dfrac{3v}{2}$. $x = 0$ означава, че ако параходът се движи по течението, скоростта му трябва да бъде равна на нула. Напротив, ако параходът се движи срещу течението, тогава скоростта му е $-\dfrac{3v}{2}$.

44. Ако положим $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B_1=c$ и $A_1C=x$ (черт. 12), получаваме, че търсеният път е

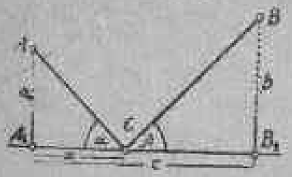
$$s=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}.$$

Като приравним към нула първата производна, намираме

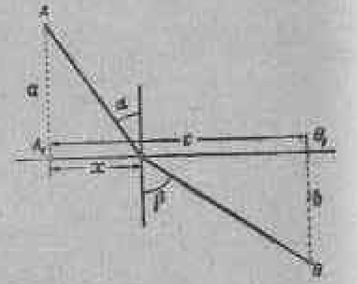
$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0$$

или

$$\cos\alpha=\cos\beta,$$



Черт. 12



Черт. 13

отгдето

$$\alpha=\beta.$$

Следователно, за да бъде пътят s минимум, трябва ъгълът на падането α да бъде равен на ъгъла на отражението β. По този закон, както е известно, се движат идеално пъргавите тела и светлинните лъчи.

45. Нека положим $AA_1=a$, $BB_1=b$, $A_1B=c$ и $A_1C=x$ (черт. 13). Тогава времето, необходимо, за да се измине пътят $s=AC+CB$, е

$$t=\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}{v_2}.$$

Като приравним производната на t по x към нула, получаваме

$$\frac{1}{v_1}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{1}{v_2}\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}=0,$$

отгдето

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}.$$

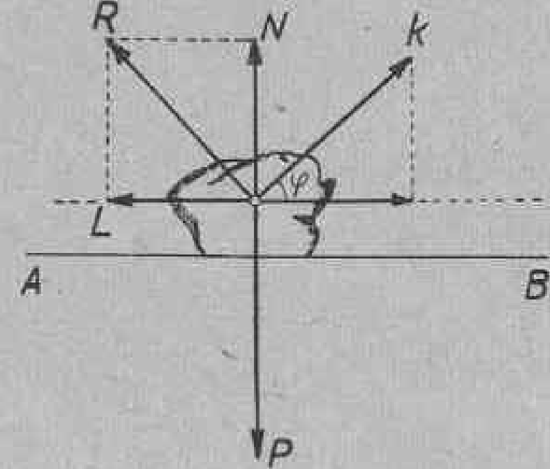
Това показва, че материалната точка трябва да се движи като светлинния лъч, който минава през две различно гъсти среди.

46. Ако положим $AB=a$, $AP=x$ и означим с p и q съответно силите на нагряването на две точки на разстояние единица от източниците A и B, тогава нагряването W, което изпитва точката P от двата източника, е

$$W=\frac{p}{x^2}+\frac{q}{(a-x)^2}.$$

Оттук получаваме, че за минимално нагряване ще имаме

$$x=\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}\,a,$$



Черт. 14

отгдето

$$\frac{AP}{AB}=\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}},\quad \text{или}\quad \frac{AP}{PB}=\sqrt[3]{\frac{p}{q}}.$$

47. (Черт. 14.) С помощта на механиката се намира, че

$$k\cos\varphi=\mu(P-k\sin\varphi),$$

или

$$k=\frac{\mu}{\cos\varphi+\mu\sin\varphi}P.$$

За да намерим минимума на тази функция, е все едно да търсим максимума на

$$f(\varphi)=\cos\varphi+\mu\sin\varphi,$$

откъдето

$$f'(\varphi) = -\sin\varphi + \mu\cos\varphi = 0,$$

или

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu.$$

Следователно

$$k_{min} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}P.$$

§ 8. Изследване и графично представяне на функции

Основни указания

Изследването на вариацията и начертаването на графиката на функцията $y=f(x)$ става с помощта на следните главни точки:

А. Търсят се:

1. Интервалите, в които функцията е дефинирана.
2. Дали $f(x)$ е четна, нечетна или периодична.
3. Точките на прекъсването.
4. Максималните и минималните точки.
5. Инфлексните точки.
6. Интервалите, в които функцията расте или намалява.
7. Интервалите, в които функцията е вдлъбната нагоре или надолу.
8. Пресечните точки на $y=f(x)$ с координатните оси или с някои дадена права.
9. Няколко точки в различните интервали.
10. Тангентите в някои характерни точки.

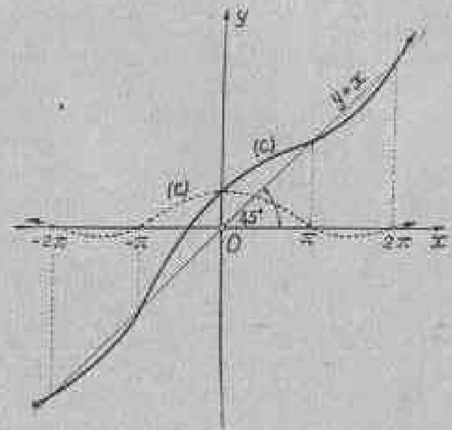
В. Изследва се $y=f(x)$ в околността:

11. На $x=\pm\infty$.
12. На точките на прекъсването.

След това се написва схемата на изменението на $y=f(x)$. Тази схема дава указание за начертаването на графиката на $y=f(x)$.

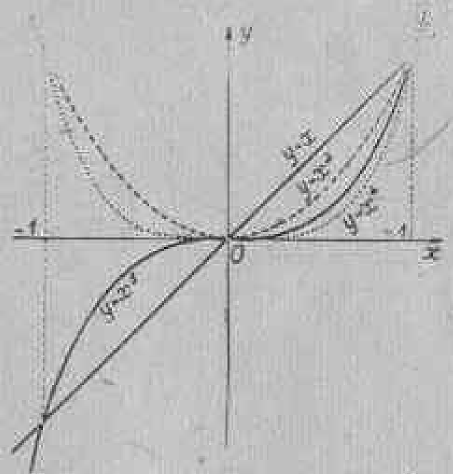
1. Тази функция е непрекъсната за всяко значение на x. Тя се анулира за $x=k\pi$ и за $x=\infty$. Също тя е симетрична спрямо y. Добива max и min за стойности на x, които удовлетворяват уравнението $\operatorname{tg}x=x$ (зад. 31). Графиката ѝ е представена на черт. 15 с пунктираната линия C.

2. Графиката C' на тази функция се получава от графиката C (черт. 15) чрез прибавяне на стойностите $y=x$.



Черт. 15

3. Когато n е четно, дадените функции имат графики, симетрични спрямо оста y. Когато n е нечетно, тези функции имат за инфлексна



Черт. 16

точка началото на координатната система и са симетрични спрямо това начало (черт. 16). Вариациите на функцията се дават от схемите:

1°. n четно

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$y' = nx^{n-1}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	1		$+\infty$

2°. n нечетно

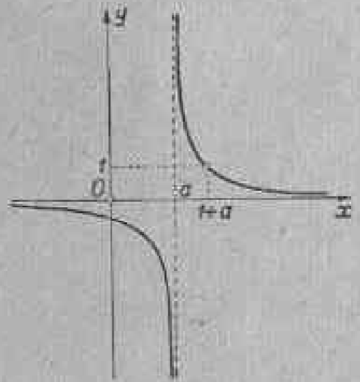
x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
y'		$+$		$+$		$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

От чертежа се вижда, че когато n расте, графиките на тези функции се приближават все по-плътно до отсечката $(-1, 1)$ и правите $x=-1$ и $x=1$.

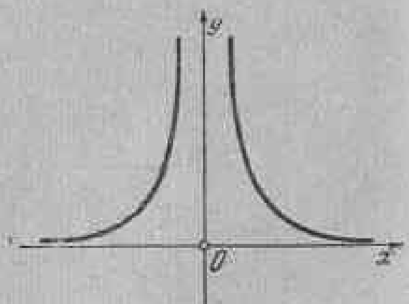
4. Функцията се прекъсва за $x=a$, и когато x клони към a, като взема стойности, по-малки от a, тя клони към $-\infty$; напротив, когато x клони към a със значения, по-големи от a, тя клони към $+\infty$ (черт. 17).

5. (Черт. 18.) В околността на точката на прекъсването имаме следните граници:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(0-\varepsilon)^2}=+\infty \quad \text{и} \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{(0+\varepsilon)^2}=+\infty .$$



Черт. 17



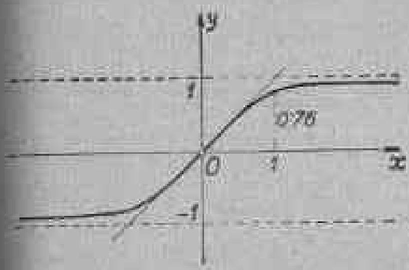
Черт. 8

Тогава схемата е следната:

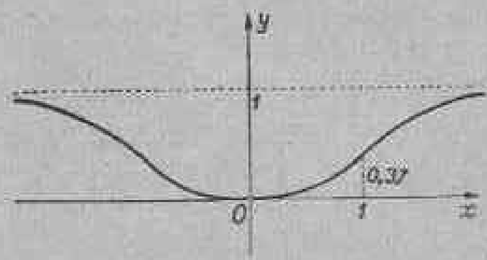
x	$-\infty$		-0	$+0$		$+\infty$
$y' = -\frac{2}{x^3}$	$+0$	$+$			$-$	-0
y	$+0$	$\nearrow$	$+\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$+0$

6. (Черт. 19.) Функцията е непрекъсната и

$$y' = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$



Черт. 19

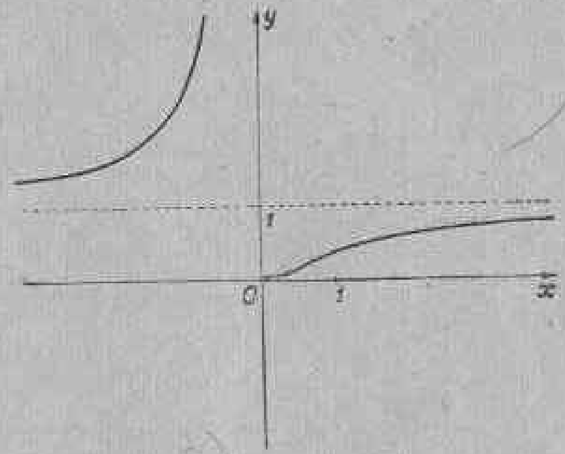


Черт. 20

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'	$+0+$		1	$+$	$+0$
y	$-1+0$	$\nearrow$	0 инфл.	$\nearrow$	$1-0$

7. (Черт. 20.) Непрекъсната.

8. (Черт. 21.) Функцията се прекъсва за $x=0$ и



Черт. 21

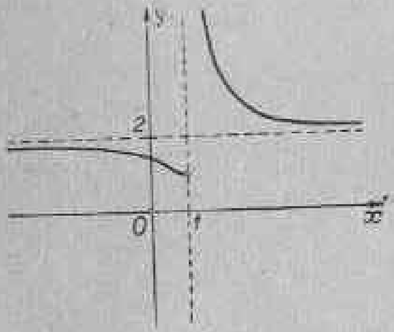
$$y' = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} .$$

x	$-\infty$		-0	$+0$		$+\infty$
y'	$+0$	$+$	$+\infty$	0	$+$	$+0$
y	$1+0$	$\nearrow$	$+\infty$	0	$\nearrow$	$1-0$

9. (Черт. 22.) За $x=a$ се прекъсва:

x	$-\infty$		0	$a-0$	$a+0$		$+\infty$
y'	-0	$-$				$-$	-0
y	$2-0$	$\searrow$	$1+e^{-\frac{1}{a}}$	1	$+\infty$	$\searrow$	$2+0$

10. (Черт. 23.) Достатъчно е да се изследва дадената функция в интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, защото във всеки друг интервал, който се отличава от този с $k\pi\,(k=\pm 1, \pm 2, \ldots)$, стойностите на функцията се повтарят. Нейната производна е



Черт. 22

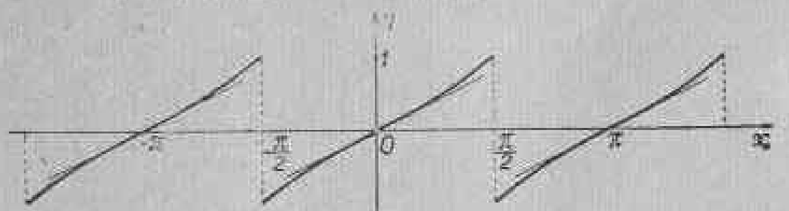
$$y' = \frac{2e^{\operatorname{tg} x}}{(e^{\operatorname{tg} x}+1)^2 \cos^2 x}.$$

Тогава имаме схемата

x	$-\frac{\pi}{2}+0$		0		$\frac{\pi}{2}-0$
y'	$+0$	$+$			$+0$
y	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Оттук се вижда, че точките $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, гдето k е цяло число, са точки на прекъсването. Точките $x=k\pi$ са инфлексни точки.

11. (Черт. 24.) Точките на прекъсването са $x_{1,2}=\pm 1$, които отговарят на нулите на знаменателя. Ще направим едно по-подробно изследване, например около $x=1$, за да видим как се мени y.



Черт. 23

Нека ε е едно малко положително число. За $x=1-\varepsilon$, т. е. наляво от точката 1, имаме

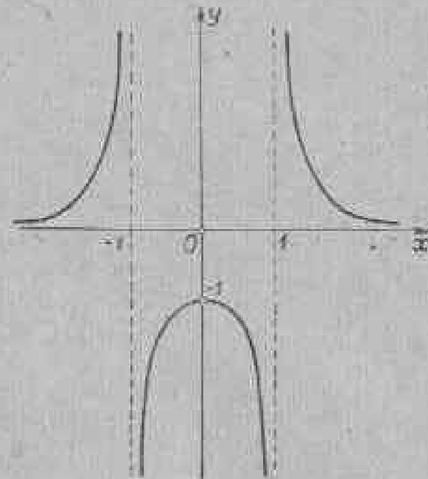
$$y = \frac{1}{(1-\varepsilon)^2-1} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon-2)} \to -\infty,$$

когато $\varepsilon \to 0$. За $x=1+\varepsilon$ имаме съответно

$$y = \frac{1}{(1+\varepsilon)^2-1} = \frac{1}{\varepsilon(\varepsilon+2)} \to +\infty,$$

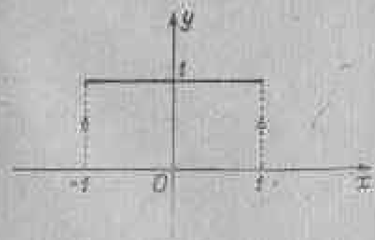
когато $\varepsilon \to 0$. Схемата е

x	$-\infty$		$-1-0$	$-1+0$		0		$1-0$	$1+0$		$+\infty$
y'	$+0$	$+$			$+$		$-$			$-$	-0
y	$+0$	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	-1 max	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$+0$



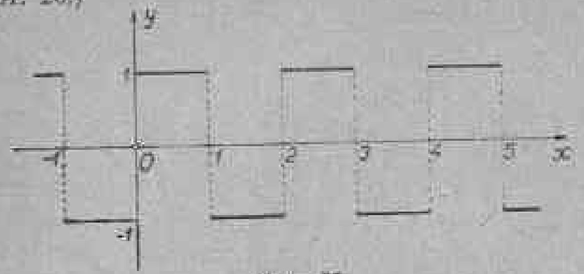
Черт. 24

12. Когато x се намира в интервала $-1<x<1$, $y=1$. Напротив, когато $x^2>1$, y е винаги равно на нула. За $x=\pm 1$ функцията е равна на $\frac{1}{2}$ (черт. 25).



Черт. 25

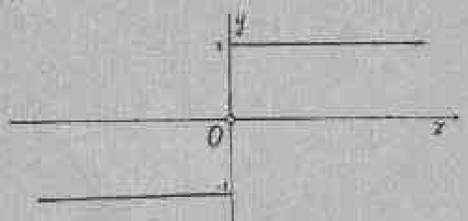
13. (Черт. 26.)



Черт. 26

За $x=0, 1, 3, \ldots$ $\quad \sin\pi x=0,\quad$ тогава $y=0$;
" $0<x<1$ $\quad \sin\pi x>0,\quad$ " $y=1$;
" $1<x<2$ $\quad \sin\pi x<0,\quad$ " $y=-1$;
. . . .
функцията е прекъсната за $x=k$, където k е цяло число.

14. (Черт. 27.)



Черт. 27

15. Графиката на функцията е симетрична спрямо началото на координатната система (черт. 28). Тя пресича оста x в точките $x=\pm\frac{1}{k\pi}$, където $k=1, 2, \ldots$ Функцията добива максимум за

$$x=\frac{2}{(4k+1)\pi} \quad \text{и} \quad x=-\frac{2}{(4k+3)\pi},$$

а минимум за

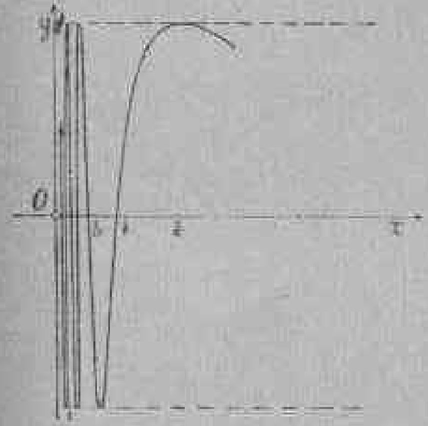
$$x=-\frac{2}{(4k+1)\pi} \quad \text{и} \quad x=\frac{2}{(4k+3)\pi},$$

където $k=0, 1, 2, \ldots$ и тези максимални и минимални стойности лежат съответно на правите $y=1$ и $y=-1$. Инфлексните точки се дават от уравнението $\operatorname{tg}\frac{1}{x}=2x$. Когато x клони към нула, функцията постоянно осцилира между -1 и 1 и за $x=0$ тя не е дефинирана. Следователно

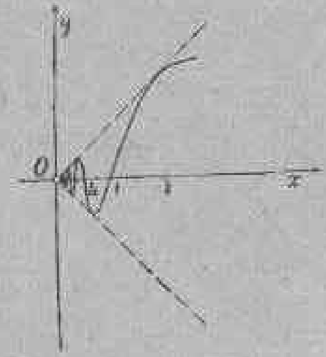
графиката на тази функция в околността на началото не може да се начертае.

16. Графиката на дадената функция е симетрична спрямо оста y (черт. 29). Тя пресича оста x в точките $x=\pm\frac{1}{k\pi}$, където $k=1, 2, \ldots$ Функцията добива максимум и минимум за стойности на x, които анулират уравнението

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=x.$$



Черт. 28



Черт. 29

Тези стойности лежат между $\pm\frac{1}{k\pi}$ и $\pm\frac{2}{(2k+1)\pi}$, където $k=1,2,\ldots$, и при това имаме максимум, когато k е четно, и минимум, когато k е нечетно. Когато x клони към нула, функцията клони към нула чрез безкрайно малки осцилации, които се ограничават от правите $y=x$ и $y=-x$.

Функцията

$$y=x\sin\frac{1}{x}$$

за $x=0$ не е дефинирана, но понеже функцията клони също към нула, когато x клони към нула, тогава можем да положим $y(0)=0$. С това тази функция става дефинирана и непрекъсната в целия интервал $(-\infty, +\infty)$.

Производната ѝ за $x\neq 0$ е

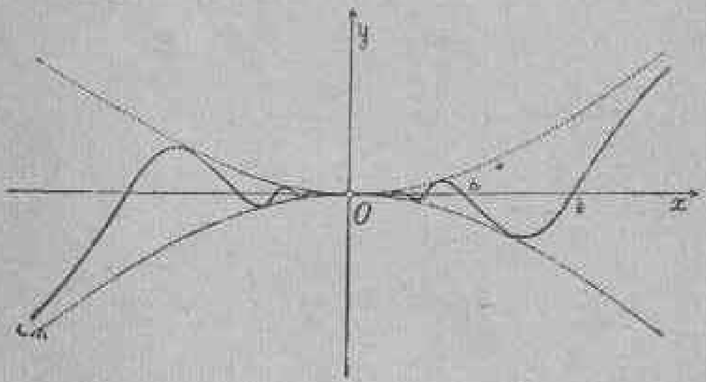
$$y'=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

и за $x=0$ се дава с отношението

$$\lim_{h\to 0}\frac{y(h)-y(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}.$$

Оттук се вижда, че за $x=0$ и когато x клони към нула, функцията не притежава производна.

17. Графиката на тази функция е симетрична спрямо началото на координатната система (черт. 30). Тя пресича оста x в точките



Черт. 30

$x=\frac{1}{k\pi}$, гдето $k=1, 2, \ldots$ Функцията добива максимум и минимум за стойности на x, които удовлетворяват уравнението

$$\operatorname{tg}\frac{1}{x}=\frac{1}{2x}.$$

Когато x клони към нула, функцията клони към нула чрез безкрайно малки и безкрайно много осцилации, които се ограничават от кривите

$$y=x^2 \quad \text{и} \quad y=-x^2.$$

Функцията

$$y=x^2\sin\frac{1}{x}$$

не е дефинирана за $x=0$, но понеже тя клони към нула заедно с x, тогава можем да приемем, че $y(0)=0$ и с това тази функция става дефинирана и непрекъсната в целия интервал $(-\infty, +\infty)$.

Производната ѝ за $x\neq 0$ и $x=0$ е съответно

$$y'=-\cos\frac{1}{x}+2x\sin\frac{1}{x},$$

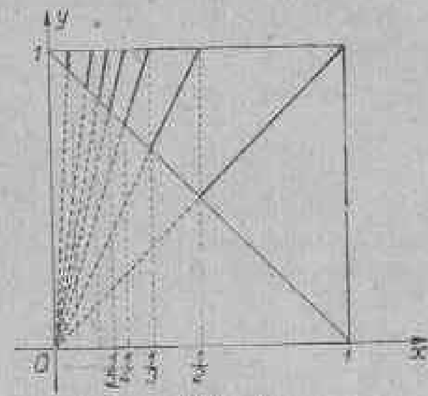
$$y'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}h\sin\frac{1}{h}=0.$$

Първият израз за производната показва, че когато x клони към нула, y' осцилира между -1 и $+1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0}y'$ не съществува; напротив, вторият израз показва, че $y'=0$ за $x=0$. Следователно тези разсъждения показват най-ясно, че дадената функция, която е непрекъсната в интервала $(-\infty, \infty)$, притежава производна за всяка точка и тази производна е прекъсната за $x=0$.

18. Графиката на функцията (черт. 31) представлява безкрайно много отсечки, които се съдържат в интервала $(0, 1)$ между правите

$$y+x=1 \quad \text{и} \quad y=1$$

и на които продълженията минават през началото.



Черт. 31

Функцията

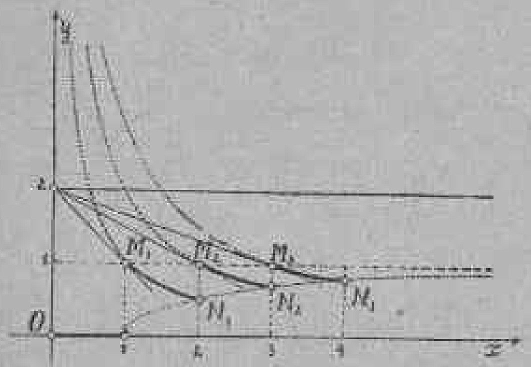
$$y=x\left[\frac{1}{x}\right]$$

не е дефинирана за $x=0$. Обаче тя клони към единица, когато x клони към нула, затова за $x=0$ можем да приемем, че $y(0)=1$ и с това функцията става дефинирана и непрекъсната за точката $x=0$. В околността на точката $(0, 1)$ функцията не може да се изобрази.

19. Функцията е прекъсната за $x=1, 2, 3, \ldots$ Графиката ѝ е представена с хиперболичните дъги M_kN_k ($k=1, 2, \ldots$) и отсечката $(0, 1)$ от Ox (черт. 32).

20. Функцията е прекъсната за точките $x=1, 4, 9, \ldots$ Графиката ѝ е представена от дъгите, върховете на които са върху оста y и посоките на осите са успоредни на положителната посока на оста x. Тези дъги са заключени между правите $y=0$ и $y=1$ (черт. 33).

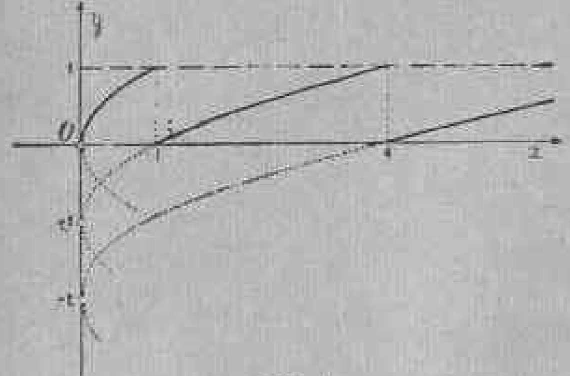
21. Функцията е непрекъсната за всяко положително x. Графиката ѝ е съставена от параболични дъги, които са представени с плътни линии (черт. 34).



Черт. 32

22. 1°. *Предполагаме най-напред, че* $x>0$. Като логаритмуваме формулата на Weierstrass [(2), зад. **79**, § 3], получаваме

$$\ln\Gamma(x)=-\ln x-Cx+\sum_{1}^{\infty}\left[\frac{x}{n}-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right].$$



Черт. 33

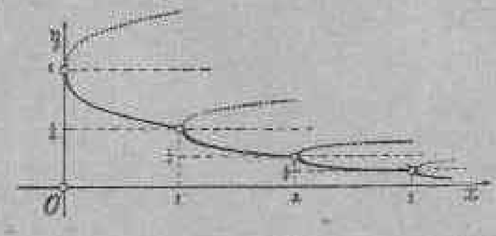
Ако диференцираме* това равенство, намираме

* Дясната страна представлява един безкраен ред, който е диференцируем.

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-\frac{1}{x}-C+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n}\right)=-C+\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x+n-1}\right),$$

откъдето

(1) $$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+C=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{x+2}+\cdots$$



Черт. 34

Дясната страна на това равенство расте винаги с x; тя приема стойност $0<C$ за $x=1$ и $1>C$ за $x=2$. Следователно съществува една стойност ξ в интервала $(1, 2)$, за която дясната страна на (1) е равна на C. Тази стойност ще бъде корен на уравнението $\Gamma'(x)=0$. Ако диференцираме равенството (1) още един път и заместим x с ξ добиваме

$$\frac{\Gamma''(\xi)}{\Gamma(\xi)}=\frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi+1)^2}+\frac{1}{(\xi+2)^2}+\cdots>0.$$

Оттук следва, че $\Gamma(x)$ има минимум за $x=\xi$. С помощта на алгебрата от (1) се намира, че

$$\xi=1{,}4616321\ldots \quad \text{и} \quad \Gamma(\xi)=0{,}8856032\ldots$$

Равенството

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

показва, че когато x расте от ξ до $+\infty$, $\Gamma(x)$ расте безпределно. Също така, когато x намалява от ξ до 0, $\Gamma(x)$ расте безпределно, понеже

$$\lim_{x\to 0} x\Gamma(x)=\lim_{x\to 0}\Gamma(x+1)=\Gamma(1)=1.$$

2°. *Да предположим сега, че* $x<0$. Като приложим няколко пъти формулата

$$\Gamma(r)=(r-1)\,\Gamma(r-1)$$

и положим $r=x+n$, получаваме

$$\Gamma(x+n)=\Gamma(r)=(r-1)(r-2)\ldots(r-n)\,\Gamma(x),$$

отгдето

(2) $$\Gamma(x)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(r)}{(1-r)(2-r)\dots(n-r)}.$$

От тази формула се вижда, че стойностите на $\Gamma(x)$ зависят от стойностите ѝ в интервала (0, 1), в който изключваме границите 0 и 1. Също се вижда, че в интервалите $(-1, 0)$, $(-2, -1)$, ... $\Gamma(x)$ взема алтернативно отрицателни и положителни стойности и за $x=0, -1, -2, -3, \dots$ става ∞ по абсолютна стойност.

Така например за $-n-\varepsilon$ и $-n+1-\varepsilon$, гдето ε е положително и клони към нула, $\Gamma(x)$ взема или само $+\infty$, или само $-\infty$. Оттук можем да заключим, че в интервала $(-n, -n+1)$ функцията $\Gamma(x)$ има max или min в зависимост от това, дали n е четно или нечетно. Ако логаритмуваме равенството (2) и след това диференцираме, намираме

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{2-r}+\dots+\frac{1}{n-r}.$$

Тогава максимумът или минимумът се получава за онези значения на r, които са корени на уравнението

$$\frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}+\frac{1}{1-r}+\frac{1}{2-r}+\dots+\frac{1}{n-r}=0.$$

От (1) и от това равенство се вижда, че когато r расте от 0 до 1, лявата му страна постоянно расте от $-\infty$ до $+\infty$; ето защо съществува в този интервал една само стойност $r=r_n$, която анулира този израз. И така в интервала $(-n, -n+1)$ съществува само един max или min на $\Gamma(x)$ за $x_n=-n+r_n$.

Понеже $0<r_n<1$, то имаме

$$-\frac{\Gamma'(r_n)}{\Gamma(r_n)}=\frac{1}{1-r_n}+\frac{1}{2-r_n}+\dots+\frac{1}{n-r_n}>1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}=H_n,$$

отгдето се вижда, че лявата страна расте безпределно заедно с n, което от своя страна показва, че r трябва да клони към нула.

От друга страна, формулата $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ ни дава

$$\Gamma'(x+1)=x\Gamma'(x)+\Gamma(x),$$

отгдето

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{x\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=-1,$$

понеже

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x)=\infty.$$

Тогава

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_n}{1-r_n}+\frac{r_n}{2-r_n}+\dots+\frac{r_n}{n-r_n}\right)=1$$

и понеже сумата в скобите се намира между

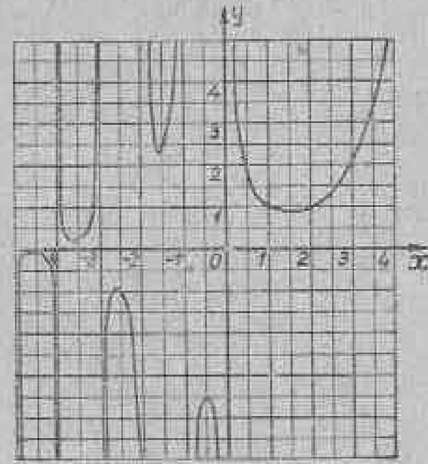
$$r_nH_n \quad \text{и} \quad \frac{r_n}{1-r_n}+r_nH_{n-1},$$

получаваме, че

$$\lim_{n\to\infty} r_nH_n=1 \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} r_n\ln n=1.$$

От формулата (2) добиваме

$$\Gamma(x_n)=\frac{(-1)^n\,\Gamma(r_n+1)}{r_n(1-r_n)\ln n}\cdot\frac{\ln n}{(2-r_n)(3-r_n)\dots(n-r_n)},$$



Черт. 34 а

отгдето

$$|\Gamma(x_n)|<\frac{\Gamma(r_n+1)}{r_n(1-r_n)\ln n}\cdot\frac{\ln n}{(n-1)!}.$$

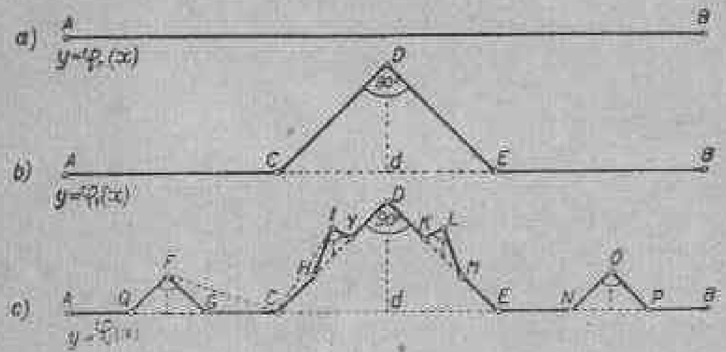
Първият множител на дясната страна на това равенство клони към 1, когато $n\to\infty$, а вторият — към 0. Следователно $\lim_{n\to\infty}\Gamma(x_n)=0$. Това показва, че функцията $\Gamma(x)$ приема всяка стойност, отлична от нула, безбройно много пъти. И така уравнението $\Gamma(x)=k$, което няма решение при $k=0$, има безкрайно много корени за $k\neq 0$ (черт. 35а).

23. Тази функция се дефинира по следния начин: нека разгледаме сегмента (0, 1), или AB, върху оста Ox (черт. 35 а), който ще означим с p_0. Този сегмент дефинира функцията $y=\varphi_0(x)$, гдето $\varphi_0(x)=0$.

За да намерим p_1 (черт. 35 *b*), разделяме отсечката *AB* на три равни части: *AC*, *CE* и *EB*. От тези три отсечки заместваме средната *CE* с двете страни на равнобедрения правоъгълен триъгълник, построен върху нея, т. е.

$$Cd = dD = dE = \frac{1}{2}\, CE,$$

където *d* е проекцията на *D* върху *CE*. Тогава p_1 ще бъде начупената линия *ACDEB*, която ще представим с $y=\varphi_1(x)$.



Черт. 35

За да получим p_2 (черт. 35 *c*), разделяме всяка от страните на p_1 на три равни части и заместваме всяка средна част с двете страни на правоъгълния триъгълник, построен върху тази част, и на който върхът се получава, като прекараме през средата на тази средна отсечка успоредни прави на *Oy* с дължина, равна на половината на дължината на средната отсечка. Получената начупена линия

AQFGCHIYDKLMENOPB

ще означим с p_2 и ще представим с уравнението $y=\varphi_2(x)$, където $\varphi_2(x)$ е непрекъсната функция. Всички ъгли при върховете *F*, *I*, *D*, *L* и *O* на p_2 са прави.

По същия начин ще преминем от начупената линия p_n към p_{n+1}, като разделим всяка страна на p_n на три части и заместим всяка средна част с двете страни на правоъгълния триъгълник, получен по горепоказания начин. Всички функции $\varphi_n(x)$, добити по този начин, са дефинирани и непрекъснати.

Търсената функция $f(x)$ е дефинирана като граница на $\varphi_n(x)$, когато *n* клони към безкрайност, и може да се напише в следния вид:

$$f(x) = \varphi_0(x) + \sum_{1}^{\infty} [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)].$$

Графиката ѝ (Γ) е границата на начупената линия p_n, когато *n* расте безпределно.

1°. Най-напред ще докажем, че така дефинираната *функция f(x) е непрекъсната.*

За тази цел да пресметнем горната граница на $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$, която е положителна или нула за $0 \le x \le 1$. Най-голямата страна на линията p_1 е очевидно $\frac{1}{3}$; най-голямата страна на линията p_2 е $\frac{1}{3^2}$; най-голямата страна на линията p_n е $\frac{1}{3^n}$ и т. н. Ако разгледаме една произволна страна от линията p_n, въз основа на конструкцията, която направихме, $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$ е $\le \frac{1}{6}$ от тази страна.

Оттук е ясно, че

$$\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x) \le \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n},$$

където $0 \le x \le 1$. Следователно редът

$$\sum_{1}^{\infty}[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)],$$

на който членовете са по-малки или най-много равни на тези на геометричната прогресия

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3^n},$$

е равномерно сходящ. Неговата сума $f(x)$ съгласно една теорема от диференциалното смятане е непрекъсната, както и членовете му.

2°. Сега ще покажем, *че функцията f(x) не допуща за никоя стойност на x определена и крайна производна.*

Това ще видим от следните случаи, които се обособяват от различните видове точки, лежащи на графиката ѝ.

а. От самата конструкция се вижда, че върховете на линиите $p_1, p_2, \ldots$ са върху (Γ). Да разгледаме един такъв връх, например *C*, който е общ връх на $p_1, p_2, \ldots$ (черт. 35).

В *C* се пресичат двете страни *CA* и *CD* на p_1, които сключват ъгъл, отличен от нула. Също в *C* се пресичат две страни на всяка линия p_n $(n \ge 2)$, които лежат на *CA* и *CD* и които са съответно равни на $\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots$ от *CA* и *CD*; например в *C* се пресичат страните *CG* и *CH* на p_2. Прочее *C* е граничната точка на съседните върхове на всички линии p_n, лежащи върху *CG*, и също граничната точка на съседните върхове на всички линии p_n, лежащи върху *CH*. Тогава, ако съществува тангента на (Γ) в точка *C*, тя трябва да съвпада едновременно с правите *CG* и *CH*. Това показва, че тази тангента не е определена.

Прочее начупената линия p_2 има между точките G и C един хомотетичен зъбец* на зъбеца QFG спрямо точката C и с отношение $\frac{1}{3}$. Също p_3 има между G и C един хомотетичен зъбец на GFQ спрямо C и с отношение $\frac{1}{3^2}$, който очевидно се намира по-близо до C, отколкото зъбецът p_2, и т. н. Редицата на така образуваните зъбци на p_2, $p_3, \ldots, p_n, \ldots$ клонят към C. Това показва, че има безбройно много точки от (Γ), хомотетични например на F спрямо C и с отношение $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots$, които клонят към C върху правата CF. Също се вижда, че такива точки има върху правата CI и върху всяка права, която принадлежи на ъгъла FCG или ICH и която съединява C с една точка на делението на FG или HI на три равни части, гдето средната част е изоставена, или пък с една точка, добита от делението на една от останалите страни на три части, като премахнем средата, и т. н. Оттук следва, че всяка такава права ще бъде тангента на (Γ), т. е., че тангентата в точка C е неопределена.

b. Нека разгледаме сега една точка от (Γ), която да не е връх на никоя начупена линия p_n. За това необходимо и достатъчно е, щото абсцисата x да не бъде дроб със знаменател 6^n, или, което е все същото,

$$x = \frac{a_1}{6} + \frac{a_2}{6^2} + \cdots + \frac{a_n}{6^n} + \cdots,$$

гдето a_n са $\leqq 5$, но от известно място нататък не всички са нули.

Може да се случи тази точка α, без да бъде връх на p_n, да принадлежи на една страна от p_n и на всички следващи линии на p_n. Страната p_n, която съдържа α, клони към нула, когато n расте безпределно. Например, ако

$$\alpha = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \cdots + \frac{a_n}{3^n} + \cdots,$$

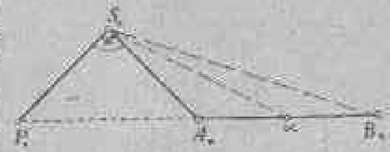
гдето a_n са числа, равни на 0 или 2 и от известно място нататък не всички нули, тогава точката α е от Ox и принадлежи на всяка линия p_n $(n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$, без да бъде връх.

Понеже α е върху оста Ox и е гранична точка на съседните върхове на всички начупени линии p_n, които лежат върху Ox, тогава тангентата на (Γ) в точката α, ако съществува, трябва да се слее с абсцисната ос Ox. От друга страна, ако за пример предположим, че точката се намира върху страната A_nB_n на линия p_n и ако първият съседен зъбец на α е $P_nS_nA_n$ (черт. 36), то ясно е, че когато n клони

* Зъбец наричаме фигурата, образувана от двете страни на един триъгълник; например за триъгълника QFG начупената линия QFG ще наричаме зъбец.

към безкрайност, зъбецът $P_nS_nA_n$ ще клони към α заедно със страната A_nB_n и страната $S_n\alpha$ — към тангентата на (Γ) в точка α.

Обаче тази тангента сключва с оста x ъгъл, който се намира между ъглите $S_nB_nA_n$ и $S_nA_nB_n$, които са постоянни и отлични от нула, когато $n \to \infty$. Прочее ъгълът, който сключва тази тангента, не може да бъде равен на нула. Следователно и в точка α тангентата не е определена, защото съществува повече от една тангента.



Черт. 35

Ако най-после разглежданата точка α от (Γ) не е върху никоя от начупените линии p_n, успоредната права α_1y_1 на y, прекарана през проекцията α_1 на α върху оста Ox, пресича последователно безброй много начупени линии $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots$, индексите на които растат неограничено.

Черт. 35 c показва, че страните на начупените линии са с положителни или с отрицателни ъглови коефициенти. Тогава са възможни три хипотези:

или всички страни на линиите $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots$, които α_1y_1 ще среща, са от известно място нататък с положителни ъглови коефициенти;

или всички тези страни са от известно място нататък с отрицателни ъглови коефициенти;

или най-сетне в редицата от тези страни има безкрайно много с положителни ъглови коефициенти.

Вторият случай се разглежда както първият. Нека първите две страни с положителни ъглови коефициенти, които пресичат правата α_1y_1, са AB и AC (черт. 37), гдето AC и CB са двете страни, които заместват AB в конструкцията, която позволява да преминем от p_n в p_{n+1}. Например AB ще принадлежи на една страна от p_n', $p_{n+1}', \ldots, p_{i-1}'$ и ACB ще принадлежи на p_i'. Триъгълникът ACB, гдето ъгълът C е прав, показва, че

$$\widehat{AC, Oy} = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}\,\widehat{CDB} = \frac{1}{2}\,\widehat{AB, Oy_1}.$$

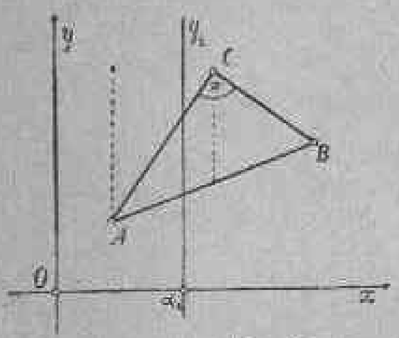
Тук D е пресечната точка на AB с правата, прекарана през C и успоредна на Oy.

Ъглите на Oy със страните на всички p_n, които срещат α_1y_1 последователно, ще бъдат

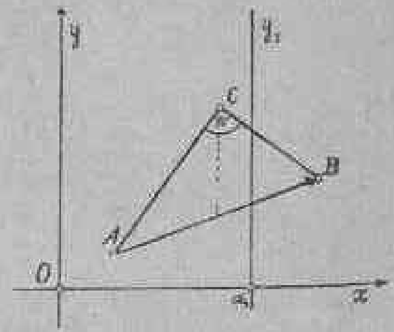
$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2^2}, \ldots, \frac{\pi}{2^n}, \ldots,$$

които клонят към нула. Прочее, ако в точката α графиката (Γ) има тангента, то понеже последователните страни на всички p_n, срещащи α_1y_1, клонят към α, краищата на които са върху (Γ) от едната или другата страна на α, направленията на тези страни трябва да клонят към направлението на тангентата в тази точка. Значи, ако в α имаме една напълно определена тангента, тя трябва да бъде успоредна на Oy. Следователно $f(x)$ няма крайна производна за $x=\alpha_1$.

Напротив, ако в редицата от страните на всички линии p_n, които срещат $\alpha_1 y_1$, има безбройно много страни с положителни ъглови кое-



Черт. 37



Черт. 38

фициенти и безбройно много с отрицателни коефициенти (черт. 38), тогава да разгледаме две от тези последователни страни AB и BC, ъгловите коефициенти на които са с противни знаци. Ясно е, че ъгълът ABC е между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$. Следователно невъзможно е, щото страните с положителни и тези с отрицателни ъглови коефициенти да имат общо гранично направление, понеже всяка страна с положителен коефициент, която следва една страна с отрицателен коефициент, сключва с нея ъгъл, заключен между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{2}$. Обаче ако тангентата в α беше единствена и определена, разглежданите последователни страни, краищата на които са точки от (Γ), които клонят към α, но са разположени от двете страни на α, биха имали за единствено гранично положение тангентата в α. Прочее (Γ) няма определена тангента и в точка α.

По такъв начин доказахме, че за никоя стойност на x функцията $f(x)$ няма крайна и определена производна.

24. Доказателството се извършва, като за x се дават рационални и ирационални стойности.

25. Ако в даденото уравнение положим $x=y$, получаваме

$$2f(x)=f(2x).$$

Ако сега положим $y=2x$, то даденото уравнение добива вида

$$f(2x)+f(x)=f(3x)$$

или като вземем пред вид горното равенство, намираме

$$3f(x)=f(3x).$$

Като продължаваме по същия начин, най-сетне ще получим

$$nf(x)=f(nx).$$

Тогава, ако $x=\frac{p}{q}$, ще можем да пишем

$$f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=f\left(p\cdot\frac{1}{q}\right)=pf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}\cdot qf\left(\frac{1}{q}\right)=\frac{p}{q}f\left(\frac{q}{q}\right)=\frac{p}{q}f(1)=ax,$$

гдето $f(1)=a$.

От друга страна, за $y=-x$ даденото уравнение се обръща във вида

$$f(x)+f(-x)=f(0)=0,$$

или

$$f(x)=-f(-x).$$

Прочее и за $x\leq 0$ $f(x)=ax$.

Ако сега x е едно ирационално число и вземем една рационална редица от числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, която клони към това число, то понеже функцията $f(x)$ е непрекъсната, имаме

$$f(x)=f(\lim_{n\to\infty} x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} ax_n=ax.$$

И така за всяко реално значение на x даденото уравнение има за единствено решение линейната функция ax.

26. Взема се пред вид предната задача.

27. Ще докажем случая, когато $f(x)\geq 1$, защото при другия случай доказателството е аналогично.

Като заместим в даденото уравнението $y=0$, получаваме, че

$$f(0)=1.$$

Тогава за едно произволно значение $x=x_1$ можем да предположим, че

$$f(x_1)=\operatorname{ch}\frac{x_1}{a},$$

защото $\operatorname{ch} x$ взема всички стойности, по-големи или равни на единица.

Като положим сега в даденото уравнение $x=y$, добиваме

$$f(2x)+1=2f^2(x),$$

или

$$(1) \qquad f(x)+1=2f^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

което показва, че ако познаваме стойността $f(x_1)$, можем да намерим $f\left(\frac{x_1}{2}\right)$. Като разсъждаваме по същия начин, от тази формула можем да намерим $f\left(\frac{x_1}{2^n}\right)$ като еднозначна функция на $f(x_1)$, защото $f(x_1)$ е положителна.

Ако в даденото уравнение заместим последователно

$$x=p\frac{x_1}{2^n}, \quad y=\frac{x_1}{2^n}, \text{ гдето } p=1, 2, \ldots, \infty,$$

получаваме също стойността $f\left(p\frac{x_1}{2^n}\right)$ като еднозначна функция на $f(x_1)$. Обаче тези стойности съвпадат за всички цели значения на p и на n с

$$\operatorname{ch}\left(\frac{p}{2^n}\frac{x_1}{a}\right)=\frac{e^{\frac{p}{a}\frac{x_1}{2^n}}+e^{-\frac{p}{a}\frac{x_1}{2^n}}}{2},$$

защото даденото уравнение и уравнението (1) принадлежат също на функцията $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. Следователно двете функции $f(x)$ и $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ съвпадат за всички стойности на x от вида $\frac{px_1}{2^n}$.

Обаче всяка стойност на x може да се заключи между

$$\frac{px_1}{2^n} \text{ и } \frac{(p+1)x_1}{2^n},$$

отгдето следва, че граничните стойности на $f(x)$ и $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ ще бъдат равни, защото функциите $f(x)$ и $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$ са непрекъснати.

Прочее, когато $f(x)$ е непрекъсната функция, функционалното уравнение допуща за решение или $\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, или $\cos\frac{x}{a}$.

28. Да разгледаме функцията

$$y=\operatorname{arc\,tg} x-\frac{x}{1+x^2}.$$

Нейната производна е

$$y'=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Понеже тази производна е винаги положителна, y расте постоянно от 0 до $\frac{\pi}{2}$, когато x взема всички стойности от 0 до $+\infty$.

Като заместим x с $-x$, y се заменя с $-y$. Прочее даденото уравнение има само един реален корен, когато m е между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, и той ще има знака на m. Ако m е вън от интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, даденото уравнение няма нито един реален корен.

29. Ако $m<1$, уравнението има само един положителен корен.

30. Да построим графиката на функцията

$$y=\frac{\sin(x-\alpha)}{\sin^4 x}.$$

Производната на тази функция

$$y'=\frac{\cos x\cos(x-\alpha)[\operatorname{tg} x-4\operatorname{tg}(x-\alpha)]}{\sin^5 x}$$

се анулира за стойности на x, които са корени на уравнението

$$\operatorname{tg} x-4\operatorname{tg}(x-\alpha)=0$$

или

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+4\operatorname{tg}\alpha=0,$$

отгдето

$$(1) \qquad \operatorname{tg} x=\frac{3\pm\sqrt{9-16\operatorname{tg}^2\alpha}}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

Три случая се представят за тази функция:

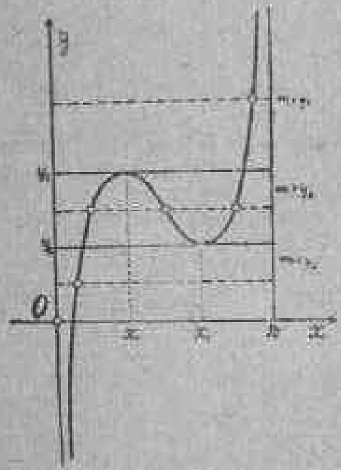
1°. $\operatorname{tg}\alpha>\frac{3}{4}$. — Тогава стойностите, които ще намерим за $\operatorname{tg} x$, са имагинерни. Това показва, че y' е положително за всички стойности на x в интервала $(0, \pi)$, отгдето следва, че y расте от $-\infty$ до $+\infty$, когато x варира от 0 до π. Прочее даденото уравнение допуща само един корен.

2°. $0<\operatorname{tg}\alpha<\frac{3}{4}$. — Двете стойности $\operatorname{tg} x_1$ и $\operatorname{tg} x_2$ на $\operatorname{tg} x$, дадени от уравнението (1), са реални и положителни.

Тогава вариацията на функцията в интервала $(0, \pi)$ ще се даде от схемата

x	0		x_1		x_2		π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+$	$\searrow$	$+$	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		
			y_1		y_2		

Графиката на тази функция е дадена на черт. 39.



Черт. 39

Оттук заключаваме, че ако $m < y_2$, даденото уравнение ще има само един корен между нула и π.

Напротив, то ще има три корена, ако m се намира между y_2 и y_1, и пак само един, ако $m > y_1$.

3°. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$. — Тогава y' има двукратна нула, което показва, че $y' \geqq 0$ в интервала $(0, \pi)$. Следователно в този интервал y постоянно расте от $-\infty$ до $+\infty$, от което заключаваме, че уравнението има само един корен.

31. Лесно е да се види, че даденото уравнение има безбройно много реални корени, които са отделени в интервалите

$$\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{(k+2)\pi}{2}\right),$$

гдето $k = 0, \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$ Обаче това уравнение не притежава имагинерни корени. И наистина, ако положим $z = x + iy$ в уравнението $z = \operatorname{tg} z$, получаваме

$$x + iy = \operatorname{tg} z = \frac{\sin(x + iy)}{\cos(x + iy)} = \frac{\sin 2x + \sin 2yi}{\cos 2x + \cos 2yi}.$$

Но понеже

$$\sin 2yi = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\, i,$$

$$\cos 2yi = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2},$$

то горното равенство добива вида

$$(1) \qquad x + iy = \frac{\sin 2x + \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}\, i}{\cos 2x + \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}},$$

отгдето

$$(2) \qquad x = \frac{2\sin 2x}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}, \quad y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}.$$

Като предположим, че x и y са отлични от нула и разделим тези две равенства, намираме

$$(3) \qquad \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y}.$$

Обаче дясната страна на това равенство, развита в степенен ред, има вида

$$\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{4y} = 1 + \frac{(2y)^2}{3!} + \frac{(2y)^4}{5!} + \cdots$$

и е винаги $\geqq 1$. Понеже лявата страна на (3) е винаги $\leqq 1$, за да има смисъл уравнение (3), трябва $x = 0$, $y = 0$, което изключихме. Следователно то е невъзможно.

Ако предположим сега, че $x = 0$, то обязателно ще трябва и $y = 0$. Наистина, ако положим $x = 0$ в уравнението (1), получаваме

$$y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2 + e^{2y} + e^{-2y}} = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{(e^{y} + e^{-y})^2},$$

или

$$y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{e^{y} + e^{-y}},$$

или още, като развием числителя и знаменателя на дясната страна на това равенство:

$$1 = \frac{1 + \frac{y^2}{3!} + \frac{y^4}{5!} + \cdots}{1 + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots},$$

което е възможно само когато $y = 0$.

Прочее даденото уравнение има само реални корени.

32. Ако означим с a апотемата на конуса и с x височината му, тогава обемът му е

$$V = \frac{1}{3}\pi (a^2 - x^2)\, x.$$

Вариациите на този обем са същите както на функцията

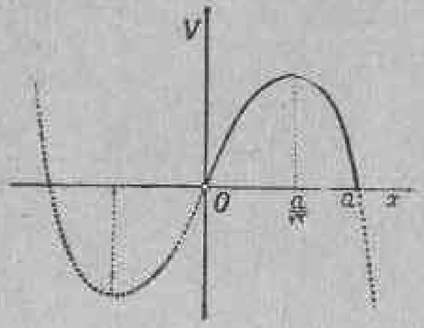
$$y = (a^2 - x^2)\, x, \quad y' = a^2 - 3x^2,$$

вариацията на която се дава от схемата

x	$-\infty$		$-a$		$-\frac{a}{\sqrt{3}}$		0		$+\frac{a}{\sqrt{3}}$		a		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2a^3}{3\sqrt{3}}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Графиката на тази функция е дадена на черт. 40. Обаче само частта ѝ в интервала $(0, a)$ отговаря на нашата геометрична задача.

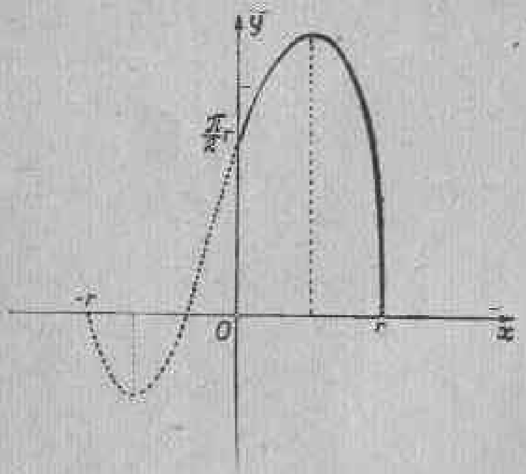
33. Ако означим с $2x$ височината на цилиндъра, то неговият обем и неговата пълна повърхнина са съответно



Черт. 40

$$V=2\pi x(r^2-x^2) \qquad \text{(черт. 40, гдето } a=r\text{)},$$

$$S=2\pi(r^2-x^2+2x\sqrt{r^2-x^2}) \qquad \text{(черт. 41)}.$$



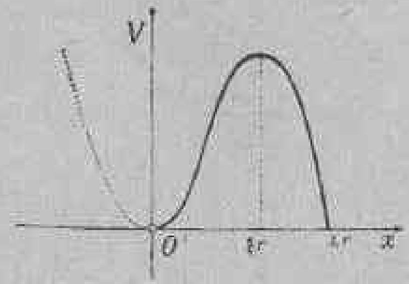
Черт. 41

Производната на S е

$$\frac{1}{2\pi}S'=-2x+2\sqrt{r^2-x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Нулите на S' са

$$-\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}\,r, \quad \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}}\,r.$$

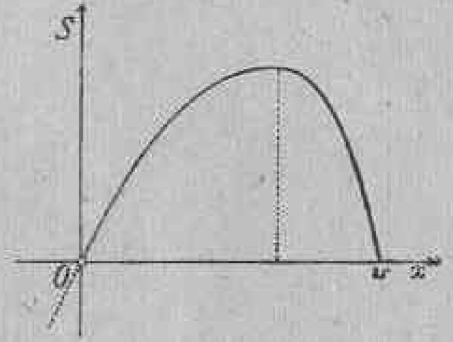


Черт. 42

Обемът и пълната повърхнина на вписания конус са съответно

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2(2r-x) \qquad \text{(черт. 42)},$$

$$S=\pi x[2r-x+\sqrt{2r(2r-x)}] \qquad \text{(черт. 43)},$$



Черт. 43

гдето x е височината на конуса. Производната на S е

$$\frac{1}{\pi}S'=2(r-x)+\sqrt{\frac{r}{2}}\,\frac{4r-3x}{\sqrt{2r-x}}.$$

S' има само една нула в интервала $(0, 2r)$.

34. Обемът е

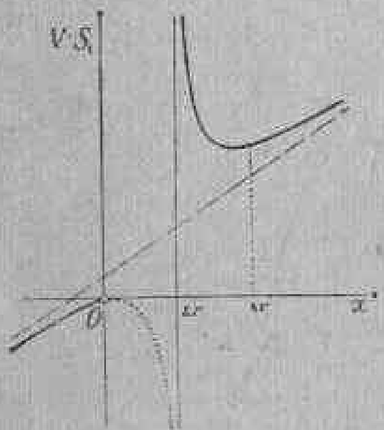
$$V=\frac{1}{3}\,\frac{\pi r^2 x^2}{x-2r} \qquad \text{(черт. 44);}$$

пълната повърхнина е

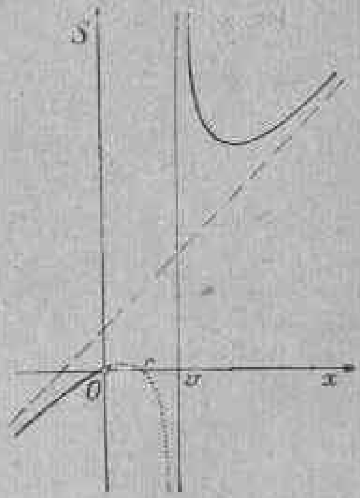
$$S_1=\frac{\pi r x^2}{x-2r} \qquad \text{(черт. 44)}$$

околната повърхнина е

$$S=\frac{\pi r x(x-r)}{x-2r} \qquad \text{(черт. 45),}$$



Черт. 44



Черт. 45

където x е височината на конуса. В двата чертежа клонът за положителни значения на x отговаря на вариациите на величините V, S, S_1 при големия описан конус, когато клонът за отрицателни значения отговаря на вариациите на същите величини на описания малък конус.

§ 9. Частни производни и диференциали от първи и по-висок ред на функции на няколко независими променливи. Производни и диференциали на съставни функции

Основни формули

Тотални диференциали на функцията $z=f(x,y)$:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)z,$$

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2=\left(\frac{\partial}{\partial z}dx+\frac{\partial}{\partial z}dy\right)^2 z,$$

. . . .

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dz\right)^n z;$$

коефициентите пред dx, dy, dx^2, $2dx\,dy$, ... са съответно частните производни $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, ...

Тотални диференциали на съставната функция $z=f(\xi,\eta,\dots)$, където $\xi=\varphi(x,y)$, $\eta=\psi(x,y)$, ...:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d\eta+\cdots,$$

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial \xi}d\xi+\frac{\partial}{\partial \eta}d\eta+\cdots\right)^2 z+\frac{\partial z}{\partial \xi}d^2\xi+\frac{\partial z}{\partial \eta}d^2\eta+\cdots$$

. . . .

1. За да получим тоталния диференциал на $z=\sqrt{x^2-y^2}$, диференцираме $\sqrt{x^2-y^2}$ най-напред по x, като смятаме y за постоянно, и получения резултат умножаваме с dx; след това прибавяме резултата, получен от диференцирането на $\sqrt{x^2-y^2}$ по y, като смятаме x за постоянно, умножен с dy.

Така намираме

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},\quad dz=\frac{x\,dx-y\,dy}{\sqrt{x^2-y^2}}.$$

Тоталният диференциал може да се намери още, като се диференцира дадената функция относно групата x^2-y^2 и след това се приложи за тази група търсенето на тоталния диференциал по начина, описан по-горе:

$$dz=\frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\,d(x^2-y^2)=\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\,dx-y\,dy).$$

2. $dz = \left[6x^2(x^3-2y) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\right]dx - \left[4(x^3-2y) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\right]dy.$

3. $dz = 2(\sin 3x + \cos y)(3\cos 3x\,dx - \sin y\,dy).$

4. $dz = 3(3x-2y)^2(3dx - 2dy).$

5. $dz = 3(2x-5y^2)(2dx - 10y\,dy).$

6. $dz = \frac{2dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}.$

7. $dz = \frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2}.$

8. $dz = 2\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y\sqrt{x^2-y^2}}.$

9. $dz = 2\,\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2 \sin 2\frac{x}{y}}.$

10. $dz = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy.$

11. $du = n(x^n - 3e^y + a\ln z)^{n-1}\left(nx^{n-1}dx - 3e^y\,dy + \frac{a}{z}dz\right).$

12. $du = \frac{ye^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dz + \frac{xe^z(x\,dy - y\,dx)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

13. $du = z^{y^x} y^x \ln z\left(\ln y\,dx + \frac{x}{y}dy + \frac{1}{z\ln z}dz\right).$ — Най-напред дадената функция се логаритмува два пъти.

14. $du = (y-\sqrt{y^2-z^2})^{x-1}\Big[(y-\sqrt{y^2-z^2})\ln(y-\sqrt{y^2-z^2})\,dx$

$$- x\,\frac{(y-\sqrt{y^2-z^2})\,dy - z\,dz}{\sqrt{y^2-z^2}}\Big].$$

15. $d^2z = 6\,dx^2 + 4y\,dx\,dy + (2x + 12y^2)\,dy^2.$

16. $d^2z = e^x(y^2dx^2 + 4y\,dx\,dy + 2dy^2).$

17. $d^2z = e^{\sin x}(\cos^2 x - \sin x)\,dx^2$

$$-[2\cos y\,dx\,dy + x(\cos^2 y - \sin y)\,dy^2]\,e^{\sin y}.$$

18. $d^2z = e^{x+y}(dx^2 + 2dx\,dy + dy^2).$

19. $d^2u = \frac{x\,dx^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y\,dy^2}{(1-y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{z\,dz^2}{(1-z^2)^{\frac{3}{2}}}.$

Полага се предварително

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\varphi \quad \text{и} \quad z = \sin\psi.$$

20. $d^3u = n(n-1)(n-2)y^p x^{n-3}dx^3$

$$+3n(n-1)px^{n-2}y^{p-1}dx^2dy + 3p(p-1)ny^{p-2}x^{n-1}dx\,dy^2$$

$$+p(p-1)(p-2)y^{p-3}x^n\,dy^3.$$

— Най-просто се получава резултатът, като се използува формулата на Leibniz:

$$d^nz = \psi\,d^n\varphi + \binom{n}{1}d\psi\,d^{n-1}\varphi + \cdots + \binom{n}{n}\varphi\,d^n\psi,$$

където

$$z = \varphi(x, y)\,\psi(x, y).$$

21. $d^3u = 6\,dx\,dy\,dz.$

22. Ако диференцираме последователно два пъти дадената функция, получаваме

$$du = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz),$$

$$d^2u = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^2.$$

Оттук заключаваме, че

$$d^nu = e^{ax+by+cz}(a\,dx + b\,dy + c\,dz)^n.$$

23. Ако диференцираме дадената функция, имаме

$$du = \cos(x+y+z)(dx+dy+dz) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x + y + z\right)(dx+dy+dz).$$

За втория диференциал намираме

$$d^2u = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x + y + z\right)(dx+dy+dz)^2.$$

Оттук е ясен законът, по който се образуват последователните диференциали. Прочее можем да пишем

$$d^nu = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x + y + z\right)(dx+dy+dz)^n.$$

24. $d^nu = \cos\left(n\frac{\pi}{2} + x + y - z\right)(dx + dy - dz)^n.$

25. $d^n u = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\dfrac{(a\,dx+b\,dy+c\,dz)^n}{(ax+by+cz)^n}$.

26. $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y} = \dfrac{y^2(y-x)}{(2xy-y^2)^{\frac{5}{2}}}$.

27. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\dfrac{2x^3y}{(x^4-y^4)^{\frac{3}{2}}}$.

28. $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1+3xyz+x^2y^2z^2)$.

29. $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y} = \dfrac{2(\cos^2 x+3\sin^2 x)}{\cos^4 x}$.

30. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{2}{(x+y)^2}$.

31. $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y\partial z} = 6e^x yz^2 + 8yz$.

33. Производната по x е

$$\frac{dy}{dx} = 4(2u-3v)u'_x - 6(2u-3v)v'_x.$$

Обаче

$$u'_x = \frac{1}{(3x+1)\sqrt{8x^2+6x+1}} \quad \text{и} \quad v'_x = \frac{2x}{x^2+1},$$

тогава

$$\frac{dy}{dx} = \left[2\arcsin\frac{x}{3x+1} - 3\ln(x^2+1)\right] \times \left[\frac{4}{(3x+1)\sqrt{8x^2+6x+1}} - \frac{12x}{x^2+1}\right].$$

34. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \cos u\sin^2 x + \sin v\cos^2 x - 3\sin u\sin x\cos x$

$+ 3\cos v\sin x\cos x + \cos u\sin x + \sin v\cos x.$

35. a) $dz = \left[\dfrac{b}{uv(\ln u)^2} - \dfrac{av}{u^2}\right]du + \left(\dfrac{a}{u} + \dfrac{b}{v^2\ln u}\right)dv.$

b) $dz = (f'_x + f'_y\varphi'_x)\,dx.$

c) $du = (f'_x + f'_z\varphi'_x)\,dx + (f'_y + f'_z\varphi'_y)\,dy.$

d) $du = \left(f - \dfrac{x}{y}f'_{\frac{x}{y}}\right)dx + x\left(\dfrac{1}{z}f'_{\frac{y}{z}} - \dfrac{x}{y^2}f'_{\frac{x}{y}}\right)dy - \dfrac{xy}{z^2}f'_{\frac{y}{z}}\,dz.$

e) $du = f'_x\,dx + (f'_y + 2ayf'_{z+ay^2})\,dy + f'_{z+ay^2}\,dz.$

36. a) $d^2z = 4\,dx^2 - 10\,dx\,dy + 4\,dy^2$.

b) $$d^2z = \left[\frac{x^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]dx^2 + 2\left[\frac{xy}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right.$$

$$\left.-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}\right]dx\,dy + \left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial z}{\partial u}\right]dy^2.$$

37. Първите частни производни на дадената функция са

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial f}{\partial z} = -2z.$$

Като заместим тези изрази в тъждеството на Euler

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2f(x,\ y,\ z),$$

получаваме

$$\frac{2x}{a^2}x + \frac{2y}{b^2}y - 2zz = 2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2\right),$$

което е очевидно тъждество.

47. a) Първите частни производни са

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -k\frac{y}{x^2+y^2} + 2x\varphi'(x^2+y^2),$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = k\frac{x}{x^2+y^2} + 2y\varphi'(x^2+y^2).$$

Като заместим в даденото уравнение, получаваме

$$qx - py - k = k\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} - k \equiv 0.$$

b) Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{z^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{z^2+x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

получаваме

(1) $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Оттук намираме

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2} = 2\frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2} = 2\frac{2y^2-z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} = 2\frac{2z^2-x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}},$$

отгдето

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2} = 0.$$

От друга страна, равенството (1) показва, че

$$\Delta_2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^2 \Delta u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}+\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\,\partial z^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial z^2\,\partial x^2}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}.$$

Следователно последният израз е тъждествено равен на нула.

48. След като логаритмуваме дадената функция и диференцираме, получаваме

$$\frac{y'}{y} = \frac{ax'}{ax+b} - \frac{cx'}{cx+d}$$

или

$$\frac{1}{y'} = \frac{(cx+d)^2}{ad-cb}\,\frac{1}{x'}.$$

Ако диференцираме два пъти логаритъма на този израз, намираме

$$-\frac{y''}{y'} = 2\frac{cx'}{cx+d} - \frac{x''}{x'},$$

(1) $$-\frac{y'''}{y'}+\frac{y''^2}{y'^2} = 2\frac{cx''(cx+d)-c^2x'^2}{(cx+d)^2} - \frac{x'''}{x'}+\frac{x''^2}{x'^2}.$$

Квадратът на първото равенство, умножен с $\frac{1}{2}$, е

$$\frac{1}{2}\frac{y''^2}{y'^2} = 2\frac{c^2x'^2}{(cx+d)^2} - 2\frac{cx''}{cx+d}+\frac{1}{2}\frac{x''^2}{x'^2}.$$

Ако прибавим това равенство към (1), получаваме търсения резултат:

$$\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2 = \frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2.$$

$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ се нарича *инвариант на* Schwarz.

49. Като заместим частните производни на дадената функция:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ae^{ax+by+c},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2e^{ax+by+c},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = be^{ax+by+c},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = b^2e^{ax+by+c},$$

в даденото уравнение, намираме търсената зависимост

$$Aa^2+Bb^2+Ca+Db=0.$$

50. Ако означим с $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$ адюнгираните количества на дадената детерминанта и я развием по елементите на 1-ва колона, имаме

$$y = a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3.$$

Тогава частните производни на тази функция спрямо u_1, u_2, u_3 са

$$\frac{\partial y}{\partial u_1} = a_1,\quad \frac{\partial y}{\partial u_2} = a_2,\quad \frac{\partial y}{\partial u_3} = a_3.$$

По същия начин, като развием детерминантата по елементите на втората и третата колона, получаваме за частните ѝ производни относно $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3$ следните стойности:

$$\frac{\partial y}{\partial v_1} = b_1,\quad \frac{\partial y}{\partial v_2} = b_2,\quad \frac{\partial y}{\partial v_3} = b_3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial w_1} = c_1,\quad \frac{\partial y}{\partial w_2} = c_2,\quad \frac{\partial y}{\partial w_3} = c_3.$$

Обаче производната на детерминантата е

$$y' = \frac{\partial y}{\partial u_1}u_1' + \frac{\partial y}{\partial u_2}u_2' + \cdots + \frac{\partial y}{\partial w_3}w_3',$$

или

$$y' = a_1u_1'+a_2u_2'+a_3u_3'+b_1v_1'+b_2v_2'+b_3v_3'+c_1w_1'+c_2w_2'+c_3w_3'.$$

Оттук виждаме, че

$$y' = \begin{vmatrix} u_1' & v_1 & w_1 \\ u_2' & v_2 & w_2 \\ u_3' & v_3 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1' & w_1 \\ u_2 & v_2' & w_2 \\ u_3 & v_3' & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1' \\ u_2 & v_2 & w_2' \\ u_3 & v_3 & w_3' \end{vmatrix}.$$

51. От уравнението

$$F(X, Y, Z, T) = f(x, y, z, t)$$

чрез диференциране извеждаме

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial X}, \\ \frac{\partial F}{\partial Y} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial Y}, \\ \frac{\partial F}{\partial Z} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial Z} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial Z}, \\ \frac{\partial F}{\partial T} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial T}. \end{aligned}\right.$$

Понеже функциите $x, y, \ldots$ са хомогенни функции от първа степен, то съществуват равенства от вида

$$X\frac{\partial x}{\partial X} + Y\frac{\partial x}{\partial Y} + \cdots + T\frac{\partial x}{\partial T} = x.$$

Тогава, ако умножим уравненията (1) съответно с $X, Y, \ldots, T$ и ги съберем, получаваме

$$X\frac{\partial F}{\partial X} + Y\frac{\partial F}{\partial Y} + Z\frac{\partial F}{\partial Z} + T\frac{\partial F}{\partial T} = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + t\frac{\partial f}{\partial t}.$$

Тази релация има приложение в теорията на хомогенните функции.

52. Имаме

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & y+z \\ 2y & 1 & x+z \\ 2z & 1 & y+x \end{vmatrix}$$

$$= 2(x+y+z)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Като вземем пред вид, че

$$v^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = u + 2w,$$

добиваме търсената функционална зависимост:

$$v^2 - u - 2w = 0.$$

57. Въз основа на тъждеството на Euler можем да пишем

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} nu &= x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3, \\ (n-1)\,u_1 &= x_1u_{11} + x_2u_{12} + x_3u_{13}, \\ (n-1)\,u_2 &= x_1u_{21} + x_2u_{22} + x_3u_{23}, \\ (n-1)\,u_3 &= x_1u_{31} + x_2u_{32} + x_3u_{33}. \end{aligned}\right.$$

Нека означим с H лявата детерминанта на уравнение (1). Ако умножим колоните на тази детерминанта съответно с x_1, x_2, x_3 и прибавим първите две към последната и вземем пред вид уравненията (2), получаваме

$$\frac{Hx_3}{n-1} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_3 \end{vmatrix}.$$

Като оперираме върху линиите на новата детерминанта по същия начин както върху колоните на първата, намираме

$$\frac{Hx_3^2}{n-1} = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_2 \\ (n-1)\,u_1 & (n-1)\,u_2 & nu \end{vmatrix},$$

отгдето следва релацията (1).

Тази детерминанта се използува при разрешаване на много въпроси от алгебрата и геометрията и се нарича детерминанта на Hesse — на името на математика, който пръв я е приложил (вж. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Berlin, T. XXVIII и XXXVIII).

58.
$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_3}\right)^2 - \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^2 = 0, \\ &\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2}\,\frac{\partial z}{\partial x_3} - \frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_3}\,\frac{\partial z}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}\right.$$

59. Като диференцираме обема $V = xyz$, намираме

$$dV = yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Очевидно е, че най-голямата грешка за dV ще имаме, когато елементарните грешки при измерването dx, dy и dz имат еднакъв знак. Грешката става нула, ако е изпълнено условието

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+\frac{dz}{z}=0.$$

60. Грешката на относителното тегло s, която се получава от грешките, направени при измерването на p и w, се получава, като диференцираме дадената формула:

$$ds=\frac{dp}{w}-\frac{p}{w^2}dw.$$

Очевидно е, че тази грешка ще бъде най-голяма, когато dp и dw имат противни знаци. Тя става нула при условие, че

$$w\,dp=p\,dw \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p}=\frac{dw}{w}.$$

§ 10. Максимум и минимум на функции с няколко променливи

Основни указания

Ако съществуват първите частни производни на функцията $z=f(x,y)$, имаме в дадена точка максимум или минимум, ако

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad \text{и} \quad \Delta=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}<0.$$

Максимум имаме, ако $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ са отрицателни, а минимум — ако те са положителни.

Нямаме нито минимум, нито максимум, ако $\Delta>0$. Случаят е съмнителен, ако $\Delta=0$; за този случай трябва специално изследване.

1. Стойностите x и y, които съответствуват на максимум или минимум, са корени на уравненията

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+4xy^2-8=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4x^2y+8=0.$$

Като елиминираме x от двете уравнения, получаваме

$$y^3+1=0;$$

следва, че $y=-1$ и $x=1$ са решения на горната система.

Следователно за $x=1$ и $y=-1$ ще имаме минимум, защото

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=64-(12+4)(12+4)<0$$

и $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ са положителни.

2. Частните производни ни дават

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4x+4y=0, \quad \text{или} \quad x^3+y^3=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4x-4y=0, \quad \text{или} \quad x^3-2x=0.$$

Решенията на тази система са:

$$x_1=0, \qquad y_1=0;$$

$$x_{2,3}=\pm\sqrt{2}, \quad y_{2,3}=\mp\sqrt{2}.$$

За първата система стойности имаме

$$\Delta=4^2-4^2=0,$$

което показва, че този случай е съмнителен. Обаче лесно е да се види, че за тази система стойности нямаме нито минимум, нито максимум. И наистина стойността на функцията

$$z=x^4\left(1+\frac{y^4}{x^4}\right)-2x^2\left(\frac{y}{x}-1\right)^2$$

за безкрайно малки значения на x и y мени своя знак, когато $\frac{y}{x}$ варира от нула до 1.

За $x_{2,3}=\pm\sqrt{2}$ и $y_{2,3}=\mp\sqrt{2}$ имаме минимум, защото $\Delta<0$, а $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ са >0.

3. Min за $x=\frac{8}{3}$ и $y=\frac{2}{3}$.

4. $\begin{cases} \text{Max за } x=\frac{a}{2} \text{ и } y=\frac{a}{3}; \\ \text{нито min, нито max за } x=0 \text{ и } y=0. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \text{Нито min, нито max за } x=0 \text{ и } y=0; \\ \text{min за } x=3 \text{ и } y=3. \end{cases}$

6. Min за $x=-\frac{3}{8}, y=-\frac{37}{24}$.

7. $\begin{cases} \text{Min за } x=1+\sqrt{2} \text{ и } y=2\pm\sqrt{3}; \\ \max \text{ за } x=1-\sqrt{2} \text{ и } y=2; \\ \text{нито min, нито max за } x=1+\sqrt{2} \text{ и } y=2. \end{cases}$

8. Частните производни $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ се анулират за $x=y=1$, но за тези стойности се анулира и изразът

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ще докажем, че за значенията $x=y=1$ функцията z няма нито минимум, нито максимум. За тази цел да изучим функцията z в съседство на точката $x=y=1$. Ако положим

$$x=1+\xi,\quad y=1+\eta,$$

гдето

$$\xi=\varepsilon\cos\varphi,\quad \eta=\varepsilon\sin\varphi,$$

получаваме

$$f(1+\xi,\ 1+\eta)-f(1,\ 1)=(\xi-\eta)^2+\eta^3=\varepsilon^2(\cos\varphi-\sin\varphi)^2+\varepsilon^3\sin^3\varphi.$$

За всички значения на φ, които не анулират $\operatorname{tg}\varphi-1$, дясната страна на това равенство е положителна за достатъчно малки значения на ε. Напротив, за значения на φ, които обръщат $\operatorname{tg}\varphi=1$ в тъждество, тази страна зависи от ε^3, т. е. тя изменя своя знак с изменението на ε. Оттук следва, че нашата функция няма нито max, нито min.

9. $\begin{cases} \text{Min за } x=0,\ y=0; \\ \max \text{ за } x=0,\ y=\pm 1 \text{ и } a<b; \\ \text{нито min, нито max за } x=0,\ y=\pm 1 \text{ и } a>b; \\ \max \text{ за } x=\pm 1,\ y=0 \text{ и } a>b; \\ \text{нито min, нито max за } x=\pm 1,\ y=0 \text{ и } a<b. \end{cases}$

10. Нито min, нито max.

11. $\begin{cases} \text{Max за } x=\frac{\pi}{3} \text{ и } y=\frac{\pi}{3}; \\ \text{нито min, нито max за } x=\pi \text{ и } y=\pi. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \text{Max за } x=\alpha \text{ и } y=\beta; \\ \text{нито min, нито max за } x=0 \text{ и } y=\beta-\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

13. Ако означим с x, y и $a-x-y$ частите от делението на числото a, получаваме, че тяхното произведение е

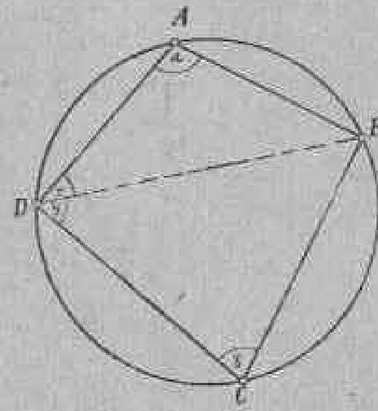
$$z=axy-x^2y+y^2x.$$

Функцията z добива максимум за $x=y=\frac{a}{3}$. Следователно търсените части, които отговарят на найголямо произведение, са равни помежду си.

14. Ако означим с x, y, $2\pi-x-y$ централните ъгли, които отговарят на страните на вписания триъгълник, и с r радиуса на дадената окръжност, получаваме, че лицето на този триъгълник е

$$2S=r^2[\sin x+\sin y-\sin(x+y)].$$

Това лице има максимална стойност, когато $x=y=\frac{2}{3}\pi$, т. е., когато търсеният триъгълник е равностранен.



Черт. 46

16. Нека положим $\widehat{DAB}=\alpha$, $\widehat{ADB}=x$ и $\widehat{BDC}=y$ (черт. 46). Тогава лицето на четириъгълника е

$$S=2a^2\sin\alpha\,[\sin x\sin(x+\alpha)+\sin y\sin(y+\gamma)].$$

Лесно се намира, че S добива max, когато

$$x=\frac{1}{2}\gamma,\ y=\frac{1}{2}\alpha,\ x+y=\frac{\pi}{2},\ \widehat{ABD}=\frac{1}{2}\gamma,\ \widehat{CBD}=\frac{1}{2}\alpha,$$

т. е. $AB=AD$ и $CB=CD$.

17. Ръбовете са

$$x=y=z=\sqrt{\frac{S}{6}}.$$

19. Лицето на всеки n-ъгълник, вписан в една окръжност с радиус r, е

$$S=\frac{r^2}{2}[\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_{n-1}+\sin(2\pi-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})],$$

гдето x_1, x_2, … са централните ъгли, съответствуващи на страните на n-ъгълника.

Оттук лесно се намира, че функцията S добива максимум за

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = \frac{2\pi}{n},$$

което показва, че търсеният n-ъгълник е правилен.

20. Ако означим с x и y две от страните на триъгълника, около които не става въртенето, и с s неговия периметър, получаваме, че лицето на този триъгълник е

$$z = \sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-x\right)\left(\frac{s}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{s}{2}\right)}.$$

Оттук намираме, че височината на триъгълника е

$$h = 2\frac{\sqrt{\frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-x\right)\left(\frac{s}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{s}{2}\right)}}{s-x-y}.$$

Тогава обемът на търсения конус е

$$V = \frac{2\pi s}{3}\frac{\left(\frac{s}{2}-x\right)\left(\frac{s}{2}-y\right)\left(x+y-\frac{s}{2}\right)}{s-x-y}.$$

Частните производни на V се анулират за

$$\text{(a)}\ x = \frac{s}{2},\ y = \frac{s}{2}; \qquad \text{(b)}\ x = \frac{3s}{8},\quad y = \frac{3s}{8}.$$

Обаче системата стойности (a) не отговаря на решението на задачата, защото даденият триъгълник се редуцира на отсечка. Второто решение (b) отговаря на изискването на задачата и показва, че даденият триъгълник, за да притежава това свойство, трябва да бъде равнобедрен и страната му, която е ос на въртенето, трябва да бъде $\frac{2}{3}$ от коя да е друга страна.

21. Търсеният триъгълник има за върхове петите на височините на дадения триъгълник.

22. Избираме за координатни оси едната страна на триъгълника и перпендикулярната ѝ права, прекарана в единия ѝ край (черт. 47). Координатите на върховете на триъгълника са

$$A(0,0),\ B(c\cos\alpha,\ c\sin\alpha)\ \text{и}\ C(b,\ 0).$$

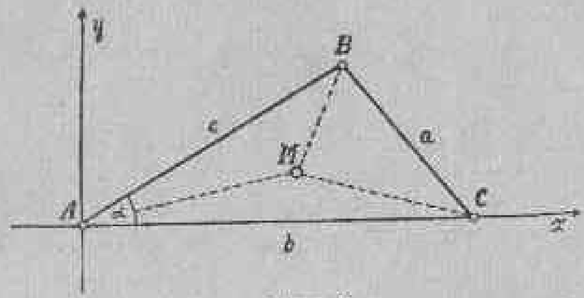
Тогава сумата от квадратите на разстоянията на M до трите върха A, B и C е

$$d^2 = x^2+y^2+(x-c\cos\alpha)^2+(y-c\sin\alpha)^2+(x-b)^2+y^2.$$

Оттук лесно се вижда, че

$$x = \frac{c\cos\alpha+b}{3} \ \text{и}\ y = \frac{c\sin\alpha}{3}$$

са координатите на точката, която отговаря на изискванията на задачата.



Черт. 47

23. Търсената точка има за координати

$$x = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},\quad y = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k}.$$

Ако си мислим, че точките P_i са материални с маси m_k, тогава тази точка се нарича център на тежестта на материалната система P_i.

$$\textbf{24.}\ \begin{cases} \text{Нито min, нито max за } x=\frac{\pi}{2} \text{ и } y=\frac{\pi}{2}; \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad x=0 \text{ и } y=\frac{\pi}{2}; \\ \quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"}\quad x=\frac{\pi}{2} \text{ и } y=0; \\ \text{min за } x=0 \text{ и } y=0; \\ \text{max за } x=\frac{\pi}{3} \text{ и } y=\frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

25. Избираме си точката A за полюс и страната AC за полярна ос на една полярна координатна система (черт. 48). За сумата от разстоянията на точката M до трите върха A, B и C намираме израза

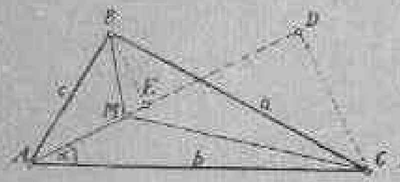
$$d = r + \sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha} + \sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos(A-\alpha)},$$

където r и α са полярните координати на точката M. Като приравним към 0 частните производни на функцията d, имаме

$$1 + \frac{r - b\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha}} + \frac{r - c\cos(A-\alpha)}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos(A-\alpha)}} = 0,$$

$$\frac{b\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\alpha}} - \frac{c\sin(A-\alpha)}{\sqrt{c^2 + r^2 - 2cr\cos(A-\alpha)}} = 0;$$

или



Черт. 48

$$1 - \frac{MD}{MC} - \frac{ME}{MB} = 0,$$

$$\frac{CD}{MC} - \frac{BE}{MB} = 0;$$

или още

$$(1) \qquad \begin{cases} \cos\widehat{CMD} + \cos\widehat{BME} = 1, \\ \sin\widehat{CMD} - \sin\widehat{BME} = 0. \end{cases}$$

Оттук намираме, че

$$\cos\widehat{CMD} = \cos\widehat{BME} = \frac{1}{2}$$

или че

$$\sphericalangle BMC = 120^0.$$

Ако разсъждаваме по същия начин за другите два върха B и C, ще получим, че и

$$\sphericalangle AMB = \sphericalangle AMC = 120^0.$$

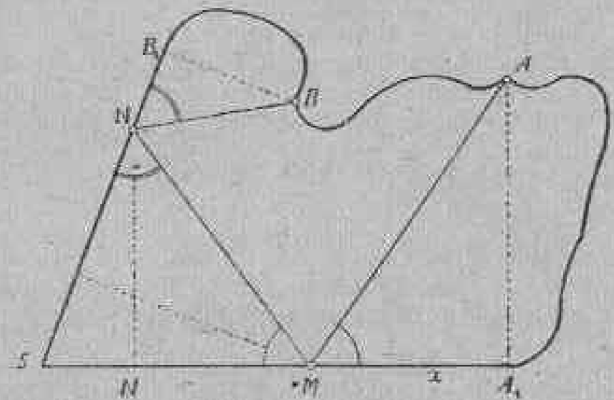
Това показва, че точката M съществува и е пресечната точка на трите дъги от окръжностите, от които дъги страните AC, AB, BC се виждат под ъгъл 120^0, и то само тогава, когато трите ъгла на триъгълника са по-малки от 120^0.

Напротив, ако един от ъглите е по-голям от 120^0, тогава тези дъги не могат да се пресекат в една точка и системата (1) е несъвместима. Обаче задачата и в този случай има решение. Лесно е да се види, че тази точка е връх на тъпия ъгъл.

Тази задача е зададена от Torricelli на Fermat, който е дал три решения.

26.
$$d = \frac{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & a & a_1 \\ y_1 - y_0 & b & b_1 \\ z_1 - z_0 & c & c_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(ab_1 - a_1b)^2 + (ac_1 - a_1c)^2 + (bc_1 - b_1c)^2}}.$$

27. Лодкарят трябва да се движи като една идеална пъргава топка, т. е. ъгълът на падането трябва да бъде равен на ъгъла на отражението (черт. 49).



Черт. 49

28. $y^2 = \dfrac{8nV}{3mx}$, където x е основата на равнобедрения триъгълник и y — съответната височина.

29. Да означим със

$$z_1,\ a_1 \text{ и } b_1;$$
$$z_2,\ a_2 \text{ и } b_2;$$
$$\cdots$$
$$z_n,\ a_n \text{ и } b_n$$

стойностите на z, a и b при последователните n измервания. Тогава между тези стойности трябва да съществуват следните зависимости:

$$a_1x + b_1y - z_1 = 0,$$
$$a_2x + b_2y - z_2 = 0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$a_nx + b_ny - z_n = 0.$$

Обаче при измерванията се правят неизбежни грешки, затова тези равенства в действителност имат вида

$$a_1x + b_1y - z_1 = u_1,$$
$$a_2x + b_2y - z_2 = u_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_nx + b_ny - z_n = u_n,$$

гдето $u_1, u_2, \ldots, u_n$ означават грешките, които се добиват, ако си мислим, че сме измерили x и y по същия начин.

Сега ще намерим при какви значения на x и y сборът от квадратите на тези грешки е най-малък, т. е. най-вероятните значения на x и y при тези n измервания.

Частните производни на функцията

$$V = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2$$

са

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\Sigma(a_nx + b_ny - z_n)\,a_n, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2\Sigma(a_nx + b_ny - z_n)\,b_n,$$

отгдето, като ги приравним към нула, намираме, че

$$x = \frac{\Sigma b_n^2 \Sigma a_n z_n - \Sigma a_n b_n \Sigma b_n z_n}{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2},$$

$$y = \frac{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n z_n - \Sigma a_n b_n \Sigma a_n z_n}{\Sigma a_n^2 \Sigma b_n^2 - (\Sigma a_n b_n)^2}.$$

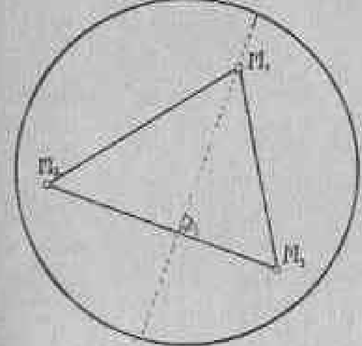
Тези стойности отговарят на един минимум на функцията V, защото тази функция е винаги положителна и следователно не може да вземе произволно малка стойност, отгдето следва, че тя трябва да има един минимум.

30. Тази задача ще третираме по индуктивен път.

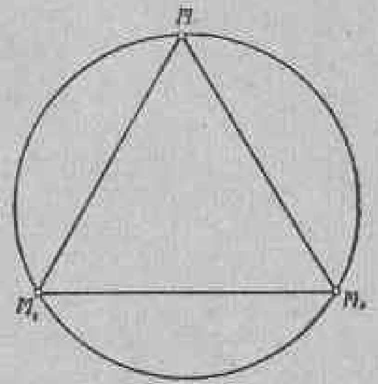
Случай $n = 2$. — Очевидно е, че при този случай максималното разстояние се получава, ако двете точки са диаметрално противоположни.

Случай $n = 3$. — Да разгледаме един триъгълник $M_1M_2M_3$, върховете на който се намират във вътрешността на дадения кръг (черт. 50). Ако точката M_1 се отдалечава от страната M_2M_3 по перпендикуляра, спуснат от M_1 към M_2M_3, тогава страните M_1M_2 и M_1M_3 се увеличават, а страната M_2M_3 не се изменя. Следователно тяхното произведение ще расте и ще стане най-голямо, когато точката M_1 е върху окръжността. По същия начин разглеждаме и другите две точки M_2 и M_3. Виждаме, че произведението ще бъде винаги по-голямо, когато точките M_1, M_2, M_3 лежат върху окръжността.

Ако оставим сега M_2 и M_3 неизменни и преместваме точката M_1 върху окръжността (черт. 51), произведението $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}$ ще достигне своя максимум заедно с произведението $\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \sin M_1$, понеже при това преместване ъгълът M_1 е постоянен.



Черт. 50



Черт. 51

Обаче последното произведение представя лицето на триъгълника $M_1M_2M_3$ и това лице става очевидно най-голямо, когато M_1 се намира в средата на дъгата, която отговаря на хордата M_2M_3. По същия начин се доказва и за другите два върха. Оттук заключаваме, че *максимално произведение ще имаме само тогава, когато трите точки лежат върху дадената окръжност и образуват равностранен триъгълник*.

От този резултат и като се вземе пред вид, че лицето на един вписан триъгълник в една окръжност е

$$S = \frac{\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3} \cdot \overline{M_2M_3}}{4r},$$

се извежда, че равностранният триъгълник измежду всички триъгълници, вписани в дадена окръжност, има най-голямо лице.

Въпросът за това максимално произведение може да се третира още аналитически. Ако означим с x, y, z централните ъгли, които отговарят на страните на триъгълника, тогава търсеното произведение е

$$U = 8r^3 \sin\frac{x}{2} \sin\frac{y}{2} \sin\frac{2\pi - x - y}{2}.$$

Вместо да търсим максимума на тази функция, то е все едно да търсим максимума на функцията

$$f=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2},$$

отгдето

$$2f_x'=\sin\frac{y}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x+y}{2}+\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right)=\sin\frac{y}{2}\sin\frac{2x+y}{2},$$

$$2f_y'=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x+2y}{2}.$$

Тези частни производни се анулират, когато

$$\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{y}{2}=0,$$

или, което е все същото, когато

$$x=0,\ y=2\pi,\ \text{отгдето}\ z=0;$$
$$x=2\pi,\ y=0,\quad „\quad z=0;$$
$$x=0,\ y=0,\quad „\quad z=2\pi.$$

Обаче в този случай трите точки се сливат и произведението е нула, което показва, че имаме минимум, а не максимум.

Друга система нули за частните производни е

$$x=0,\ 2x+y=2\pi,\ z=0;$$
$$x=0,\ 2x+y=0,\ z=2\pi,$$

която дава също минимум. Същото се случва, ако се пермутира x с y.

Най-после частните производни се анулират за

$$2x+y=2\pi,\ 2y+x=2\pi,$$

отгдето

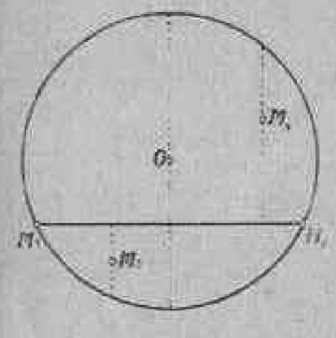
$$x=y=\frac{2\pi}{3}=z,$$

които стойности дават единствения максимум. Този резултат е идентичен с намерения преди малко.

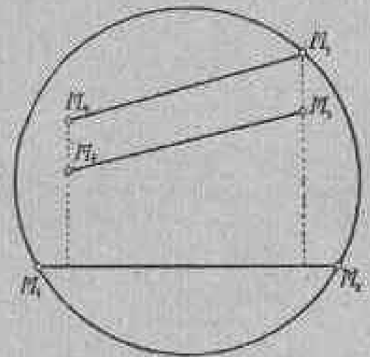
Случай $n=4$. — Нека M_1, M_2, M_3 и M_4 са четири точки, разположени във вътрешността на даден кръг, и да предположим, че точката M_1 е най-отдалечената от центъра O на този кръг. Хомотетията с център O и с отношение $\frac{r}{OM_1}$ трансформира точката M_1 върху окръжността, а другите три точки остават във вътрешността на кръга. Понеже отношението на хомотетията е по-голямо от единица, то всички дължини се увеличават и следователно ще се увеличи и разглежданото произведение.

Нека сега M_2', M_3' и M_4' са пресечните точки на правите M_1M_2, M_1M_3 и M_1M_4 с окръжността и да предположим, че M_2 е точката, за която отношението $\frac{M_1M_2'}{M_1M_2}$ е най-малко. Хомотетията с център M_1 и с отношение $\frac{M_1M_2'}{M_1M_2}$ ще трансформира точката M_2 върху окръжността, а другите две ще останат вътре в окръжността. И в този случай произведението расте, защото отношението $\frac{M_1M_2'}{M_1M_2}>1$.

Ако тогава M_3 и M_4 са от двете страни на M_1M_2 (черт. 52), ще увеличим още произведението, като отдалечим тези точки от M_1M_2



Черт. 52



Черт. 53

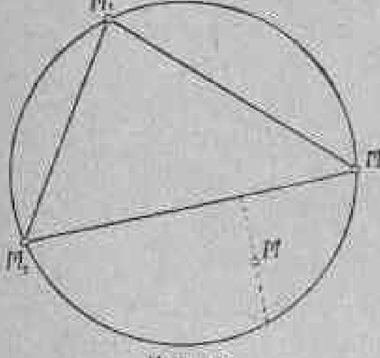
върху двата перпендикуляра, спуснати от M_3 и M_4 към отсечката M_1M_2. Следователно четирите точки трябва да лежат върху окръжността. Ако M_3 и M_4 преместим в краищата на диаметъра, перпендикулярен на M_1M_2, вижда се въз основа на същите разглеждания както при $n=3$, че

$$\overline{M_1M_4}\,.\,\overline{M_4M_2},\quad \overline{M_3M_1}\,.\,\overline{M_3M_2}\ \text{и}\ \overline{M_3M_4}$$

се увеличават и следователно се увеличава и цялото произведение. Същите разсъждения, приложени и за отсечката M_1M_2, показват, че максимално произведение ще имаме, когато четирите точки образуват квадрат.

Ако M_3 и M_4 са от една и съща страна на M_1M_2 (черт. 53), транслацията, перпендикулярна на M_1M_2, ще пренесе една от тези точки, например M_3, върху окръжността. При тази транслация някои от разстоянията се увеличават, а други остават неизменни. По такъв начин задачата се свежда към следното: ако са дадени три точки M_1,

M_2 и M_3 върху една окръжност (черт. 54), да се намери една точка M, лежаща вътре в окръжността или върху самата нея, така че произведението

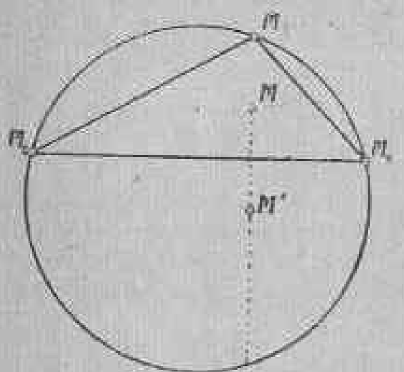


Черт. 54

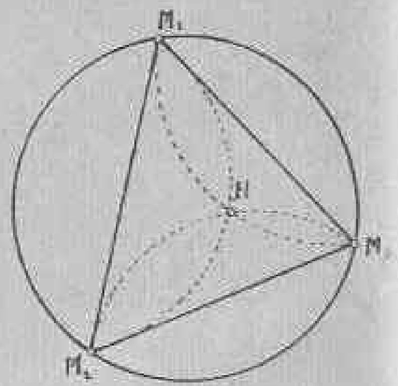
$$\overline{MM_1}\,.\,\overline{MM_2}\,.\,\overline{MM_3}$$

да бъде максимум. Сега ще покажем, че тази точка трябва да лежи върху окръжността. И наистина, ако тази точка е външна на триъгълника $M_1M_2M_3$ (например, ако тя се намира в сегмента, който отговаря от M_2M_3), произведението ще се увеличи, като преместим точката M по перпендикуляра на M_2M_3 до окръжността. Ако пък тази точка е вътрешна на триъгълника и например ъгълът M_1 е тъп (черт. 55), то симетричната точка M' на M спрямо M_2M_3 ще бъде във вътрешността на кръга и ще даде по-голямо произведение.

Новополучената точка M' преместваме по правата MM' до окръжността; с това още повече увеличаваме произведението.



Черт. 55



Черт. 56

Нека най-после предположим, че трите ъгъла са остри (черт. 56). За да не може да се приложи предното разглеждане, би трябвало симетричните точки на M спрямо трите страни да бъдат външни на кръга. Това означава, че симетричните образи на трите им сегмента спрямо трите съответни страни ще заграждат една област, външна на тях, но вътрешна на триъгълника. Обаче това е абсурдно, понеже трите симетрични дъги се пресичат в ортоцентъра H. Следователно и

в този случай четирите точки трябва да лежат върху окръжността. Прочее тези четири точки трябва да образуват квадрат, което показахме преди малко.

Предните разглеждания показват, че полученият максимум е абсолютен*. Обаче ще докажем, че за нашата задача не съществува релативен максимум.

Наистина, ако точките M_1, M_2 и M_3 са дадени винаги върху окръжността, една точка M, която се намира във вътрешността на кръга, би могла да даде само релативен максимум. Предните разглеждания позволяват да твърдим, че точката M ще бъде във вътрешността на триъгълника $M_1M_2M_3$, понеже винаги може една външна точка да се мести по такъв начин, че да се доближава или отдалечава едновременно до трите върха. Да означим с (x_k, y_k) координатите на една точка M_k, отнесена спрямо една произволна координатна система. Ако $M\,(x, y)$ съответствува на един релативен максимум на функцията

$$f(x, y) = \overline{MM_1}\,.\,\overline{MM_2}\,.\,\overline{MM_3},$$

ще имаме

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Ако пишем

$$\overline{MM_k} = r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2},$$

то

$$f(x, y) = r_1\,.\,r_2\,.\,r_3,$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x - x_1}{r_1^2} + \dfrac{x - x_2}{r_2^2} + \dfrac{x - x_3}{r_3^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{f}\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y - y_1}{r_1^2} + \dfrac{y - y_2}{r_2^2} + \dfrac{y - y_3}{r_3^2} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ако означим след това с θ_1, θ_2, θ_3 ъглите на MM_1, MM_2, MM_3 с оста x, имаме

$$\cos\theta_k = \frac{x_k - x}{r_k}, \quad \sin\theta_k = \frac{y_k - y}{r_k}.$$

Тогава условията (2) добиват вида

$$\sum \frac{\cos\theta_k}{r_k} = 0, \quad \sum \frac{\sin\theta_k}{r_k} = 0.$$

* Най-голямата стойност на функцията в даден интервал.

Като умножим второто уравнение с $-i$ и го съберем с първото, получаваме

$$\sum \frac{e^{-i\theta_k}}{r_k} = 0, \text{ или } \sum \frac{1}{r_k e^{i\theta_k}} = 0. \tag{3}$$

Комплексните величини $r_k e^{i\theta_k}$ са очевидно афиксите на точките M_k, когато точката M е взета за начало на Gauss'овата равнина. Точките, които имат за афикси $\frac{1}{r_k e^{i\theta_k}}$, са симетричните точки по отношение на реалната ос на инверзните образи на точките M_k спрямо полюса M и със степен единица. Уравнението (3) изразява, че M е център на тежестта за тези точки. Очевидно инверзните точки на M_k притежават същото свойство. Това тълкуване на условията (1) остава в сила, ако вместо четирите точки вземем n точки.

В една точка, където една функция $f(x, y)$ удовлетворява условията (1), имаме максимум или минимум или пък нито максимум, нито минимум в зависимост от знака на

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Уравненията (2), които са логаритмичните производни на f, водят към изучаването на функцията

$$\varphi(x, y) = \ln|f(x, y)| = \ln r_1 + \ln r_2 + \ln r_3$$

вместо дадената функция $f(x, y)$. Тази функция ще има релативен максимум или минимум едновременно с $f(x, y)$. Тогава намираме

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \sum \frac{1}{r_k^2} - 2\sum \frac{(x - x_k)^2}{r_k^4},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \sum \frac{1}{r_k^2} - 2\sum \frac{(y - y_k)^2}{r_k^4},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Оттук следва, че

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}$$

е винаги положително и следователно в разгледаните точки φ не е нито минимум, нито максимум. Същото е и за f.

Прочее имаме само един единствен максимум, добит, когато четириъгълникът е вписан квадрат.

Общ случай. — Разсъжденията, които направихме досега, се прилагат и в случая, когато имаме n точки. Във всички случаи максимумът ще бъде достигнат, когато точките лежат върху окръжността.

От друга страна, в случай на четири точки, за да докажем, че максимумът се реализира, когато имаме квадрат, ние фиксирахме два непоследователни върха M_1 и M_3 и отвеждахме другите върхове в краищата на перпендикулярния диаметър на M_1M_3. Това го правихме, за да можем да увеличим произведението на страните и това на диагоналите.

Едно аналогично разсъждение показва, че същото ще имаме и в общия случай: n-те точки, взети върху окръжността, определят един изпъкнал многоъгълник. Ако произведението на страните му е максимум, то всеки връх трябва да бъде в средата на дъгата, която се съдържа между двата съседни върха; ако това не е изпълнено, може да преместим там тази точка. Прочее максимум ще имаме само когато многоъгълникът е правилен. Същият резултат се получава за всеки звезден многоъгълник, получен от съединяването на върховете през два, през три и т. н.

От тези многоъгълници някои могат да се разложат — например, като съединим през два върховете на един $2n$-ъгълник, добиваме два многоъгълника с по n страни. Обаче горният резултат остава винаги верен.

Нека P_1 е произведението на страните на един изпъкнал многоъгълник, P_2 — произведението на страните на звездния многоъгълник, получен от съединяването на върховете през два, и т. н. Тогава произведението на всички разстояния между върховете е

$$P_1 . P_2 \ldots P_{\frac{n}{2}}, \text{ ако } n \text{ е четно,}$$

$$P_1 . P_2 \ldots P_{\frac{n-1}{2}}, \text{ ако } n \text{ е нечетно.}$$

Всеки от факторите на тези произведения е максимум само за правилен многоъгълник. Същото нещо ще имаме и за произведението, което е едновременно абсолютен и релативен максимум. Друг максимум не съществува. Върху доказателството на този факт не ще се спираме, понеже изисква познания от теория на функциите и би ни отвлекло далеч от целта, която сме си поставили в този сборник.

§ 11. Диференциране на неявни функции с една и повече променливи

Основни указания

I правило. *Когато няколко функции на една или повече променливи удовлетворяват едно уравнение $F=0$ на тези функции и тези променливи, то производните на функциите удовлетворяват уравненията, които се получават, като приравним към нула про-*

изводните на лявата страна на уравнението спрямо независимите променливи. Тези производни се добавят по правилото за диференциране на съставни функции.

Примери: 1) $F(x, y)=0$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'=0,\quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial F}{\partial y}y''=0,\ldots\,.$$

2) $F(x, y, z)=0$;

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ldots$$

II правило. *Когато няколко функции $u, v, w,\ldots$ на независимите променливи $x, y, z,\ldots$ удовлетворяват уравнението $F(x, y, z,\ldots,u, v, w,\ldots)=0$, то тоталните диференциали на тези функции удовлетворяват уравнението $dF=0$, получено, като се намери тоталният диференциал на F, при което всички променливи се разглеждат като независими.*

Примери: 1) $F(u, v, w)=0$, $u=u(x, y, z, t)$, $v=v(x, y, z, t)$, $w=w(x, y, z, t)$:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial u}du+\frac{\partial F}{\partial v}dv+\frac{\partial F}{\partial w}dw=0,$$

$$d^2F=\left(\frac{\partial}{\partial u}du+\frac{\partial}{\partial v}dv+\frac{\partial}{\partial w}dw\right)^2F+\frac{\partial F}{\partial u}d^2u+\frac{\partial F}{\partial v}d^2v+\frac{\partial F}{\partial w}d^2w=0,\ldots$$

2) $F(x, y, z)=0$, x и y — независими променливи, а z — функция:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz=0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy+\frac{\partial}{\partial z}dz\right)^2F+\frac{\partial F}{\partial y}d^2z=0,\ldots$$

1. Ако диференцираме даденото уравнение относно x, като разглеждаме y като функция на x, получаваме

(1) $$2x+2yy'=0,$$

отгдето

$$y'=-\frac{x}{y}.$$

енцираме равенството (1) по същия начин и намираме

$$1+y'^2+yy''=0,$$

отгдето

$$y''=-\frac{x^2+y^2}{y^3}=-\frac{r^2}{y^3}.$$

2. $y'=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$, $y''=-\dfrac{b^4}{a^2y^3}$.

3. $y'=-\dfrac{x^2+2xy}{x^2-y^2}$,

$$y''=\frac{2x^5+8x^4y+8x^3y^2+4x^2y^3-2xy^4-2y^5}{(x^2-y^2)^3}.$$

4. $y'=\dfrac{2y^2}{n(y^2-x^2)+2xy}$.

5. $y''=-\dfrac{2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

6. $y'=\dfrac{a}{b}$, $y''=0$.

7. $y'=\dfrac{e^{\sin x}\cos x-e^{\sin y}}{x\cos y\, e^{\sin y}}$.

8. $y'=\dfrac{1+ye^{-x}}{1+e^{-x}}$, $y''=-\dfrac{y(e^x-1)-2e^x}{(e^x+1)^2}$.

9. $y'=\dfrac{y}{x}\,\dfrac{x\ln y-y}{y\ln x-x}$. — Предварително се логаритмува.

10. $y'=-\sqrt{\dfrac{b^2-y^2}{a^2-x^2}}$.

11. $y'=\dfrac{(a+y)(ax+by+xy)-x}{y-(b+x)(ax+by+xy)}$.

12. $y'=\dfrac{e^y}{2-y}$.

13. $y'=\dfrac{ny}{1-y}(1-\operatorname{ctg} nx)$

14. $y'=\dfrac{y(y+2x+2x^3)}{(1+x^2)(y^2+x^2)}$.

15. $y'=-\dfrac{y}{x}$.

16. $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. $y' = \frac{a-y}{a+x}$.

18. $y' = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}$.

19. $y' = -\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+cy}{y\sqrt{x^2+y^2}-cx}$.

20. $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

21. $y' = \frac{2yx^{y-1}\ln a - y \operatorname{tg} xy}{x \operatorname{tg} xy - 2x^y \ln a \ln x}$.

22. $y' = \frac{\sqrt{2ay-y^2}}{y}$, $y'' = -\frac{a}{y^3}$.

23. $y' = \frac{x}{y}$. — Предварително се опростява уравнението, като се използуват свойствата на обратните кръгови функции.

24. $y' = 0$.

25. $y' = \frac{y \sin y\,(1-\ln y)}{x(\sin y \ln x - y \cos y)}$.

26. Диференцираме лявата и дясната страна на това равенство като разглеждаме z като функция на x и y, и получаваме

$$(3z^2+3x^2)\,dz + 6xz\,dx = a\,(y\,dx + x\,dy),$$

оттдето

$$dz = \frac{(ay-6xz)\,dx + ax\,dy}{3(x^2+z^2)}.$$

27. $dz = \frac{a}{2\pi}\,\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$.

28. $dz = \frac{a^2-2x^2-2y^2-2z^2}{z(a^2+2x^2+2y^2+2z^2)}\,(x\,dx + y\,dy)$.

29. $d^2z = \frac{e^{2y}(e^z-2)}{(2z-e^z)^3}\,dx^2 + 2e^y\,\frac{xe^y(e^z-2)+(2z-e^z)^2}{(2z-e^z)^3}\,dx\,dy$

$$+\,xe^y\,\frac{xe^y(e^z-2)+(2z-e^z)^2}{(2z-e^z)^3}\,dy^2.$$

30. $d^2z = \frac{k^2(a\,dx+b\,dy)^2}{(ax+by+cz)^6}$.

31. $d^2z = -\frac{x(\ln x+1)^2+z(\ln z+1)^2}{xz(\ln z+1)^3}\,dx^2$

$$-2\,\frac{(\ln x+1)(\ln y+1)}{z(\ln z+1)^3}\,dx\,dy - \frac{y(\ln y+1)^2+z(\ln z+1)^2}{yz(\ln z+1)^3}\,dy^2.$$

32. Диференцираме двете уравнения относно x

$$3x^2+2yy'-3z'=0,$$
$$-1-4yy'+2zz'=0.$$

Ако решим тази система относно y' и z', получаваме

$$y' = 3\,\frac{2x^2z-1}{2y(6-2z)},\quad z' = \frac{6x^2-1}{6-2z}.$$

33. $y' = \frac{z-x}{y-z}$, $z' = \frac{y-x}{z-y}$.

34. $y' = \frac{a(ax-cz)}{b(cz-by)}$, $z' = \frac{a(by-ax)}{c(cz-by)}$.

35. $y' = \frac{6xz-bz-y^2}{xy-2z^2}$, $z' = \frac{bx-6x^2+2zy}{2(xy-2z^2)}$.

36. $y' = \frac{x^2\sin z - z^2 \sin x}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}$, $z' = \frac{y^2 \sin x - x^2 \sin y}{z^2 \sin y - y^2 \sin z}$.

37. $\begin{cases} y' = \frac{\cos^2(x+y)-\cos^2(x-y)}{\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)}, \\ z' = -\frac{2}{\cos z\,[\cos^2(x+y)+\cos^2(x-y)]}. \end{cases}$

38. $u' = \frac{1}{u}\left(\frac{z^2}{x}\,\frac{xz-1}{xz+1} + \frac{y^2}{x}\,\frac{x-y}{x+y} - x\right)$.

39. $\begin{cases} dz = \frac{by+z}{b(z-u)}\,dx + \frac{bx+z}{b(z-u)}\,dy, \\ du = -\frac{by+u}{b(z-u)}\,dx - \frac{bx+u}{b(z-u)}\,dy. \end{cases}$

40. $\begin{cases} dz = -\frac{u-x}{u-z}\,\frac{z}{x}\,dx - \frac{u-y}{u-z}\,\frac{z}{y}\,dy, \\ du = -\frac{z-x}{z-u}\,\frac{u}{x}\,dx - \frac{z-y}{z-u}\,\frac{u}{y}\,dy. \end{cases}$

41. Диференцираме двете уравнения

$$(1)\qquad \begin{cases} dx + dy + dz + du = 0, \\ x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz + u^2 du = 0. \end{cases}$$

Като решим тези уравнения относно dz и du, получаваме

$$dz = \frac{u^2 - x^2}{z^2 - u^2} dx + \frac{u^2 - y^2}{z^2 - u^2} dy,$$

$$du = \frac{z^2 - x^2}{u^2 - z^2} dx + \frac{z^2 - y^2}{u^2 - z^2} dy.$$

За да намерим вторите тотални диференциали, диференцираме уравненията (1):

$$d^2z + d^2u = 0,$$

$$2udu^2 + 2zdz^2 + 2xdx^2 + 2ydy^2 + z^2d^2z + u^2d^2u = 0.$$

Оттук получаваме

$$(u^2 - z^2)\, d^2u = -2\,(xdx^2 + ydy^2 + zdz^2 + udu^2)$$

или като заместим dz и du с добитите стойности, получаваме

$$d^2u = -2\left[\frac{u\,(z^2 - x^2)^2 + x\,(u^2 - z^2)^2 + z\,(u^2 - x^2)^2}{(u^2 - z^2)^3} dx^2 \right.$$
$$+ 2\,\frac{u\,(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) + z\,(u^2 - x^2)(u^2 - y^2)}{(u^2 - z^2)^3} dx\,dy$$
$$\left. + \frac{y\,(u^2 - z^2)^2 + z\,(y^2 - u^2)^2 + u\,(z^2 - y^2)^2}{(u^2 - z^2)^3} dy^2\right].$$

Поради симетрията на u и z имаме

$$d^2z = -\,d^2u.$$

42. $$d^2z = -d^2u = zu\left[\frac{(u - z)^2 + (u - x)^2 + (z - x)^2}{x^2\,(u - z)^3} dx^2\right.$$
$$+ 2\,\frac{(u - x)(u - y) + (z - x)(z - y)}{xy\,(u - z)^3} dx\,dy$$
$$\left. + \frac{(u - z)^2 + (u - y)^2 + (z - y)^2}{y^2\,(u - z)^3} dy^2\right]$$

43. $$d^2z = -\frac{k}{c}\, d^2u = \frac{a^2}{c}\,\frac{(ku - cz)^2 + (ax - ku)^2 + (cz - ax)^2}{(ku - cz)^3} dx^2$$
$$+ 2\,\frac{ab}{c}\,\frac{(ax - ku)(by - ku) + (cz - ax)(cz - by)}{(ku - cz)^3} dx\,dy$$
$$+ \frac{b^2}{c}\,\frac{(ku - cz)^2 + (by - ku)^2 + (cz - by)^2}{(ku - cz)^3} dy^2.$$

44. $$d^2z = -\frac{3}{2}\, d^2u = \frac{1}{8\,(2z - 3u)^3}\{(2y + z)(4y + 3u)\, dx^2$$
$$+ [(3u + 4x)(2y + z) + (2x + z)(4y + 3u) - 8\,(2z - 3u)^2]\, dx\,dy$$
$$+ (4x + 3u)(2x + z)\, dy^2\}.$$

45. Като диференцираме един път даденото уравнение, получаваме

$$(1)\qquad -\frac{dy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = n\,\frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad xy' = -n\sqrt{a^2 - y^2}.$$

Диференцираме последното равенство:

$$xy'' + y' = \frac{ny}{\sqrt{a^2 - y^2}}\, y',$$

или като държим сметка за (1), получаваме

$$x^2y'' + xy' + n^2y = 0.$$

Това уравнение с помощта на формулата на Leibniz диференцираме n пъти:

$$x^2y^{(n+2)} + 2nxy^{(n+1)} + n\,(n - 1)\, y^{(n)} + xy^{(n+1)} + ny^{(n)} + n^2y^{(n)} = 0,$$

отгдето получаваме дадената зависимост.

46. a) Вторите частни производни на z относно x и y са

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{z}{x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = -\frac{2}{9}\,\frac{y}{z^2},$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2}{9}\,\frac{x}{z^5}\,(3z^3 + 4xy^3).$$

Като заместим тези стойности в дадената релация, получаваме

$$rt - s^2 = \frac{4}{81}\,\frac{3z^3 + 3xy^3}{xz^4}$$

и като вземем пред вид даденото уравнение, добиваме

$$\frac{4}{81}\,\frac{3z^3 + 3xy^3}{xz^4} = \frac{4}{27}\,\frac{1}{z^4},$$

което представлява дясната страна на дадената релация.

b) Първите и вторите частни производни са

$$p = -\frac{\varphi}{x\varphi' + \psi'}, \quad q = \frac{1}{x\varphi' + \psi'}, \quad r = \frac{\varphi\,(2x\varphi'^2 + 2\varphi'\psi' - x\varphi\varphi'' - \varphi\psi'')}{(x\varphi' + \psi')^3},$$

$$s = \frac{\varphi'\,(x\varphi' + \psi') - \psi''\varphi - x\varphi\varphi''}{(x\varphi' + \psi')^3}, \quad t = -\frac{x\varphi'' + \psi''}{(x\varphi' + \psi')^3}.$$

Като ги заместим в дадената релация, получаваме тъждество.

c) Ще докажем съществуването само на първата зависимост:

(1) $$D_y[\varphi(z)\, D_x z] = D_x[\varphi(z)\, f(z)\, D_x z],$$

понеже доказателството е аналогично и за останалите зависимости.

От даденото уравнение получаваме

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f(z) + y f'(z)\frac{\partial z}{\partial y}, \quad D_y z = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f(z)}{1 - y f'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y f'(z)\frac{\partial z}{\partial x}, \quad D_x z = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y f'(z)}.$$

Оттук следва, че

(2) $$D_y z = f(z)\, D_x z.$$

Лявата страна на уравнението (1) е равна на

$$\varphi'(z)\, D_y z\, D_x z + \varphi(z)\, D_x(D_y z),$$

или като вземем пред вид зависимостта (2), този член се преобразува във

$$\varphi'(z)\, f(z)\,(D_x z)^2 + \varphi(z)\, f'(z)\,(D_x z)^2 + \varphi(z)\, f(z)\, D_x^2 z.$$

Обаче същият резултат се добива, като развием дясната страна на равенството (1), което показва, че действително дадената функция удовлетворява това равенство.

47. a) Имаме

$$p = \frac{x(y^2 - u^2)}{z - \varphi} \quad \text{и} \quad q = \frac{y x^2}{z - \varphi}.$$

Тези стойности заместваме в дадената зависимост и получаваме

$$pq = \frac{x^3 y (y^2 - u^2)}{(z - \varphi)^2} = \frac{x^3 y (y^2 - u^2)}{x^2 (y^2 - u^2)} = xy.$$

b) Имаме

$$r = -\frac{1}{y f'' + \varphi''}, \quad s = -\frac{f'}{y f'' + \varphi''}, \quad t = -\frac{f'^2}{y f'' + \varphi''},$$

отгдето

$$rt - s^2 = \frac{f'^2}{(y f'' + \varphi'')^2} - \left(\frac{f'}{y f'' + \varphi''}\right)^2 = 0.$$

48. a) Понеже $f(u, v)$ е функция на u и v, които от своя страна са функции на x, y, α и β, тогава

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial \alpha}.$$

От (1) намираме, че

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + x\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = y\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

или

$$\left(1 - x\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi,$$

$$-y\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Като решим тази система относно $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\left(1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\varphi}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y\frac{\partial \psi}{\partial u}\varphi}{\Delta},$$

където

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 - x\frac{\partial \varphi}{\partial u} & -x\frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ -y\frac{\partial \psi}{\partial u} & 1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

По същия начин, ако диференцираме (1) относно α и β, намираме

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial \alpha} = \frac{y\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\Delta}.$$

Като заместим стойностите на $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial \alpha}$ и $\frac{\partial v}{\partial \alpha}$ в (1), получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\varphi}{\Delta}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\left(1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right],$$

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial f}{\partial u}\left(1 - y\frac{\partial \psi}{\partial v}\right) + y\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right],$$

отгдето чрез разделяне на тези равенства добиваме търсената зависимост

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \varphi\frac{\partial f}{\partial \alpha}.$$

По същия начин се доказва и формулата **b)**.

49. Като вземем пред вид, че

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \alpha}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial \beta}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \beta}=0$$

и диференцираме например първото равенство относно β, намираме

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^3\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha\,\partial \beta}=-\frac{\partial f}{\partial \alpha}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial \beta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}\end{vmatrix}+\frac{\partial f}{\partial u}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial \beta} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial \beta}\\ \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha\,\partial u}\end{vmatrix},$$

отгдето получаваме търсената зависимост.

§ 12. Максимум и минимум на неявни функции

Основни указания

Необходими условия за максимум и минимум на функцията $w=f(x, y, z, u)$ при допълнителни условия

$$\varphi(x, y, z, u)=0,\quad \psi(x, y, z, u)=0.$$

Образува се функцията $F=f+\lambda\varphi+\mu\psi$, където λ и μ са неизвестни параметри, и за тази функция се търсят необходимите условия за максимум и минимум:

$$\varphi(x, y, z, u)=0,$$
$$\psi(x, y, z, u)=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial y}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial z}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial u}+\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial u}+\mu\frac{\partial \psi}{\partial u}=0.$$

Решенията (x, y, z, u) на тази система са стойностите, за които w добива евентуално максимум или минимум.

1. Първата и втората производна са

$$y'=\frac{a^2-x^2}{y^2},\quad y''=-2\,\frac{xy+(a^2-x^2)\,y'}{y^3}.$$

Нулите на първата производна са: $x=\pm a$. Тогава, ако

$$x=a,\ \text{то}\ y'=0,\ y''<0\ \text{и имаме max}\ y=\sqrt[3]{2a};$$
$$x=-a,\ \text{то}\ y'=0,\ y''>0\ \text{„ „ min}\ y=-\sqrt[3]{2a}.$$

2. $\begin{cases}\text{За}\ x=\dfrac{\pi}{2}\ y=\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2+4}\ \text{е max, min.}\\ \text{За}\ x=-\dfrac{\pi}{2}\ y=\dfrac{1}{2}a\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2-4}\ \text{е min, max.}\end{cases}$

3. За $x=-1$, $y=1$ е max.

4. $\begin{cases}\text{За}\ x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ y=a\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}\ \text{max,}\\ \text{За}\ x=-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ y=-a\sqrt[3]{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}}\ \text{min.}\end{cases}$

5. Образуваме функцията

$$f+\lambda\varphi=xy+\lambda(x^3+y^3-axy).$$

Тогава

$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x}=y+\lambda(3x^2-ay)=0,$$
$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y}=x+\lambda(3y^2-ax)=0,$$

отгдето

(2) $$-\lambda=\frac{y}{3x^2-ay}=\frac{x}{3y^2-ax},\quad \text{или}\quad y=x.$$

Ако положим $y=x$ в уравнението (1), получаваме

$$x^2(2x-a)=0.$$

Следователно за $x=y=\dfrac{a}{2}$ е ясно, че $z=\dfrac{a^2}{4}$ е max. И наистина за

$$x=-\infty\ \text{и}\ y=+\infty\quad z=-\infty;$$

за

$$x=+\infty\ \text{и}\ y=-\infty\quad z=-\infty$$

и понеже функцията z е непрекъсната, тя добива обязателно един максимум.

Стойностите $x=y=0$ не представляват решение, защото те също анулират знаменателите на (2).

6. Образуваме функцията

$$f+\lambda\varphi=a\cos^2 x+b\cos^2 y+\lambda\left(y-x-\frac{\pi}{4}\right).$$

Като елиминираме λ от уравненията

$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial x}=-2a\cos x\sin x-\lambda=0,$$

$$\frac{\partial(f+\lambda\varphi)}{\partial y}=-2b\cos y\sin y+\lambda=0,$$

получаваме

$$a\sin 2x=-b\sin 2y,$$

или

$$a\sin 2x=-b\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

или най-после

$$\operatorname{tg} 2x=-\frac{b}{a};\ \cos 2x=\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\quad \text{и}\quad \sin 2x=\mp\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

За горните знаци функцията добива максималната стойност

$$\frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}),$$

защото тя е непрекъсната, и за $x=0$ и $x=-\frac{\pi}{2}$* взема съответно стойностите

$$a+\frac{b}{2}\quad \text{и}\quad \frac{b}{2},$$

които са по-малки от

$$z=\frac{1}{2}(a+b+\sqrt{a^2+b^2}).$$

По същия начин се вижда, че долните знаци дават минимума

$$z=\frac{1}{2}(a+b-\sqrt{a^2+b^2}).$$

* Избираме тези стойности, защото те включват само стойността на x, която удовлетворява уравненията

$$\cos 2x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin 2x=-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

7. Логаритмуваме уравнението

$$x\ln x+y\ln y+z\ln z=-\frac{2}{e}.$$

Частните производни на функцията z са

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\ln x+1}{\ln z+1}=0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\ln y+1}{\ln z+1}=0.$$

Тези две уравнения заедно с горното имат решения

$$x=e^{-1},\quad y=e^{-1},\quad z=1.$$

Вторите частни производни за тези стойности са

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{x(\ln z+1)}\bigg|_{x=e^{-1},\ z=1}=-e,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{1}{y(\ln z+1)}\bigg|_{y=e^{-1},\ z=1}=-e,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Понеже $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ са отрицателни и дискриминантата

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^2<0,$$

то $z=1$ е максимум.

8. За $x=\sqrt{a}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$, $y=\sqrt{b}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$ и $z=\sqrt{c}\,(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$, $u=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$ е min.

9. $$y=\frac{[\ln(Aabc)]^3}{\ln a^3\,.\,\ln b^3\,.\,\ln c^3}.$$

За $z=x=y=\frac{\pi}{3}$ u е max.

11. $$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{r}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad u \text{ е max.}$$
$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=-\frac{r}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\quad u \text{ е min.}$$

13. $$\frac{l^2}{u^2-a^2}+\frac{m^2}{u^2-b^2}+\frac{n^2}{u^2-c^2}=0,$$

което дава минималните и максималните стойности на u.

14. $$u=\sqrt{\frac{(l-a)^2+(m-b)^2+(n-c)^2}{(am-lb)^2+(an-cl)^2+(bn-mc)^2}}.$$

15. Нека $x, y, z, u, v, \ldots$ са n-те части. Трябва да намерим максимума на функцията $f=xyzu\ldots$ при условие

(1) $$x+y+z+\cdots=a.$$

Образуваме функцията

$$f+\lambda\varphi=xyz\cdots+\lambda(x+y+z+\cdots-a).$$

Като приравним към нула частните производни на тази функция, намираме

$$yzuv\cdots+\lambda=0,$$
$$xzuv\cdots+\lambda=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Чрез елиминация на λ добиваме

$$x=y=z=u=\cdots$$

Като вземем пред вид релацията (1), получаваме

$$x=y=z=\cdots=\frac{a}{n} \quad \text{и} \quad \max u=\left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

16. Ако означим с x и y бедрата на триъгълника, тогава лицето му е

$$\sigma=\frac{1}{2}xy\sin\alpha$$

при условие

$$x^2+y^2-2xy\cos\alpha=a^2.$$

Това лице става максимум, когато

$$x=y=\frac{a}{2\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

т. е., когато триъгълникът е равнобедрен.

17. Кръгов цилиндър, на който височината и радиусът на основата са равни.

18. $$d=\frac{Aa+Bb+Cc-D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

19. Нека x, y, z и t са разстоянията на една точка до четирите стени на тетраедъра, лицата на които са съответно α, β, γ и δ.

Тогава обемът V на тетраедъра е

$$V=\frac{1}{3}(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t).$$

Оттук следва, че трябва да търсим минимума на функцията

$$d^2=x^2+y^2+z^2+t^2$$

при условие

$$3V=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t.$$

След като образуваме функцията

$$f+\lambda\varphi=x^2+y^2+z^2+t^2+2\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t-3V)$$

и приравним към 0 частните ѝ производни, получаваме

$$x+\alpha\lambda=0,$$
$$y+\beta\lambda=0,$$
$$z+\gamma\lambda=0,$$
$$t+\delta\lambda=0,$$

отгдето

$$-\lambda=\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{t}{\delta}=\frac{3V}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.$$

Стойностите на x, y, z и t, които удовлетворяват тези зависимости, отговарят на един минимум

$$u=\frac{3V}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}},$$

защото функцията u може да стане произволно голяма, но не и произволно малка.

20. $x=y=z=\frac{a}{3}, \quad V=\frac{a^3}{27}.$

21. Търсените точки от една сфера трябва да лежат върху правата, която съединява центъра ѝ с дадената точка M.

22. Нека означим с h височината на пирамидата, с α, β и γ ъглите, които трите равнини сключват с основата, и с x, y и z — разстоянията на петата на височината до трите страни на основата ѝ. Тогава имаме

$$x=h\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$y=h\operatorname{ctg}\beta,$$
$$z=h\operatorname{ctg}\gamma,$$

отгдето

$$k=\frac{ax+by+cz}{h}=a\operatorname{ctg}\alpha+b\operatorname{ctg}\beta+c\operatorname{ctg}\gamma;$$

тук k е константа.

Лицето на околната повърхнина на пирамидата е

$$S=\frac{ah}{\sin\alpha}+\frac{bh}{\sin\beta}+\frac{ch}{\sin\gamma}.$$

Тогава, за да намерим минимума на това лице, образуваме си функцията

$$f+\lambda\varphi=\frac{ah}{\sin\alpha}+\frac{bh}{\sin\beta}+\frac{ch}{\sin\gamma}+\lambda(a\operatorname{ctg}\alpha+b\operatorname{ctg}\beta+c\operatorname{ctg}\gamma-k),$$

отгдето лесно се вижда, че за да има функцията S минимум, трябва $\alpha=\beta=\gamma$.

23. Да предположим, че точките A и B са разположени върху оста x на еднакво разстояние a от началото на координатната система. Тогава имаме

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

$$f=\overline{AM}+\overline{BM}=\sqrt{y^2+(x-a)^2}+\sqrt{y^2+(x+a)^2}=u+v.$$

Диференцираме тези две равенства:

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy=0,$$

$$df=\frac{y\,dy+(x-a)\,dx}{u}+\frac{y\,dy+(x+a)\,dx}{v}=0.$$

Оттук извеждаме

$$\frac{-y\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}+x-a}{y\dfrac{x-\alpha}{y-\beta}-x-a}=\frac{u}{v},$$

или като положим

$$x-\frac{y(x-\alpha)}{y-\beta}=k,$$

получаваме

$$\frac{u}{v}=\frac{a-k}{a+k}.$$

Обаче k е разстоянието от началото до точката P, гдето оста x среща правата, която съединява центъра на кръга с точката M. Последното отношение добива вида

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AP}{BP},$$

отгдето следва, че правата MP е бисектриса на $\sphericalangle AMB$ и че търсената точка е точката на допирането на окръжността с елипсата, която има за фокуси точките A и B.

24. Да означим с a, b, c и d страните на един четириъгълник и с x и y ъглите, които сключват отсечките a и b и c и d. Тогава двойното лице на този четириъгълник е

$$2S=ab\sin x+cd\sin y,$$

гдето между x и y съществува зависимостта

$$a^2+b^2-2ab\cos x-c^2-d^2+2cd\cos y=0.$$

Функцията S добива максимум за $x+y=\pi$, т. е., когато четириъгълникът може да бъде вписан в една окръжност. Съответната стойност за x се дава от релацията

$$\cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)},$$

а максимумът — от

$$2S=(ab+cd)\sin x$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}\,.$$

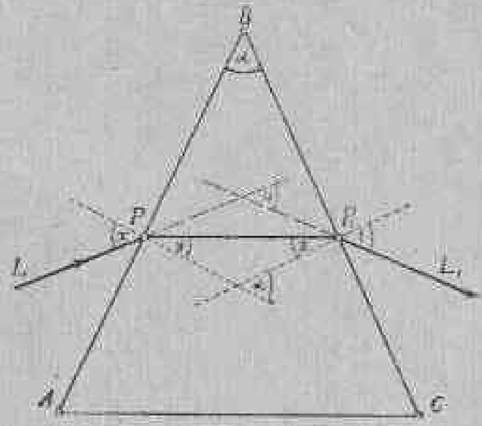
Обобщаването за n-ъгълник се прави непосредствено*.

25. Паралелепипед с ръбове

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\ y=\frac{b}{\sqrt{3}},\ z=\frac{c}{\sqrt{3}}$$

и обем $V=\dfrac{8abc}{3\sqrt{3}}$.

26. Нека ABC е напречното сечение на призмата, LP — падащият лъч, x — ъгълът на падането, y — ъгълът на пречупването, z — ъгълът на падането на пречупения лъч PP_1, P_1L_1 — излизащият лъч и t — ъгълът на второто пречупване (черт. 57).



Черт. 57

Ъгълът, който сключват падащият и излизащият лъч, е

$$u=x-y+t-z.$$

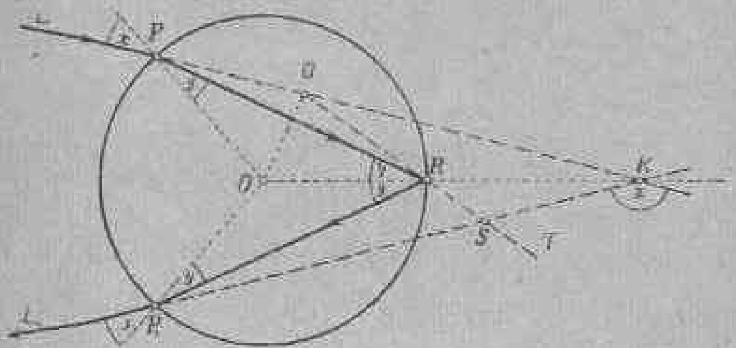
* Вж. Г. Брадистилов — Максимални и минимални проблеми при геометричните фигури. Списание на Физико-математическото д-во, год. XIV, кн. 9 и 10, стр. 370.

където между x, y, z и t съществуват релациите

$$y+z=\alpha,$$
$$\sin x = n\sin y,$$
$$\sin t = n\sin z.$$

Тук n е коефициентът на пречупването. Лесно се намира, че u има минимум, когато $y=z=\dfrac{\alpha}{2}$.

27. През падащия лъч и центъра на капката прекарваме равнина, която сече капката в един кръг (черт. 58).



Черт. 58

Ако лъчът е пречупен само в P и R, то отклонението е равно на

$$\sphericalangle RQK = 2(x-y).$$

Обаче чрез отражението в R се прибавя още едно отклонение, равно на

$$\sphericalangle TSL_1 = \sphericalangle KSQ = \pi - 2y.$$

Следователно имаме

$$z = 2(x-y) + \pi - 2y = 2x - 4y + \pi.$$

Прочее ясно е, че за всяко друго отражение, което се случва преди излизането на светлинния лъч от водната капка, отклонението нараства с $\pi - 2y$. Тогава при k отражения отклонението е

$$z = 2x - 2(k+1)y + k\pi,$$

където

$$\sin x = n\sin y.$$

Оттук се намира, че отклонението z е минимум, когато

$$\sin x = \sqrt{\frac{(k+1)^2-n^2}{(k+1)^2-1}}, \qquad n>1.$$

Ако имаме червен светлинен лъч,

$$n=1{,}330, \quad x=59^{\circ}35' \quad \text{и} \quad y=40^{\circ}25'.$$

Тази задача има голямо приложение във физиката, особено при обяснението на дъждовната дъга ($k=1$) и околната дъждовна дъга ($k=2$). С нейното прилагане са се занимавали Chr. Wiener и W. Möbius

28. Обемът на съпротивителя (на изразходвания материал) е

$$V = l_1 q_1 + l_2 q_2 + \cdots + l_n q_n$$

и потенциалният пад съгласно закона на Ом е

$$E = c\left(\frac{l_1 i_1}{q_1} + \frac{l_2 i_2}{q_2} + \cdots + \frac{l_n i_n}{q_n}\right),$$

където c е специфичното съпротивление на материала.

V има минимум

$$\frac{c}{E}(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + \cdots + l_n\sqrt{i_n})^2$$

за

$$q_k = \frac{c}{E}\sqrt{i_k}(l_1\sqrt{i_1} + l_2\sqrt{i_2} + \cdots + l_n\sqrt{i_n}) \quad (k=1, 2, \ldots, n).$$

29. Сборът от квадратите на разстоянията на една точка M от повърхнината $F(x, y, z)=0$ до n-те точки $P_k(x_k, y_k, z_k)$ е

$$s = \sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2].$$

Образуваме си функцията

$$s + \lambda F = \sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2] + \lambda F(x, y, z).$$

Като приравним към нула частните производни на тази функция, получаваме

$$2\sum_{k=1}^{n}(x-x_k) + \lambda\frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$
$$2\sum_{k=1}^{n}(y-y_k) + \lambda\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$
$$2\sum_{k=1}^{n}(z-z_k) + \lambda\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

отгдето

$$-\lambda = \frac{nx-\Sigma x_k}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{ny-\Sigma y_k}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{nz-\Sigma z_k}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Ако означим с ξ, η и ζ координатите на центъра на тежестта на n-те точки, тези релации добиват вида

$$\frac{\xi-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\eta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\zeta-z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

които изразяват, че центърът на тежестта лежи на нормалата на повърхнината в точката M.

30. Ако означим с x_i, y_i координатите на точките $M_i (i=1, 2, 3)$, с $f_i(x, y)=0$ $(i=1, 2, 3)$ уравненията на трите криви, тогава имаме

$$u=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}+\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2}$$
$$+\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

гдето между $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ съществуват зависимостите

$$f_1(x_1, y_1)=0,\quad f_2(x_2, y_2)=0,\quad f_3(x_3, y_3)=0.$$

Като вземем частните производни по x_i и y_i $(i=1, 2, 3)$ на функцията

$$F=u+\lambda f_1+\mu f_2+\nu f_3$$

и ги приравним към нула, получаваме геометричното свойство, изразено в условието на задачата.

31. Нека $lx+my+nz=0$ е уравнението на дадената равнина и r — разстоянието на началото до една точка от сечението ѝ с повърхнината. Тогава имаме

$$(1)\qquad \begin{cases} r^2=x^2+y^2+z^2, \\ r^4=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2, \\ 0=lx+my+nz. \end{cases}$$

Ако означим с λ и μ два неопределени множителя, познатият метод за търсене на максимум и минимум ни дава

$$x-\lambda l=\mu a^2x,\quad y-\lambda m=\mu b^2y,\quad z-\lambda n=\mu c^2z.$$

Като умножим тези равенства съответно с x, y, z, получаваме

$$\mu=\frac{1}{r^2}.$$

Следователно

$$x=\frac{\lambda l r^2}{r^2-a^2},\quad y=\frac{\lambda m r^2}{r^2-b^2},\quad z=\frac{\lambda n r^2}{r^2-c^2}.$$

Тези стойности, заместени в третото уравнение на (1), ни дават уравнението на максималните и минималните стойности на r:

$$\frac{l^2}{r^2-a^2}+\frac{m^2}{r^2-b^2}+\frac{n^2}{r^2-c^2}=0.$$

Разгледаната повърхнина в тази задача се нарича *повърхнина на еластицитета* (Fresnel, *Mémoire de l'Institut*, t. VII, и Herschel, *Théorie de la Lumière*).

32. Нека уравненията на елипсоида и на равнината са съответно

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
$$lx+my+nz=0.$$

Като оперираме буквално както в предната задача, имаме за уравнението, което определя осите,

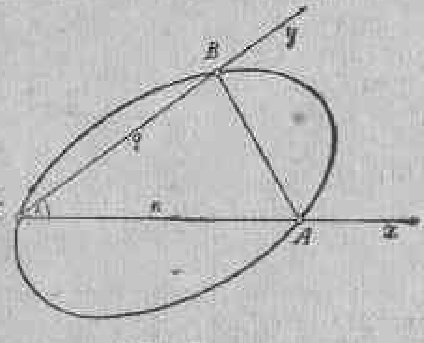
$$\frac{a^2l^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2m^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2n^2}{r^2-c^2}=0.$$

Оттук намираме, че произведението на полуосите на елиптичното сечение е

$$\frac{abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Следователно лицето на това сечение е

$$\frac{\pi abc\sqrt{l^2+m^2+n^2}}{(a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2)^{\frac{1}{2}}}.$$



Черт. 59

33. Да приемем за координатни оси правите CB и CA (черт. 59) и да означим с α и β координатите на центъра на търсената елипса. Уравнението на тази елипса е

$$a(x-\alpha)^2+2b(x-\alpha)(y-\beta)+c(y-\beta)^2-1=0.$$

Ако положим $CA=p$, $CB=q$ и изразим, че елипсата минава през точките A, B, C, получаваме

$$(1)\qquad a\alpha^2+2b\alpha\beta+c\beta^2+1=0,$$
$$(2)\qquad a(p-\alpha)^2-2b(p-\alpha)\beta+c\beta^2-1=0,$$
$$(3)\qquad c(q-\beta)^2-2b(q-\beta)\alpha+a\alpha^2+1=0.$$

Като извадим последователно уравнението (1) от уравненията (2) и (3), намираме

$$a(2\alpha-p)+2b\beta=0, \tag{4}$$

$$c(2\beta-q)+2b\alpha=0. \tag{5}$$

От релациите (1), (2) и (5) получаваме

$$a=-\frac{2\beta-q}{\alpha(p\beta+q\alpha-pq)},$$

$$b=\frac{(2\alpha-p)(2\beta-q)}{2\alpha\beta(p\beta+q\alpha-pq)},\quad c=-\frac{2\alpha-p}{\beta(p\beta+q\alpha-pq)}.$$

За да получим лицето на елипсата във функция от тези стойности, разсъждаваме по същия начин както в предната задача и получаваме уравнението, което дава полуосите:

$$(ac^2-b^2)z^4+(a+c-2b\cos\theta)z^2+\sin^2\theta=0.$$

Тогава лицето на елипсата е

$$\sigma=\frac{\pi\sin\theta}{(ac-b^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Минимумът на σ отговаря на максимума на $ac-b^2$. Следователно достатъчно е да намерим максимума на тази функция, която зависи от променливите α и β. Съответните стойности се дават от уравненията

$$2q\alpha+p\beta-pq=0,\quad 2p\beta+q\alpha-pq=0,$$

отгдето

$$\alpha=\frac{p}{3},\quad \beta=\frac{q}{3},\quad \sigma=\frac{2}{9}\sqrt{3}\,pq\sin\theta.$$

Оттук се вижда, че центърът на елипсата е център на тежестта на дадения триъгълник.

Тази задача е дадена от Euler. Изложеното решение се дължи на Bérard (*Annales de Gergonne*). Liouville е дал в своето списание (t. VII) едно елегантно геометрично решение на задачата.

34. Тази задача се решава по същия начин както предната. Максималното лице на елипсата е равно на лицето на дадения триъгълник, умножено с $\frac{\pi}{\sqrt{3^3}}$, центърът ѝ съвпада с центъра на тежестта на триъгълника и точките на допирането са среди на страните (Bérard, *Annales de Gergonne*, t. IV).

§ 13. Смяна на променливи

Основни указания

A. Смяна на независимата променлива на $y=f(x)$, гдето $x=\varphi(t)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{x'_t y''_t-x''_t y'_t}{x'^3_t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{x'^2_t y'''_t-3x'_t x''_t y''_t+3y'_t x''^2_t-x'_t y'_t x'''_t}{x'^5_t},\ \ldots$$

B. Смяна на функцията с независимата променлива:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3},\quad \frac{d^3y}{dx^3}=\frac{3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-\frac{dx}{dy}\frac{d^3x}{dy^3}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^5},\ \ldots$$

C. Смяна на независимата променлива и функцията $y=f(x)$, гдето $x=\varphi(u,v)$, $z=\psi(u,v)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{dv}{du}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{du}},\ \ldots$$

D. Смяна на независимите променливи на $z=f(x,y)$, гдето $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v},\end{cases}$$

отгдето чрез решаване се получават $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. В случай че $u=\varphi(x,y)$ и $v=\psi(x,y)$, имаме

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}.\end{cases}$$

За да се получат вторите частни производни, тези равенства се диференцират още един път.

Е. Смяна на независимите променливи x и y и функцията z в $z=f(x, y)$, гдето $u=\varphi(x, y, z)$, $v=\psi(x, y, z)$ и $w=\tau(x, y, z)$; w е функцията, а u и v — независимите променливи.

Намирането на производните $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ става от първите две уравнения на системата:

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}+\frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y},$$

след като в тези уравнения са заместени $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ с изразите от последните четири уравнения.

1. а) Имаме

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^3x}{dt^3}=e^t.$$

От друга страна,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t}{x'_t}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_t x'_t-y'_t x''_t}{x'^3_t}=\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\left(\frac{d^3y}{dt^3}\frac{dt}{dx}-\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right)e^{-2t}-2\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}\frac{dt}{dx}$$

$$=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}+2\frac{dy}{dt}-3\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Като заместим тези стойности в даденото диференциално уравнение, получаваме

$$\frac{d^3y}{dt^3}+a\frac{dy}{dt}-y=0.$$

b) $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0.$

c) $\dfrac{d^2y}{dt^2}=0.$

d) $(t-t^3)\dfrac{d^2y}{dt^2}+(1-3t^2)\dfrac{dy}{dt}=ty.$

e) $\dfrac{4e^{-t}}{a^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}.$

f) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0.$

g) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+y=0.$

h) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+ay\,(e^{2t}+1)=0.$

i) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+by=0.$

j) $t\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{dy}{dt}+y=0.$

k) $(1-t^4)\dfrac{d^2y}{dt^2}-3t\dfrac{dy}{dt}-y=0.$

2. а) Ако диференцираме равенството

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \tag{1}$$

относно y, получаваме

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}=-\frac{1}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\frac{d^2x}{dy^2}$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}. \tag{2}$$

Стойностите (1) и (2) заместваме в даденото уравнение и намираме търсения резултат:

$$\frac{d^2x}{dy^2}+x-e^y=0.$$

b) $\frac{d^2x}{dy^2}+x^3\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)^2-y\left(\frac{dx}{dy}\right)^3=0.$

c) $\frac{d^4x}{dy^4}=0.$

3. 1°. От $x=\frac{at+b}{ct+d}$ намираме

$$\frac{dy}{dt}=\frac{ad-bc}{(ct+d)^2}\frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{ad-bc}{(ct+d)^4}\left[(ad-bc)\frac{d^2y}{dx^2}-2c(ct+d)\frac{dy}{dx}\right],$$

$$\frac{d^3y}{dt^3}=\frac{ad-bc}{(ct+d)^6}\left[(ad-bc)^2\frac{d^3y}{dx^3}-6c(ad-bc)(ct+d)\frac{d^2y}{dx^2}+6c^2(ct+d)^2\frac{dy}{dx}\right].$$

Ако заместим

$$\frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2}\ \text{и}\ \frac{d^3y}{dx^3}$$

в диференциалния инвариант на Schwarz, получаваме

$$\frac{(ct+d)^4}{(ad-bc)^2}\left[\frac{\frac{d^3y}{dt^3}}{\frac{dy}{dt}}-\frac{3}{2}\left(\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\frac{dy}{dt}}\right)^2\right].$$

2°. $-\frac{1}{x'^2}\left[\frac{x'''}{x'}-\frac{3}{2}\left(\frac{x''}{x'}\right)^2\right].$

5. a) От връзките $x=r\cos\varphi$ и $y=r\sin\varphi$ намираме

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_\varphi}{x'_\varphi}=\frac{r'\sin\varphi+r\cos\varphi}{r'\cos\varphi-r\sin\varphi},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''_\varphi x'_\varphi-x''_\varphi y'_\varphi}{x'^3_\varphi}=\frac{2r'^2+r^2-r''r}{(r'\cos\varphi-r\sin\varphi)^3}.$$

Ако заместим тези стойности в дадения израз, получаваме

$$-\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''}$$

b) $\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}}.$

c) $\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}.$

d) $u\frac{du}{dt}+3=0.$

e) $\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}+e^{u+t}=0.$

f) $\frac{d^2u}{dt^2}-\frac{du}{dt}=\frac{A}{(a-b)^2}u.$

6. $\frac{d^2y}{ds^2}\frac{dx}{ds}-\frac{d^2x}{ds^2}\frac{dy}{ds}.$

9. a) $\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0.$

b) $\frac{\partial z}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial z}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial\varphi},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\sin^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\frac{\cos^2\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$$
$$+\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2}\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right).$$

За да намерим $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, достатъчно е да сменим в предното уравнение y с x и φ с $\frac{\pi}{2}+\varphi$. Така получаваме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos^2\varphi\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\sin^2\varphi}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\frac{\sin^2\varphi}{r}\frac{\partial z}{\partial r}-\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{r}\left(r\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\varphi}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right).$$

Ако заместим тези стойности в даденото уравнение, намираме

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=0.$$

c) $\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=0.$

10. $\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2u\frac{\partial z}{\partial u} - 2\left(v-\frac{1}{v}\right)\frac{\partial z}{\partial v} + 3u^2 z^2 = 0.$

12. Вземат се пред вид равенствата

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = -\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

получени от зависимостите (1).

13. От последните две уравнения на (1) се вижда, че u и v са функции на x, y и z. Но понеже z е функция на x и y, тогава u и v са функции на x и y, отгдето следва, че от своя страна x и y са функции на u и v. Следователно уравнението $w = x^2 + y^2$ показва, че w е функция на u и v. Тогава имаме

$$2x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = 2x\frac{\partial w}{\partial u} + 2e^z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial v}$$

$$2y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -2y\frac{\partial w}{\partial u} + 2e^z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial v},$$

отгдето

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\left(1-\frac{\partial w}{\partial u}\right)}{e^z\frac{\partial w}{\partial v}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\left(1+\frac{\partial w}{\partial u}\right)}{e^z\frac{\partial w}{\partial v}}.$$

Тези стойности заместваме в даденото уравнение и получаваме

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 - \frac{v^2}{16}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 1 = 0.$$

14. $e^{2w}\left(\cos^2 u\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right).$

15. $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$

16. Ако положим $s = r\sin\theta$, то имаме

$$y = s\sin\varphi,\quad z = s\cos\varphi;\quad x = r\cos\theta,\quad s = r\sin\theta.$$

Ако сега сменим двете променливи y и z с φ и s, то съгласно зад. 9, b) ще намерим, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}. \tag{1}$$

По същия начин, като сменим променливите s и x с r и θ, ще намерим, че

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}. \tag{2}$$

От друга страна, имаме

$$\frac{1}{s}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}. \tag{3}$$

Събираме равенствата (1), (2), (3) и получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0.$$

Като заместим z с равната му стойност, добиваме най-сетне

$$r\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)}{\partial \theta} = 0.$$

Това уравнение, дължимо на Laplace, е от твърде голяма важност в теорията на привличането и в множество въпроси от физиката.

17. Намираме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} = Z^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2YZ\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + Y^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = X^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ZX\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} + Z^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = Y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2YX\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + X^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Умножаваме тези равенства респективно с X^2, Y^2, Z^2 и ги събираме:

$$X^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + Y^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + Z^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$$

$$-2\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + yz\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial y} + yx\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + zx\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right) = 0.$$

Прочее

$$X^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + Y^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + Z^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = 0.$$

18. Намираме:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a\frac{\partial u}{\partial X}+a'\frac{\partial u}{\partial Y}+a''\frac{\partial u}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=b\frac{\partial u}{\partial X}+b'\frac{\partial u}{\partial Y}+b''\frac{\partial u}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=c\frac{\partial u}{\partial X}+c'\frac{\partial u}{\partial Y}+c''\frac{\partial u}{\partial Z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+a'^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+a''^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$$

$$+2a'a''\frac{\partial^2 u}{\partial Y\partial Z}+2a''a\frac{\partial^2 u}{\partial Z\partial X}+2aa'\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=b^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+b'^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+b''^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$$

$$+2b'b''\frac{\partial^2 u}{\partial Y\partial Z}+2b''b\frac{\partial^2 u}{\partial Z\partial X}+2bb'\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+c'^2\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+c''^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}$$

$$+2c'c''\frac{\partial^2 u}{\partial Y\partial Z}+2c''c\frac{\partial^2 u}{\partial Z\partial X}+2cc'\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Y}.$$

Като съберем последните три равенства и вземем пред вид 9-те познати релации между коефициентите, получаваме

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2},$$

което показва, че даденият израз е инвариантен спрямо всяка трансформация на координатната система.

19. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{dz}{dr}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\frac{d^2 z}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{dz}{dr},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\frac{d^2 z}{dr^2}+\left(\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right)\frac{dz}{dr},$$

отгдето намираме търсеното уравнение:

$$\frac{d^2 z}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dz}{dr}=0.$$

Това уравнение се среща при изучаването на движението на течностите.

20. $\frac{d^2 u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}=0.$

21. $w\frac{d^2 u}{dw^2}+\frac{du}{dw}+a\varphi=0.$

§ 14. Развитие на функции в редове

А. Основни формули

Taylor'ов ред на $y=f(x)$:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1!}f'(x)+\frac{h^2}{2!}f''(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\cdots,$$

ако

$$R_n=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Mac'Laurin'ов ред на $y=f(x)$:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\cdots,$$

ако

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Taylor'ов ред на $z=f(x,y)$:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x,\ y)+\frac{1}{1!}\left(h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f+\cdots,$$

ако

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x+\theta h,y+\theta k)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Mac'Laurin'ов ред на $z=f(x,y)$:

$$f(x,y)=f(0,\ 0)+\frac{1}{1!}\left(x\frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial x}+y\frac{\partial f(0,\ 0)}{\partial y}\right)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(0,\ 0)+\cdots,$$

ако

$$R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(\theta x, \theta y) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

B. Основни редове

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ за всяко x.

b) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x \ln a)^n}{n!} + \cdots$

за всяко x, $a > 0$

c) $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$

за всяко x.

d) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$ за всяко x.

e) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$ за всяко x.

f) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$ за всяко x

g) $\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$

за $|x| < 1$ и $x = +1$.

h) $(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \cdots + \binom{m}{n}x^n + \cdots$

за $|x| < 1$; при $m > -1$, също и за $x = 1$;

при $m \geqq 0$ „ „ „ $x = -1$

i) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \pm \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots$ за $|x| \leq 1$.

j) $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$

за $|x| < 1$

k) $\operatorname{arg\,sh} x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ за $|x| \leq 1$.

1. n-тата производна на функцията $\sin^2 x$ е

$$y^{(n)} = 2^{n-1}\sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right].$$

Тогава Taylor'овото ѝ развитие в околността на точката x е

$$\sin^2(x+h) = \sin^2 x + \frac{h}{1!}\sin 2x + \frac{h^2}{2!}2\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \cdots$$

$$+ \frac{h^n}{n!}2^{n-1}\sin\left(2x + \overline{n-1}\frac{\pi}{2}\right) + R_n.$$

Това развитие е валидно за всяко значение на x и h, защото R_n клони към нула. И наистина

$$R_n = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x+\theta h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}2^n \sin\left[2(x+\theta h) + n\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{(2h)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{2}\sin\left[2(x+\theta h) + n\frac{\pi}{2}\right] \to 0.$$

R_n ще клони към нула заедно с $\frac{(2h)^{n+1}}{(n+1)!}$, защото вторият фактор е краен. Обаче $\frac{(2h)^{n+1}}{(n+1)!}$ клони към нула за всяко h, понеже този израз представлява общият член на един сходящ ред.

2. $$\frac{a+x+h}{a-x+h} = \frac{a+x}{a-x} + 2a\left[\frac{h}{(a-x)^2} + \frac{h^2}{(a-x)^3} + \cdots + \frac{h^n}{(a-x)^n} + \cdots\right]$$

за $h < \frac{a-x}{1+\theta}$, където $0 < \theta < 1$.

3. $e^{a(x+h)}\sin b(x+h) = e^{ax}\left[\sin bx + h\sqrt{a^2+b^2}\sin(bx+\varphi)\right.$

$$\left. + \frac{h^2}{2!}\sqrt{(a^2+b^2)^2}\sin(bx+2\varphi) + \cdots + \frac{h^n}{n!}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+n\varphi) + \cdots\right],$$

където $\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ (валидно за всяко x и h).

4. $y^{(n)} = e^{x\cos a}\sin(na + x\sin a)$.

Стойностите на функцията и нейните последователни производни за $x = 0$ са

$$y_0 = 0, \quad y_0' = \sin a, \quad y_0'' = \sin 2a, \ldots, y_0^{(n)} = \sin na, \ldots$$

Тогава степенното развитие на тази функция е

$$y = x\sin a + \frac{x^2}{2!}\sin 2a + \cdots + \frac{x^n}{n!}\sin na + R_n,$$

където

$$R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\theta x\cos a}\sin(\overline{n+1}\,a + \theta x\sin na).$$

Това развитие е валидно за всяко значение на x, защото остатъчният член клони към нула заедно с $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

5. $y = 1 + \frac{x\cos a}{1!} + \frac{x^2\cos 2a}{2!} + \cdots + \frac{x^n\cos na}{n!} + \cdots$ за всяко x.

6. Ако използуваме формулата $4\cos^3 x = \cos 3x + 3\cos x$ и вземем пред вид степенното развитие на $\cos\varphi$, получаваме

$$y = 1 - \frac{3}{2!}x^2 + \frac{3.7}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n\frac{3^{2n}+3}{(2n)!}\,\frac{x^{2n}}{4} \mp \cdots$$

Този ред представлява дадената функция за всяко значение на x, понеже степенното развитие на $\cos\varphi$ е валидно за всяко φ.

7. $y = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{13x^7}{120} + \cdots + (-1)^n\frac{3^{2n+1}-3}{(2n+1)!}\,\frac{x^{2n+1}}{4} \pm \cdots$

8. Дадената функция може да се представи във вида

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 1 + \frac{4x}{(1-x)^2}.$$

Обаче

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots, \qquad \text{за } |x| < 1.$$

Тогава за $|x| < 1$ имаме

$$y = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 1 + 4x + 8x^2 + \cdots + 4nx^n + \cdots$$

9. $y = 1 - 3\,\frac{1}{2}\,x + 7\,\frac{1}{2.4}\,x^2 - \cdots$

$$+ (-1)^n(4n-1)\frac{1.3\ldots(2n-1)}{(2n)!}\,x^n + \cdots$$

за всичко $|x| < 1$.

10. $y = 2\left[2 - \frac{1+3^2}{2!}x^2 + \frac{1+3^4}{4!}x^4 - \cdots \pm \frac{1+3^{2n}}{(2n)!}x^{2n} \mp \cdots\right]$

за всяко x.

11. $y = 1 + \frac{3}{2}x + 2\left[\frac{x^2}{1.2.3} - \frac{x^3}{2.3.4} + \cdots \pm \frac{x^n}{(n-1)\,n\,(n+1)} \mp \cdots\right]$

за $|x| \leq 1$ и с изключение на $x = 0$ и $x = -1$.

12. Ако развием $e^{\sin x}$ по степените на $\sin x$ и в това развитие заместим $\sin x$ със степенния ред

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

получаваме

$$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{за всяко } x.$$

13. *Първо решение.* — Като вземем пред вид, че

(1) $$\frac{d^{2m+1}\arcsin x}{dx^{2m+1}} = \frac{(2m)!}{\left(1-x^2\right)^{m+\frac{1}{2}}}\left[x^{2m} + \frac{2m(2m-1)}{2!}\,\frac{1}{2}\,x^{2m-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)}{4!}\,\frac{1.3}{2.4}\,x^{2m-4} + \cdots\right]$$

(§ 5, 25) и положим $x = 0$, получаваме

$$\frac{1}{(2m+1)!}\left(\frac{d^{2m+1}\arcsin x}{dx^{2m+1}}\right)_{x=0} = \frac{1.3.5\ldots(2m-1)}{2^m\,m!}\,\frac{1}{2m+1}.$$

Следователно

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\,\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + R_{2n+1},$$

където избираме втората форма на остатъка:

$$R_{2n+1} = \frac{(1-\theta)^{2n}x^{2n+1}}{(2n)!}f^{(2n+1)}(\theta x).$$

Като заместим $f^{(2n+1)}(\theta x)$ с неговата стойност, изведена от формулата (1), получаваме

$$R_{2n+1} = \frac{(1-\theta)^{2n}x^{2n+1}}{\left(1-\theta^2x^2\right)^{2n+\frac{1}{2}}}\left[(\theta x)^{2n} + \frac{2n(2n-1)}{2!}\,\frac{1}{2}\,(\theta x)^{2n-2}\right.$$

$$\left. + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}\,\frac{1.3}{2.4}\,(\theta x)^{2n-4} + \cdots\right].$$

Сега ще покажем, че R_{2n+1} клони към нула, когато n клони към безкрайност и когато $0 < x < 1$.

И наистина изразът в скобите на последната формула е по-малък от

$$(\theta x)^{2n} + \binom{2n}{2}(\theta x)^{2n-2} + \binom{2n}{4}(\theta x)^{2n-4} + \cdots$$

Понеже този израз е равен на

$$\frac{1}{2}[(1+\theta x)^{2n} + (1-\theta x)^{2n}],$$

то

$$R_{2n+1} < \frac{(1-\theta)^{2n}\, x^{2n+1}}{2\left(1-\theta^2 x^2\right)^{2n+\frac{1}{2}}}[(1+\theta x)^{2n} + (1-\theta x)^{2n}],$$

или още по-добре

$$R_{2n+1} < \frac{x^{2n+1}}{2\sqrt{1-\theta^2 x^2}}\left[\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{2n}\right].$$

Обаче винаги

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$$

и освен това

$$\frac{1-\theta}{1-\theta x} < 1,$$

ако x е по-малко от единица. Прочее

$$R_{2n+1} < \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-\theta^2 x^2}} < \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}},$$

отгдето

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = 0.$$

Така формулата

$$\operatorname{arc\,sin} x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

е доказана за стойности на x, заключени между -1 и $+1$. Тази формула съществува още за $x = +1$ и $x = -1$, защото и в двата случая редът в дясната страна остава сходящ и съгласно една теорема на Abel е непрекъсната функция на x.

Второ решение. — Сега ще използуваме друг метод за развитие на една функция в степенен ред, който се прилага само тогава, когато производната на тази функция може да се развие в степенен ред.

Нека развитието на $\operatorname{arc\,sin} x$ е

$$\operatorname{arc\,sin} x = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \cdots,$$

гдето $A, B, C, \ldots$ са неопределени коефициенти, които трябва да определим.

Диференцираме двете страни на това равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \cdots \tag{2}$$

Обаче

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6 + \cdots, \tag{3}$$

и като сравним коефициентите на съответните степени на двете страни на (2) и (3), получаваме

$$B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}, \quad E = 0, \quad F = \frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}, \quad \ldots$$

Също, ако положим в (1) $x = 0$, виждаме, че $A = 0$. Следователно степенното развитие на $\operatorname{arc\,sin} x$ е

$$x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

Това развитие според една теорема е валидно за всички значения на x, за които редът, образуван от почленното му диференциране (т. е. редът (2)), е абсолютно сходящ.

Обаче редът (3) е абсолютно сходящ за $|x| < 1$, отгдето следва, че горното развитие е вярно за същите значения на x.

14. Ако диференцираме $y = (\operatorname{arc\,sin} x)^2$ два пъти, получаваме

$$(1-x^2)y'' - xy' - 2 = 0.$$

Отделните членове на това равенство диференцираме n пъти по правилото на Leibniz и добиваме

$$(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2 y^{(n)} = 0.$$

Оттук, ако положим $x = 0$, намираме

$$y_0 = 0, \quad y_0' = 0, \quad y_0'' = 2, \quad y_0''' = 0,$$

$$y_0^{(4)} = 2.4, \quad y_0^{(5)} = 0, \quad y_0^{(6)} = 2.2^2.4^2, \ldots,$$

$$y_0^{(2n-1)} = 0, \quad y_0^{(2n)} = (2n-2)^2(2n-4)^2\ldots6^2.4^2.2^2.2.$$

Следователно

$$(\operatorname{arc\,sin} x)^2 = \frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}\frac{x^{2n}}{n} + \cdots$$

Това развитие е валидно за $|x| < 1$, защото степенното развитие на $\arcsin x$ е в сила за тези значения на x.

15. $y = x + \frac{2}{3}x^3 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}x^{2n-1} + \cdots$ за < 1.

16. $y = 1 + ax + \frac{a^2}{2!}x^2 + \frac{a(a^2+1)}{3!}x^3 + \frac{a^2(a^2+2^2)}{4!}x^4 + \cdots$

за $|x| \leqq 1$.

— Работи се по същия начин както в задача **14.**

17. — Извеждането на развитието на $\operatorname{arc\,tg} x$ да се извърши както и зад. **13**, второ решение.

18. $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{a} + \frac{x^3}{3a^3} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)a^{2n-1}} \pm \cdots$

за $|x| < 1$.

19. $y = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \pm \cdots$

за $|x| < 1$.

20. $y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \cdots$ за $|x| < \frac{\pi}{2}$.

21. Като вземем пред вид степенното развитие

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{4} + \frac{1.3\,z^3}{2.4\,6} - \cdots \qquad (|z| \leqq 1)$$

и положим

$$z = -\sin^2 x,$$

получаваме

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{2}\frac{\sin^4 x}{4} - \frac{1.3}{2.4}\frac{\sin^6 x}{6} - \cdots$$

22. Лесно се установява, че

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{arc\,tg}(z+h) = \operatorname{arc\,tg} z + \frac{h}{1}\sin x \sin x - \frac{h^2}{n}\sin 2x \sin^2 x$$

$$+ \frac{h^3}{3}\sin 3x \sin^3 x - \frac{h^4}{4}\sin 4x \sin^4 x + \cdots \pm \frac{h^n}{2}\sin nx \sin^n x \mp \cdots,$$

където

$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{z} \text{ и } |z| < 1.$$

Ако в (1) положим $h = -\sqrt{1+z^2}$, получаваме

$$\frac{\pi}{2} = \frac{x}{2} + \sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \cdots \pm \frac{\sin nx}{n} \pm \cdots,$$

където $0 < x < \pi$.

23. — Във формулата (1) на предната задача се полага $h = -z$.

24. — Във формулата (1) на зад. 22 се полага $h = -z - \frac{1}{2}$.

25. — Функцията $\sin mx = \sin[x + (m-1)x]$ развиваме по степените на $(m-1)x$.

27. Формулата на Taylor ни дава

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+\theta)^2} \qquad (0 < \theta < 1).$$

Ако в това уравнение заместим n последователно с

$$n+1,\ n+2, \ldots,\ n+n-1, \ldots, nm,$$

получаваме

$$\ln(n+1) - \ln n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+\theta)^2},$$

$$\ln(n+2) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1+\theta_1)^2},$$

. . . .

$$\ln[n+(n-1)+1] - \ln[n+(n-2)+1] = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2(n-1+\theta_{n-1})^2},$$

. . . .

$$\ln 3n - \ln(3n-1) = \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{2(3n-1+\theta_{2n-1})^2},$$

. . . .

$$\ln(mn+1) - \ln mn = \frac{1}{mn} - \frac{1}{2(mn+\theta_{(m-1)n})^2},$$

където $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{(m-1)n}$ са правилни положителни дроби.

Събираме почленно тези равенства и намираме, че

$$\ln(mn+1) - \ln n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \cdots + \frac{1}{mn-1} + \frac{1}{mn}$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n+\theta)^2} + \frac{1}{(n+1+\theta_1)^2} + \cdots + \frac{1}{(mn+\theta_{(m-1)n})^2}\right],$$

или

$$\lim_{n\to\infty} \ln \frac{mn+1}{n} = \ln m \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{mn}\right),$$

понеже

$$\frac{1}{(a+\theta)^2} + \cdots + \frac{1}{(mn+\theta_{(m-1)n})^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(mn)^2} < \frac{m}{n}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 0.$$

28. — Взема се пред вид формулата

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 + \cdots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + \cdots$$

29. В степенното развитие

$$\sin(m \arcsin z) = mz + \frac{m(1-m^2)}{3!}z^3 + \cdots$$
$$+ \frac{m(1-m^2)(3^2-m^2)\ldots[(2n-1)^2-m^2]}{(2n+1)!}z^{2n+1} + \cdots,$$

където $|z| < 1$, полагаме

$$\arcsin z = x$$

и получаваме търсената формула.

31. — Развива се функцията $\ln \frac{x}{x-1} = \ln\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)$ по степените на $\frac{1}{x-1}$.

32 и 33. След като логаритмуваме формулите (6) и (7) на зад. 77, § 3 и диференцираме получените резултати, намираме търсените формули. Това диференциране е възможно, защото получените редове са равномерно сходящи.

34. Във формулата (зад. 15)

$$\frac{\arcsin z}{\sqrt{1-z^2}} = z + \frac{2}{3}z^3 + \cdots + \frac{2.4\ldots(2n-2)}{3.5\ldots(2n-1)}z^{2n-1} + \cdots$$

полагаме

$$z = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

отгдето

$$\arcsin z = \operatorname{arctg} x,$$

и намираме

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{x^2}{1+x^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + \cdots\right].$$

Ако приложим това развитие в релацията

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3},$$

получаваме твърде удобен ред за пресмятане на π:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{2}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{3}{10}\left[1 + \frac{2}{3}\frac{1}{10} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right].$$

35. Ако в равенството

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots\right) \qquad (|x| < 1)$$

положим

$$x = \frac{1}{2n+1},$$

намираме

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots$$

Дясната страна на това равенство е по-малка от

$$1 + \frac{1}{3}\left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \cdots\right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Оттук следва, че

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

или като антилогаритмуваме,

$$(1) \qquad e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

От друга страна, ако положим

$$(2) \qquad a_n = \frac{n!\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

и забележим, че

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e},$$

неравенствата (1) се обръщат във вида

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12(n+1)}},$$

т. е.

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}} < a_{n+1} < a_n.$$

Оттук се вижда, че числата $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ от известно място нататък постоянно растат, като остават по-малки от a_n, които от своя страна образуват намаляща редица. Следователно те, както и другите, клонят към една напълно определена граница и затова можем да положим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n e^{-\frac{1}{12n}} = a.$$

Следователно за всяко значение на n имаме

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n, \quad \text{т. е.} \quad a = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}},$$

където $0 < \theta < 1$. Ако заместим a_n в равенството (2), добиваме

(3) $$n! = a n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

Нека сега определим числото a. За тази цел ще се възползуваме от формулата на Wallis (зад. **78**, § 3):

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{2n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\left[\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\right]^2.$$

Като имаме пред вид формулата (3), можем да пишем

$$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)} = \frac{(2.4.6\ldots 2n)^2}{1.2.3\ldots 2n} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} = a\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}},$$

където θ и θ' са правилни дроби. Следователно

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{n}{2}}\, e^{\frac{4\theta-\theta'}{24n}} = \frac{a}{2},$$

отгдето $a = \sqrt{2\pi}$. Прочее формула (3) приема следния вид:

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, .\, n^n\, .\, e^{-n+\frac{\theta}{12n}}.$$

36. Ако в равенството

$$e^y = 1 + \frac{y}{1} + \frac{y^2}{2!} + \cdots + \frac{y^n}{n!} + \cdots$$

положим $y = ix$, получаваме

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots,$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right).$$

Обаче редовете в скобите представляват съответно $\cos x$ и $\sin x$. Следователно

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

39. Bernoulli'евите числа се дефинират чрез символичното равенство

(1) $$(B+1)^p - B^p = p,$$

където p взема стойности 1, 2, 3,… и приемаме, че $B_0 = 1$. Това символично равенство изразява, че най-напред повдигаме на степен p бинома $(B+1)^p$ и след това заместваме съответните степени на B, например B^k с B_k. Така за $p=2$ получаваме $2B_1 + 1 = 2$, отгдето $B_1 = \frac{1}{2}$; за $p=3$ имаме $3B_2 + 3B_1 + 1 = 3$, отгдето $B_2 = \frac{1}{6}$; като продължаваме така, ще намерим, че

$$B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\quad B_5 = 0,\quad B_6 = \frac{1}{42},\quad B_7 = 0,$$

$$B_8 = -\frac{1}{30},\quad B_9 = 0,\quad B_{10} = \frac{5}{66},\quad B_{11} = 0,$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730},\quad B_{13} = 0,\quad B_{14} = \frac{7}{6},\ldots$$

От равенството

$$f[x + (B+1)h] - f(x+Bh) = \sum_{p=1}^{\infty}\left[(B+1)^p - B^p\right]\frac{h^p f^{(p)}(x)}{p!},$$

като вземем пред вид формулата (1), получаваме

(2) $$f[(x+h)+Bh] - f(x+Bh) = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{h^p f^{(p)}(x)}{(p-1)!} = hf'(x+h).$$

Тази формула е основна в теорията на Bernoulli'евите числа. Ако в (2) положим $x=-h$ и заместим h с x, намираме

(3) $$f(Bx)-f(Bx-x)=xf'(0).$$

Оттук можем лесно да покажем, че всички Bernoulli'еви числа с нечетен индекс са нули с изключение на $B_1=\frac{1}{2}$. И наистина, ако $f(x)=x^p$, формула (3) дава

$$B^p-(B-1)^p=0,$$

гдето $p\neq 1$. Ако $p>1$, то въз основа на това равенство тъждеството (1) може да се напише във вида

$$(B+1)^p-(B-1)^p=p,$$

или като заместим p с $2p$ във вида

$$B_{2p-1}+\frac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_{2p-3}+\cdots+\frac{1}{6}(2p-1)(2p-2)B_3=0.$$

Ако тук положим $p=2, 3, 4,\ldots$, виждаме, че $B_3, B_5, B_7,\ldots$ са равни на нула.

В частност, ако във формула (3) положим $f(x)=e^x$, получаваме

$$e^{Bx}-e^{Bx}e^{-x}=x, \quad \text{отгдето} \quad e^{Bx}=\frac{xe^x}{e^x-1},$$

или

$$\frac{xe^x}{e^x-1}=1+B_1x+\frac{B_2x^2}{2!}+\frac{B_3x^3}{3!}+\cdots=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\cdots$$

Това показва, че коефициентите на степенното развитие на функцията $\frac{xe^x}{e^x-1}$, умножени съответно с 1, 1!, 2!, 3!, ..., са Bernoulli'евите числа.

Сега в равенството (3) полагаме $f(x)=\cos x$ и получаваме

$$\cos Bx-\cos Bx\cos x-\sin Bx\sin x=0.$$

Като вземем пред вид, че $B_3=B_5=\cdots=0$, имаме

$$\sin Bx=B_1x-\frac{B_3x^3}{3!}+\frac{B_5x^5}{5!}-\cdots=\frac{x}{2}.$$

Прочее, ако заместим x с $2x$, намираме

$$\cos 2Bx=\frac{x\sin 2x}{1-\cos 2x}=x\,\mathrm{ctg}\,x,$$

т. е.

$$x\,\mathrm{ctg}\,x=1-\frac{4B_2x^2}{2!}+\frac{4^2B_4x^4}{4!}-\frac{4^3B_6x^6}{6!}+\cdots \quad \text{за } |x|<\pi.$$

От това развитие лесно може да се намерят развитията на $\frac{x}{\sin x}$, $\mathrm{tg}\,x,\ldots$, като забележим, че

$$\mathrm{ctg}\frac{x}{2}-\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\sin x}, \quad \mathrm{ctg}\,x-2\,\mathrm{ctg}\,2x=\mathrm{tg}\,x,\ldots$$

Така най-сетне получаваме

$$x\,\mathrm{ctg}\,x=1-\frac{x^2}{3}-\frac{x^4}{35}-\frac{2x^6}{945}-\frac{x^8}{4725}-\cdots \quad \text{за } |x|<\pi.$$

$$\frac{x}{\sin x}=1+\frac{x^2}{6}+\frac{7x^4}{360}+\frac{31x^6}{15\,120}+\frac{127x^8}{604\,800}+\cdots \quad \text{за } |x|<\pi.$$

$$\mathrm{tg}\,x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\frac{62x^9}{2835}+\cdots \quad \text{за } |x|<\frac{\pi}{2}.$$

40. Euler'овите числа се определят чрез символичното равенство

$$(E+1)^p+(E-1)^p=0,$$

гдето p взема стойностите 1, 2, 3, ... и приемаме, че $E_0=1$. Тук символът има същото значение както в предната задача. От това равенство, като даваме последователно на p стойности 1, 2, 3, 4, ..., намираме

$$E_1=0,\quad E_2=-1,\quad E_3=0,\quad E_4=5,\quad E_5=0,\quad E_6=-61,$$
$$E_7=0,\quad E_8=1365,\ldots$$

Оттук се вижда, че Euler'овите числа с нечетен индекс са нули. Също лесно се установява зависимостта (вж. предната задача)

$$f[x+(E+1)h]+f[x+(E-1)h]=2f(x),$$

или

$$f[(x+h)+Eh]+f[(x-h)+Eh]=2f(x).$$

Тази формула е основна в теорията за Euler'овите числа. Ако положим $x=0$ и заместим h с x, намираме

(1) $$f(Ex+x)+f(Ex-x)=2f(0).$$

В частност, ако $f(x)=e^x$, тази зависимост се обръща във вида

$$e^{Ex}e^x+e^{Ex}e^{-x}=2, \quad \text{отгдето} \quad e^{Ex}=\frac{2}{e^x+e^{-x}}.$$

Оттук, ако лясната страна на последното равенство развием по степените на x, получаваме равенството

$$\frac{2}{e^x+e^{-x}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}-\frac{61x^6}{720}+\frac{277x^8}{8064}-\cdots,$$

на което коефициентите на дясната страна, умножени съответно с 1, 1!, 2!, …, ще представляват Euler'овите числа.

Друго приложение на формула (1) е търсенето на степенното развитие на $\sec x$, за което е достатъчно да положим $f(x)=\cos x$. Така намираме

$$\cos Ex = \sec x,$$

т. е.

$$\sec x = 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\frac{61x^6}{720}+\frac{277x^8}{8064}+\cdots$$

41. В (1) полагаме $h=-x$ и получаваме

$$f(0)=f(x)-xf'(x)+\frac{x^2}{2!}f''(x)+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}[x(1-\theta)]$$

или

$$f(x)=f(0)+xf'(x)-\frac{x^2}{2!}f''(x)+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(x)$$

$$+(-1)^{n+2}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta_1 x).$$

Обратно, нека $f(x)=F(h-x)$, отгдето

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n F^{(n)}(h-x).$$

Тогава уравнение (2) може да се напише във вида

$$F(h-x)=F(h)-xF'(h-x)-\cdots-\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(h-x)$$

$$-\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(h-\theta_1 x).$$

Ако в това равенство положим $h-x=z$, получаваме

$$F(x+z)=F(z)+xF'(z)+\cdots+\frac{x^n}{n!}F^{(n)}(z)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(z+\theta x)$$

$$(\theta=1-\theta_1),$$

резултат, който не се отличава от релацията (1).

42. а). Ако в степенното развитие на $\sin x$ заместим x с $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}=0{,}017\,453\,3$ и вземем само първите два члена, получаваме

$$\sin 1^\circ=\sin 0{,}017\,453\,3=0{,}017\,453\,3-0{,}000\,009=0{,}017\,452\,4.$$

b) $\sqrt[3]{129}=\sqrt[3]{125+4}=5\left(1+\frac{4}{125}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$=5\left[1+\frac{1}{3}\frac{4}{125}+\frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{4}{125}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=5(1+0{,}010\,666\,6-0{,}000\,113\,7+0{,}000\,002\,0-\cdots)$$

$$=5{,}052\,77\ldots$$

c) 2,153.

d) $y=\frac{(1-x^m)\ln(1-x)}{mx^m}+\frac{1}{mx^m}\left(x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^m}{m}\right).$

Тази формула е валидна и за $x=1$.

44. а) 3,1071; **b)** 3,017089; **c)** 9,16514.

45. 1,4'.

46. 114,6 d.

48. $3{,}141\,592\,653\,6\approx\pi$.

49. а) Ако във формула (6) на зад. **77**, **§ 3** заместим x с ix, получаваме, че

$$iy=\sin ix,$$

отгдето, като развием $\sin ix$ по степените на ix, намираме

$$y=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots$$

b) $y=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots$ — Използува се формула (7) на зад. **77, § 3.**

50. От даденото уравнение получаваме

$$(3y^2-1)y'+1=0,$$

$$6yy'^2+(3y^2-1)y''=0,$$

$$6y'^3+18yy'y''+(3y^2-1)y'''=0,$$

$$36y'^2y''+18yy''^2+24yy'y'''+(3y^2-1)y^{(4)}=0.$$

За $x=0$ получаваме:

а) $y=0,\ y'=1,\ y''=0,\ y'''=6,\ y^{(4)}=0,\ y^{(5)}=360,\ldots;$

b) $y=1,\ y'=-\frac{1}{2},\ y''=-\frac{3}{4},\dots;$

c) $y=-1,\ y'=-\frac{1}{2},\ y''=\frac{3}{4},\dots$

Оттук се вижда, че функцията има съответно следните три степенни развития:

a) $y=x+x^3+3x^5+\cdots;$

b) $y=1-\frac{x}{2}-\frac{3x^2}{8}-\cdots;$

c) $y=-1-\frac{x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\cdots$

51. Имаме

$$\operatorname{arc}\alpha=r\alpha,\quad a=2r\sin\frac{\alpha}{2},\quad b=2r\sin\frac{\alpha}{4},$$

откъдето

$$a=2r\left[\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5-\cdots\right],$$

$$b=2r\left[\frac{\alpha}{4}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^5-\cdots\right],$$

$$8b-a=2r\left[\frac{3\alpha}{2}-\frac{3\alpha^5}{15.2^{10}}+\cdots\right].$$

Оттук

$$\frac{8b-a}{3}=\operatorname{arc}\alpha\left(1-\frac{\alpha^4}{15.2^9}+\cdots\right)=\operatorname{arc}\alpha\left(1-\frac{\alpha^4}{7680}+\cdots\right).$$

Грешката е

$$\varepsilon=\frac{\alpha^4}{7680}\cdots$$

Ако $\alpha=\frac{\pi}{6}$, тя е $<0{,}000\,01$.

52. $z=xy\left(2-\frac{x^2+y^2}{3!}+\frac{x^4+y^4}{5!}-\cdots\right)$ за всяко x и y.

53. $z=1+x+y+x^2+xy+y^2+\cdots x^n+x^{n-1}y+\cdots+y^n+\cdots$

за $|x|<1,\ |y|<1$.

54. $z=\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{x^n y^m}{nm}$ за $|x|<1,\ |y|<1$.

55. $z=x+y-\frac{x^3}{3}-\frac{y^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{y^5}{5}-\cdots$ за $|x|<1,\ |y|<1$.

56. $z=1+\frac{1}{1!}(ax+by)+\frac{1}{2!}(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)+\cdots$

за всяко x и y.

57. $z=x-\frac{x}{2!}\left(\frac{x^2}{3}+y^2\right)+\frac{x}{4!}\left(\frac{x^4}{5}+2x^2y^2+y^4\right)-\cdots$

за всяко x и y.

58. $z=1+[2(x-1)-(y-1)]-[8(x-1)^2-10(x-1)(y-1)+$

$+3(y-1)^2]+\cdots$

Отдел II

ГЕОМЕТРИЧНИ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 15. Тангента t, нормала n, T, N, S_t, S_n и подножица на равнинни криви

Основни указания

Уравнения на тангента:

$$t \equiv \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\xi - x}{x'}, \quad \eta - y = y'(\xi - x),$$

$$t \equiv (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Уравнения на нормала:

$$n \equiv \frac{\eta - y}{x'} + \frac{\xi - x}{y'} = 0, \quad y'(\eta - y) + (\xi - x) = 0,$$

$$n \equiv (\xi - x)\frac{\partial F}{\partial y} - (\eta - y)\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

В декартова координатна система дължина на T, S_t, N, S_n:

$$T = y\sqrt{1 + \frac{1}{y'^2}}, \quad N = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad S_t = \frac{y}{y'}, \quad S_n = yy'.$$

В полярна координатна система дължина на T, S_t, N, S_n:

$$T = r\sqrt{1 + \frac{r^2}{r'^2}}, \quad N = \sqrt{r^2 + r'^2}, \quad S_t = \frac{r^2}{r'}, \quad S_n = r'.$$

Уравнението на подножицата се дава от системата уравнения:

$$\begin{cases} y = f(x), \\ \eta - y = y'(\xi - x), \\ \eta - b = -\dfrac{1}{y'}(\xi - a). \end{cases}$$

Ъгъл между две криви: $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ или $F(x, y) = 0$, $G(x, y) = 0$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_2' - y_1'}{1 + y_1' y_2'} = \frac{F_x G_y - F_y G_x}{F_x G_x + F_y G_y}.$$

Условия за ортогоналност

$$1 + y_1' y_2' = 0 \text{ или } F_x G_x + F_y G_y = 0.$$

1. Като вземем пред вид, че

$$y' = 6x^2 - 10x + 3\,|_{x=2} = 7,$$

то

$$t \equiv 7\xi - \eta - 15 = 0, \quad n \equiv \xi + 7\eta + 5 = 0.$$

2. $t \equiv 9\xi + 2\eta + 12 = 0$, $n \equiv 2\xi - 9\eta + 31 = 0$.

3. $t \equiv 2\xi - \eta - 3 = 0$, $n \equiv \xi + 2\eta - 14 = 0$.

4. $\begin{cases} t \equiv b\xi\cos t + a\eta\sin t - ab = 0, \\ n \equiv a\xi\sin t - b\eta\cos t - (a^2 - b^2)\sin t\cos t = 0. \end{cases}$

5. $t \equiv 2\eta + 3\xi - 5 = 0$, $n \equiv 3\eta - 2\xi + 1 = 0$.

6. За да бъде тангентата на дадената крива успоредна на правата $y = ax + b$, трябва

$$y' = \frac{3x^2}{2y} = a \text{ или } \frac{9x^4}{4a^2} = y^2 = x^3,$$

или още

$$x = \frac{4a^2}{9} \text{ и } y = \frac{8a^3}{27}.$$

Тогава тангентата, успоредна на дадената права, е

$$\eta - \frac{8a^3}{27} = a\left(\xi - \frac{4a^2}{9}\right).$$

7. $\eta - 4\xi + 3 = 0$.

9. $s = 2k^2$.

11. a.

12. Абсцисите на пресечните точки са

$$0, \; a + m, \; a - m.$$

Тогава уравненията на съответните тангенти са

$$\eta = a^2\xi,$$
$$\eta = m(3m + 2a)\xi - 2m(m + a)^2,$$
$$\eta = m(3m - 2a)\xi + 2m(m - a)^2.$$

Точката, гдето тангентата на една крива от трета степен пресича самата крива, се нарича *тангенциална точка* на точката на допирането. Първата от тези точки, които тук разглеждаме, е с координати

$$\xi = 2a, \quad \eta = 2a^3.$$

Абсцисата на втората точка удовлетворява следното уравнение:

$$m(3m+2a)\xi - 2m(m+a)^2 = \xi(\xi - a)^2. \tag{1}$$

Обаче не е необходимо да решаваме това уравнение, за да намерим тази точка. Наистина знаем, че абсцисата $a+m$ на точката на допирането е двоен корен на уравнението (1) и понеже произведението на тези корени е $-2m(a+m)^2$, то, като разделим с $(a+m)^2$, получаваме търсената абсциса. По такъв начин намираме за втората и подобно за третата съответно следните координати:

$$x = -2m, \quad y = -2m(2m+a)^2,$$

$$x = 2m, \quad y = 2m(2m-a)^2.$$

Непосредствено се проверява, че тези три точки са разположени върху правата

$$\eta = (a^2 + 4m^2)x - 8m^2 a.$$

Това е един пример, с който се проверява теоремата, доказана от Mac-Laurin, и която може да се произнесе така: *Когато три точки на една крива от трета степен лежат на една права, то същото свойство притежават и техните тангенциални точки.*

13. $y' = \dfrac{(x-y)y}{x^2}$; $T = y\sqrt{1 + \left[\dfrac{x^2}{y(x-y)}\right]^2}$,

$$N = \frac{y}{x^2}\sqrt{x^4 + y^4 + x^2y^2 - 2xy^3},$$

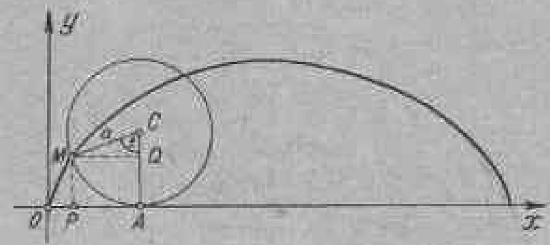
$$S_t = \frac{x^2}{x-y}, \quad S_n = \frac{y^2}{x^2}(x-y).$$

14. $T = \dfrac{y}{p}\sqrt{y^2+p^2}$, $N = \sqrt{p^2+y^2}$, $S_t = \dfrac{y^2}{p}$, $S_n = p$.

15. $T = \operatorname{tg} t\,\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$, $N = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$,

$$S_t = a\sin t \operatorname{tg} t, \quad S_n = -\frac{b^2}{a}\cos t.$$

16. Циклоидата е крива, която се описва от една точка, лежаща на една окръжност, която се търкаля без хлъзгане по една права (черт. 60). Параметричните ѝ уравнения се получават по следния начин:



Черт. 60

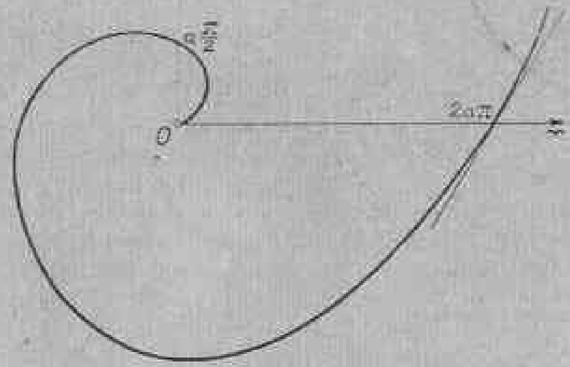
$$x = \overline{OA} - \overline{PA} = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$

$$y = \overline{AC} - \overline{QC} = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Дължините на T, N, S_t, S_n имат следните стойности:

$$T = 2a\operatorname{tg}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}, \quad N = 2a\sin\frac{t}{2}, \quad S_t = 2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}, \quad S_n = a\sin t.$$

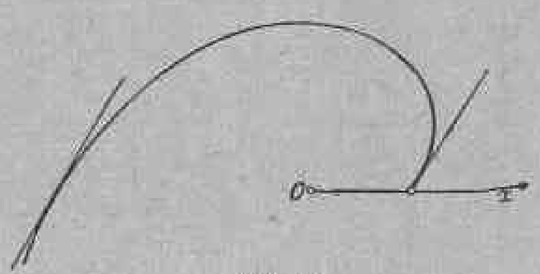
17. $T = a\theta\sqrt{1+\theta^2}$, $N = a\sqrt{1+\theta^2}$, $S_t = r\theta$, $S_n = a$ (черт. 61).



Черт. 61

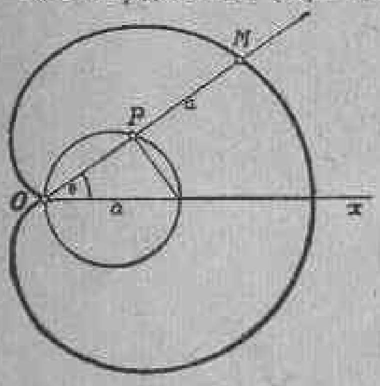
18. $T = r\sqrt{1 + \dfrac{1}{m^2}}$, $N = r\sqrt{1+m^2}$, $S_t = \dfrac{r}{m}$, $S_n = rm$ (черт. 62).

19. Ако от произволна точка на една окръжност прекараме сноп лъчи и върху тяхното продължение от вторите точки на пресичането с окръжността нанасяме винаги дължината a на диаметъра на тази



Черт. 62

окръжност, то получените крайни точки на тези лъчи ще опишат кривата к а р д и о и д а (черт. 63). От закона за образуването на тази крива се получава уравнението ѝ:



Черт. 63

$$r = \overline{OP} + \overline{PM} = a\cos\theta + a = a(1 + \cos\theta).$$

Дължините на T, N, S_t и S_n са

$$T = \frac{\sqrt{2}\,a(1+\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}{\sin\theta},\quad N = a\sqrt{2(1+\cos\theta)},$$

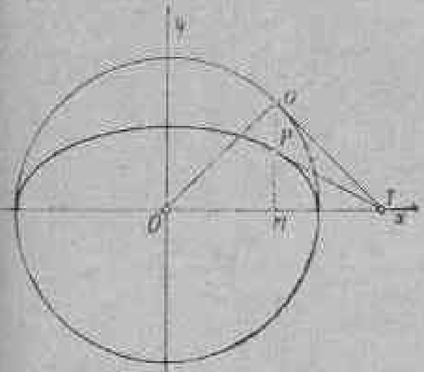
$$S_t = \frac{(1+\cos\theta)^2 a}{\sin\theta},\quad S_n = -a\sin\theta.$$

20. Субтангентата е $S_t = \frac{a^2 - x^2}{x}$, която очевидно не зависи от оста 2λ. Това свойство може да ни послужи за построяване на тангента в една дадена точка P на елипсата. Прекарваме една окръжност с радиус a, центърът на която съвпада с центъра на елипсата (черт. 64). През точката Q с абсциса, равна на тази на точката M, прекарваме тангентата, която пресича оста x в точката T. Тогава търсената тангента на елипсата ще бъде правата, която съединява точките P и T.

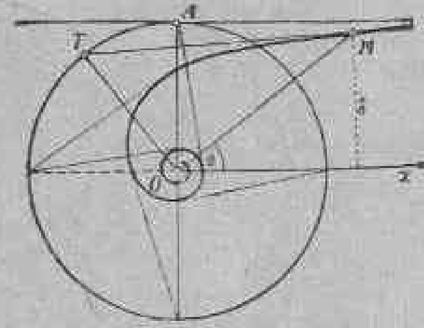
21. Полярната субтангента е $S_t = \frac{r^2}{r'} = a$. Когато θ се приближава до 0, r расте безпределно. Следователно кривата постоянно се приближава до правата, която отстои от полярната ос на разстояние a, защото

$$= \lim_{\theta \to 0} r\sin\theta = a.$$

Напротив, при безпределно растене на θ r клони към нула, т. е. кривата обикаля безбройно много пъти около началото, без да го достигне. Краят на полярната субтангента лежи на окръжността с център началото и радиус a. От точките на окръжността можем да прекараме безбройно много тангенти към кривата, на които допирните точки са точките на пресичането на кривата с правата, която е перпендикулярна на радиус-вектора OT и минава през началото (черт. 65)



Черт. 64



Черт. 65

22. Субтангентата е

$$S_t = \frac{r^2}{r'} = a\,\frac{\sin^2\theta}{\theta\cos\theta - \sin\theta}.$$

От друга страна,

$$\operatorname{ctg}\omega = \frac{r'}{r} = \operatorname{ctg}\theta - \frac{1}{\theta},$$

или

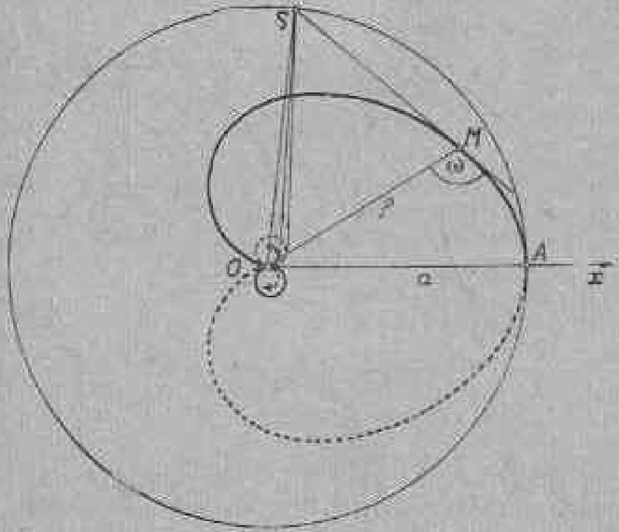
$$\frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega} = \frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{r}{a}.$$

Ако прекараме симетричната права OS на полярната ос спрямо радиус-вектора OM (черт. 66) и намерим пресечната точка S на тангентата в M с тази права, то от триъгълника OMS имаме

$$OS = \frac{r\sin\omega}{\sin(\omega-\theta)} = a,$$

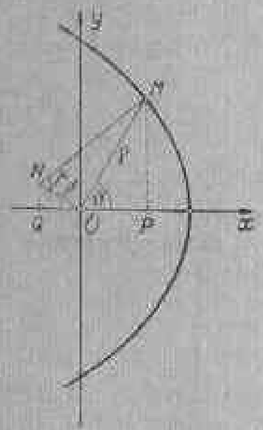
т. е. S лежи върху окръжността с радиус a и център началото. Следователно тангентите във всички точки на кривата, които лежат на един и същ радиус-вектор, се пресичат в точката S, лежаща на окръжността.

Уравнението $r = a\frac{\sin\theta}{\theta}$ показва, че *кохлеоидата* минава през точката A, която лежи на полярната ос на разстояние a от началото. Тя



Черт. 66

минава безбройно много пъти през полюса, като безпределно клони към нулата. За отрицателни значения на ъгъла θ получаваме крива, която е симетрична спрямо полярната ос на кривата, получена за положителни значения на ъгъл θ.



Черт. 67

23. Кривата се състои от безбройно много клонове. Тя е била забележителна с това, че са я употребявали при изчисляване квадратурата на кръга. Ако дясната страна на уравнението

$$x = y\,\mathrm{ctg}\frac{y}{a}$$

развием в ред, получаваме

$$y\,\mathrm{ctg}\frac{y}{a} = a - \frac{y^2}{3a} + \dots$$

Това показва, че за достатъчно малки значения на y кривата може да се замени с параболата $y^2 + 3ax - 3a^2 = 0$. Един клон от тази крива е даден на черт. 67.

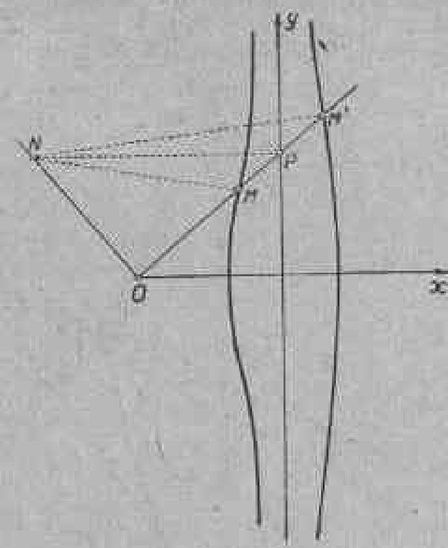
Ако диференцираме

$$r\sin\theta = a\theta,$$

получаваме

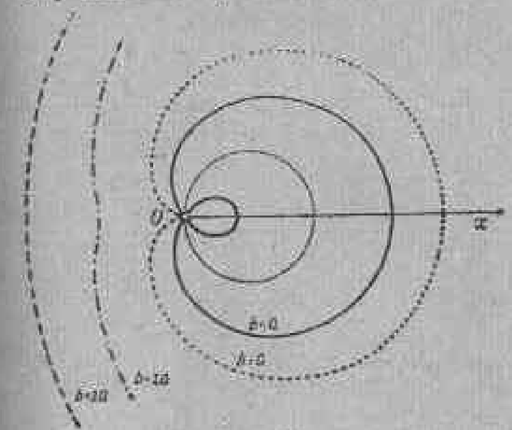
$$r\cos\theta + r'\sin\theta = a,$$

което, както се вижда от чертежа, изразява изискването на задачата.



Черт. 68

24. Ако увеличим или намалим радиус-вектора на една крива с дадена дължина b, получаваме нова крива, която се нарича *конхоида* на дадената крива. Понеже r' не се изменя с увеличението или намалението на r, то полярната субнормала за всички точки на тези криви, които точки лежат на един и същ радиус-вектор, е една и съща. Оттук следва, че всички нормали, прекарани към кривите в споменатите точки, се пресичат в една точка, лежаща на перпендикуляра, издигнат от O към радиус-вектора. Това свойство ни дава едно средство за построяване на нормалите към дадената крива, ако е известно построяването на нормалите към една от нейните конхоиди, и обратно.



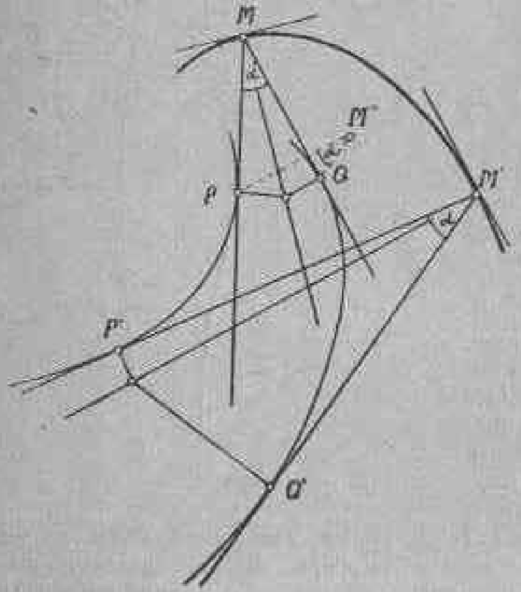
Черт. 69

В черт. 68 е начертана конхоидата на една права. Тази крива е била позната още от древността при задачата за трисекцията на ъгъла и се нарича конхоида на Nicomèdes.

25. (Черт. 69.) — Ако от една точка на дадена окръжност прекараме свои лъчи и нанесем върху продължението им от окръжността нататък една постоянна величина b, то геометричното място на краищата се нарича *охлюв* на P a s c a l.

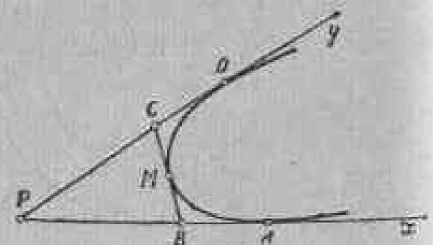
26. Нека M е върхът на едно положение на дадения ъгъл и P, Q са съответно допирните точки на рамената му с кривите C_2, C_1 (черт. 70). Да разгледаме сега едно безкрайно близко положение M' на точката M и да означим с P' и Q' съответно допирните точки на

рамената на ъгъла M' с кривите C_1 и C_2. От точките P и Q прекарваме прави, успоредни на рамената на ъгъла M'. Те се пресичат в една точка M'', която, лесно е да се види, се намира на разстояния, безкрайно малки най-малко от втори ред от рамената на ъгъла M'. Наистина точките P и P', Q и Q' са безкрайно близки от първи ред (по условие). Обаче знаем, че съответните разстояния на точките P и Q до тангентите в P' и Q' са безкрайно малки най-малко от втори ред спрямо дължината на дъгата PP'. Оттук следва, че разстоянието $M'M''$ е безкрайно малко спрямо малкото разстояние MM'; ето защо тангентата в точка M може да се разглежда като гранично положение на секантата MM''. Обаче ъглите M и M' са равни (по условие), следователно точката M'' лежи на окръжността, определена от точките M, P и Q, и граничното положение на правата MM'' (т. е. тангентата в M) е тангента в точката M към тази окръжност. Прочее перпендикулярът в точката M към тази тангента (нормалата в M) ще мине през пресечната точка на нормалите в P и Q на кривите C_1 и C_2.



Черт. 70

27. Нека AB, BC и CD са три последователни страни на този многоъгълник и да вземем за начало на координатната система точката P, където се пресичат правите BA и CD (черт. 71). За да решим задачата, достатъчно е да докажем, че тангентата CB трябва да бъде такава, щото триъгълникът PCB да има минимално лице. Да определим сега M — точката на допирането на отсечката CB, при тези условия.



Черт. 71

Като вземем пред вид, че

$$PC = y - x\frac{dy}{dx},\quad PB = x - y\frac{dx}{dy},$$

то

$$\text{лицето на } \triangle CPB = \left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{dx}{dy}\sin P.$$

Диференцираме този израз и получаваме

$$\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dy}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)\left(2x + y\frac{dx}{dy} - x\right) = 0.$$

Ако приравним към нула последния фактор на това уравнение, получаваме

$$x = \frac{1}{2}\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = \frac{1}{2}PB.$$

Това показва, че страната BC е разделена на две равни части от точката на допирането. По същия начин се установява, че всичките страни на многоъгълника се разполовяват от допирните точки.

28. Тангентата в точката (x, y) има уравнение

$$\eta = (2x - 3x^2)\xi + 2x^3 - x^2.$$

Тя пресича кривата $\eta = \xi^2 - \xi^3$ в точки, абсцисите ξ на които се дават от уравнението

$$\xi^3 - \xi^2 + (2x - 3x^2)\xi + 2x^3 - x^2 = 0.$$

Това уравнение има двоен корен $\xi = x$ и трети корен $\xi = 1 - 2x$. Оттук координатите на точката M' са

$$\xi = \frac{1-x}{2},\quad \eta = x - \frac{7}{2}x^2(1-x).$$

От тези уравнения, като елиминираме x, получаваме уравнението на търсеното геометрично място:

$$\eta = (1 - 2\xi)(1 - 7\xi + 14\xi^2) = 1 - 9\xi - 28\xi^2 - 28\xi^3.$$

Ако пренесем началото на координатната система в точката $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{27}\right)$, тогава уравненията на двете криви се обръщат във вида

$$y = \frac{x}{3} - x^3,\quad \eta = \frac{\xi}{3} - 28\xi^3,$$

които са хомотетични криви и преминаването на едната в другата става, ако положим

$$\frac{y}{\eta} = \frac{x}{\xi} = \sqrt{28}.$$

29. Имаме

$$t \equiv \eta - y = \frac{9a\,x}{2y^2}(\xi - x), \quad m = \frac{9a\,x}{2y^2}, \quad 4y^3 = 27\,ax^2.$$

От последните две уравнения намираме

$$x = \frac{2\,a}{m^3}, \quad y = \frac{3\,a}{m^2}.$$

Тогава уравнението на търсената тангента е

$$\eta - m\,\xi = \frac{a}{m^2}.$$

Тя ще минава през точката (x, y), ако

(1) $$m^3 x - m^2 y + a = 0.$$

Оттук се вижда, че имаме три стойности за m, произведението на които

$$m_1 m_2 m_3 = -\frac{a}{x}.$$

Ако

$$m_1 m_2 = -1, \quad m_3 = \frac{a}{x}$$

и като заместим m с $\frac{a}{x}$ в (1), получаваме уравнението на търсеното геометрично място:

$$x^2 - ay + a^2 = 0,$$

което е парабола.

30. *Цисоидата* $y^2 = \dfrac{(x-a)^3}{2a-x}$.

Тук ще дадем образувателния закон на *строфоидата* и *цисоидата*:

a) *Строфоида.* — Ако през началото O на координатната система прекараме един произволен лъч и от двете страни на пресечната му точка C с правата $x = a$ нанесем дължината CB (черт. 72), то така получените точки M и M' ще изписват строфоидата, когато лъчът OC се върти около O. От този образувателен закон се вижда, че

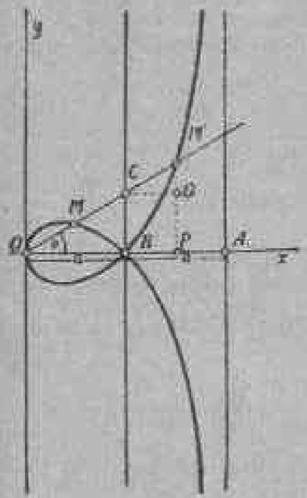
$$x = \overline{OB} + \overline{BP} = \overline{OB} + \overline{CQ} = a\,(1 \pm \sin\theta),$$

$$y = \overline{M'P} = \overline{BC} + \overline{QM'} = a\,\mathrm{tg}\,\theta\,(1 \pm \sin\theta),$$

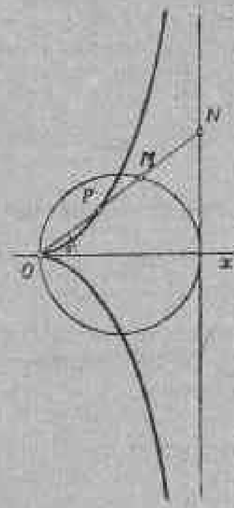
отгдето, като елиминираме θ, получаваме

$$y^2 = \frac{x\,(x-a)^2}{2a-x}.$$

b) *Цисоида.* — През една произволна точка O от дадена окръжност прекарваме един лъч. Той пресича окръжността и тангентата, прекарана в срещуположната точка на O към окръжността, респективно в точките M и N (черт. 73). Отсечката MN нанасяме от O по



Черт. 72



Черт. 73

дължината на този лъч. Тогава краят P на така получената отсечка ще опише една цисоида, когато лъчът се върти около O. Полярното уравнение на кривата се получава от тази конструкция, именно

$$r = \overline{ON} - \overline{OM} = 2a\,\frac{1}{\cos\theta} - 2a\cos\theta = 2a\,\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta},$$

което в декартова координатна система има вида

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}.$$

31. Уравненията на тангентата и на правата, която минава през началото и е перпендикулярна на тангентата, са

$$\frac{x}{a}\frac{\xi}{a} + \frac{y}{b}\frac{\eta}{b} = 1, \quad \frac{a\xi}{\frac{x}{a}} = \frac{b\eta}{\frac{y}{b}}.$$

От тези уравнения намираме

$$\frac{x}{a} = \frac{a\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \frac{y}{b} = \frac{b\eta}{\xi^2 + \eta^2}.$$

Тези стойности заместваме в уравнението на елипсата и получаваме уравнението на подножицата

$$b^2\eta^2 + a^2\xi^2 = (\xi^2+\eta^2)^2.$$

32. $(\xi^2+\eta^2)^2 = (a\xi)^2 - (b\eta)^2$; $(\xi^2+\eta^2)^2 = a^2(\xi^2-\eta^2)$ — *лемниската* на B e r n o u l l i.

33. Уравненията на тангентата и на перпендикуляра ѝ, който минава през точката $(0, -a)$, са:

$$y\eta + x\xi = a^2,$$

$$x\eta - y\xi - ay = 0.$$

Тези уравнения решаваме спрямо x и y и получаваме

$$x = \frac{a^2(\xi + a)}{\eta^2+\xi^2+a\xi}, \quad y = \frac{a^2\eta}{\eta^2+\xi^2+a\xi}.$$

Тези стойности заместваме в уравнението на окръжността и намираме уравнението на подножицата

$$a^2[\eta^2 + (\xi+a)^2] = (\xi^2+\eta^2+a\,\xi)^2.$$

За да опростим това уравнение, полагаме

$$\eta = Y, \quad \xi + a = X$$

и получаваме

$$a^2(Y^2+X^2) = (X^2+Y^2-aX)^2,$$

което не е нищо друго освен декартовото уравнение на кардиоидата

$$r = a(1+\cos\theta).$$

34. **a)** Правата $\xi = 0$.

b) Цисоидата $2\xi^3 + \eta^2(p+2\xi) = 0$ (зад. **30**, **b**).

35. Достатъчно е да разгледаме точките на дадената крива, за които $n\theta$ не надминава $\frac{\pi}{2}$. Нека r и θ са координатите на една точка M, взета върху тази крива, r_1 и θ_1 — тези на съответната точка от подножицата и φ — ъгълът, който тангентата в точката M сключва с радиус-вектора. Имаме

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{r\,d\theta}{dr} = -\operatorname{ctg} n\theta.$$

Оттук следва, че

$$\varphi = n\theta - \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

гдето k е цяло число. Впрочем, ако предположим, че n е положително, а φ — тъп ъгъл, тогава лесно е да се намери релацията

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta_1 - \theta.$$

Прочее трябва да положим $k = 1$, отгдето намираме

$$\theta_1 - \theta = n\theta$$

и следователно

$$\cos n\theta = \cos\frac{n\theta_1}{n+1}.$$

От друга страна,

$$r_1 = r\sin\varphi = r\cos n\theta,$$

отгдето

$$r_1^{\frac{n}{n+1}} = a^{\frac{n}{n+1}} \cos\frac{n}{n+1}\theta_1,$$

което представлява уравнението на подножицата. Този резултат не е различен от резултата, който се получава, ако положим n отрицателно.

36. $\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}} = a^{-\frac{2}{3}}(\xi^2+\eta^2)^{\frac{2}{3}}$.

37. $(ax)^{\frac{n}{n-1}} \pm (by)^{\frac{n}{n-1}} = (x^2+y^2)^{\frac{n}{n-1}}$.

38. Архимедова спирала.

39. Нека A е началото на координатната система. Ако означим с x и y координатите на точката M, с α, β тези на P и с C средата на точката MA, тогава окръжността, която има за център тази среда и за радиус половината от дължината на отсечката MA, има уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 - \xi x - \eta y = 0,$$

отгдето

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)_{\substack{\xi=\alpha\\ \eta=\beta}} = -\frac{2\alpha - x}{2\beta - y}.$$

От друга страна, имаме

$$\overline{AM}^2 + \overline{MP}^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 = x^2 + y^2 = \overline{AM}^2,$$

или

$$\alpha^2 + \beta^2 - \alpha x - \beta y = 0,$$

отгдето

$$(2\alpha - x)\,d\alpha + (2\beta - y)\,d\beta = \alpha\,dx + \beta\,dy.$$

По условие правите AM и MP са перпендикулярни. Прочее изразът

$$\alpha\,dx + \beta\,dy = 0.$$

Оттук следва, че

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{x - 2\alpha}{y - 2\beta},$$

което изразява искането на задачата. Оттук можем да заключим, че нормалата на подножицата на дадена крива минава през средата на радиус-вектора, който съединява началото на координатната система с точката M.

Аналогична задача съществува и за подножицата на дадена повърхнина.

40. Нека n е броят на точките $M_1, \dots, M_k, \dots$ Ако означим с ξ, η координатите на точката M и с x_k, y_k тези на M_k, имаме

$$\sum_{k=1}^{n}[(\xi-x_k)^2+(\eta-y_k)^2]=\text{const}.$$

Като диференцираме това равенство, получаваме

(1) $$\sum_{k=1}^{n}[(\xi-x_k)\,dx_k+(\eta-y_k)\,dy_k]=\sum_{k=1}^{n}[(\xi-x_k)\,d\xi+(\eta-y_k)\,d\eta].$$

Понеже всяка нормала минава през точката M, то имаме

$$(\xi-x_k)\,dx_k+(\eta-y_k)\,dy_k=0.$$

Оттук следва, че равенството (1) се заменя със следното:

$$(n\xi-\sum x_k)\,d\xi+(n\eta-\sum y_k)\,d\eta=0.$$

Последното уравнение показва, че нормалата на геометричното място на точката M минава през точката с координати

$$\frac{\sum x_k}{n} \text{ и } \frac{\sum y_k}{n}.$$

41. Нека кривата C_1 е отнесена спрямо една правоъгълна координатна система. Да означим с $T'PT$ общата тангента на C и C_1, с x и y — координатите на точката на допирането P и с ξ и η — тези на точката M. Радиус-векторът $PM=r$ и ъгълът на посоката му с една произволна права, неизменно свързана с C, съставят елементите на една полярна координатна система. Тогава от уравнението

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2=r^2$$

чрез диференциране намираме

(1) $$\frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds}-\left(\frac{x-\xi}{r}\frac{d\xi}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{d\eta}{ds}\right)=\frac{dr}{ds},$$

където ds е диференциалът на дъгата от кривата C. Обаче cosinus от ъгъла $T'PM$ е равен на $\frac{dr}{ds}$. Той е също равен на

$$\frac{x-\xi}{r}\frac{dx}{ds}+\frac{y-\eta}{r}\frac{dy}{ds}.$$

Следователно уравнението (1) се обръща във вида

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+1=0,$$

което потвърждава изискването на задачата.

42. Да означим с α и β координатите на точката M, с x и y, x' и y' — съответно тези на точките N и N' и да положим $MN=l$, $MN'=l'$. Тогава имаме

$$l+l'=\text{const},$$

отгдето

(1) $$dl+dl'=0.$$

Обаче

$$l=\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2},$$

$$dl=\frac{(\alpha-x)\,d\alpha+(\beta-y)\,d\beta}{l}-\frac{(\alpha-x)\,dx+(\beta-y)\,dy}{l}$$

и понеже правата MN е нормала в точката N към дадената крива, то

$$(\alpha-x)\,dx+(\beta-y)\,dy=0.$$

Прочее

$$dl=\frac{(\alpha-x)\,d\alpha+(\beta-y)\,d\beta}{l}.$$

Ако означим с θ ъгъла, който сключва посоката MN с оста x, имаме

$$\frac{x-\alpha}{l}=\cos\theta,\quad \frac{y-\beta}{l}=\sin\theta.$$

Следователно

$$dl=-(\cos\theta\,d\alpha+\sin\theta\,d\beta).$$

По същия начин се намира, че

$$dl'=-(\cos\theta'\,d\alpha+\sin\theta'\,d\beta).$$

Тогава уравнението (1) добива вида

$$(\cos\theta+\cos\theta')\,d\alpha+(\sin\theta+\sin\theta')\,d\beta=0,$$

отгдето

$$\frac{d\beta}{d\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta+\theta'}{2}\right),$$

което показва, че тангентата на геометричното място на точката M е бисектриса на един от ъглите, образувани от правите MN и MN'.

43. а) Имаме

$$F_x=2x,\quad F_y=-2y,\quad G_x=y,\quad G_y=x,$$

отгдето следва, че условието за ортогоналност е изпълнено:

$$F_xG_x+F_yG_y=2xy-2xy=0.$$

§ 16. Изследване и построяване на равнинни криви линии

Основни указания

За да начертаем една крива, необходимо е да намерим особените точки, ако съществуват, и асимптотите ѝ и след това да изследваме вариацията (вж. § 8) на функцията y, дефинирана от уравнението на кривата.

В декартова координатна система коефициентите на асимптотата $y = ax + b$ са:

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}(y - ax).$$

Ако $r = \dfrac{1}{\varphi(\theta)}$ е уравнението на кривата в полярна координатна система, тогава асимптотата е определена с α и δ, дефинирани съответно с

$$\varphi(\alpha) = 0 \text{ и } \delta = \lim_{\theta\to\alpha} r\sin(\alpha - \theta) = -\frac{1}{\varphi'(\alpha)},$$

където α е ъгълът, сключен от асимптотата и полярната ос, а δ — разстоянието на началото до асимптотата.

Координатите (x_0, y_0) на особените точки на кривата $F(x, y) = 0$ са решения на уравненията

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Ъгловите коефициенти на тангентите в двукратните и трикратни точки (x_0, y_0) на кривата $F(x, y) = 0$ се дават съответно от уравненията

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0}t + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2}t^2 = 0,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x_0^3} + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_0^2 \partial y_0}t + 3\frac{\partial^3 F}{\partial x_0 \partial y_0^2}t^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y_0^3}t^3 = 0.$$

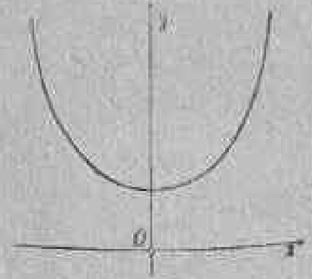
1. $y' = 4x\left(x^2 + \dfrac{p}{2}\right)$.

Случай $p > 0$ (черт. 74). — Производната y' се анулира за $x = 0$; вариацията на функцията се дава от схемата

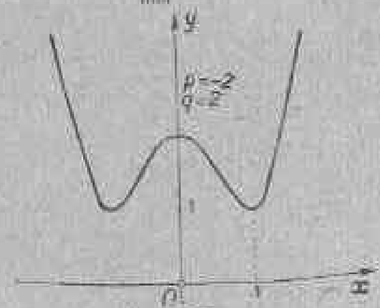
x	$\mp\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	q min	$\nearrow$	$+\infty$

Случай $p < 0$ (черт. 75). — В този случай производната y' се анулира за $x = 0$ и $x = \pm\sqrt{-\dfrac{p}{2}}$, тогава имаме

x	$-\infty$		$-\sqrt{-\frac{p}{2}}$		0		$+\sqrt{-\frac{p}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$q - \frac{p^2}{4}$ min	$\nearrow$	q max	$\searrow$	$q - \frac{p^2}{4}$ min	$\nearrow$	$+\infty$



Черт. 74



Черт. 75

Кривата има две инфлексни точки, които се намират в интервалите

$$\left(-\sqrt{-\frac{p}{2}},\ 0\right) \text{ и } \left(0,\ \sqrt{-\frac{p}{2}}\right).$$

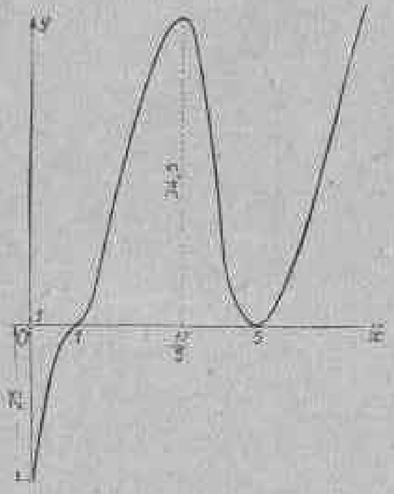
2. (Черт. 76.) $y' = (x-1)^2(5-x)(17-5x)$.

x	$-\infty$		0		1		$\frac{17}{5}$		5		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		-25	$\nearrow$	0 инфл.	$\nearrow$	$34{,}5$ max	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$

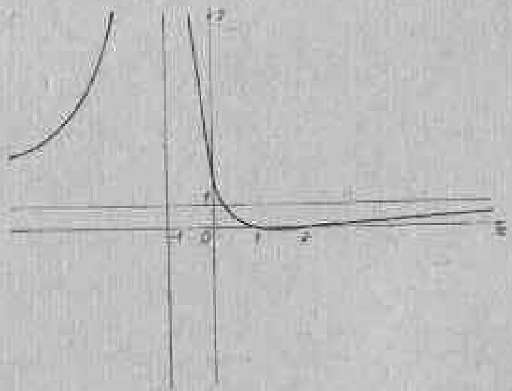
3. (Черт. 77.) $y' = \dfrac{5x-7}{(x+1)^3}$.

x	$-\infty$		-1 ± 0		0		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
y'		$+$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$1+0$	$\nearrow$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{24}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1-0$

Кривата има за асимптоти правите $y=1$ и $x=-1$ и една инфлексна точка в интервала $\left(\frac{7}{5}, +\infty\right)$.



Черт. 76



Черт. 77

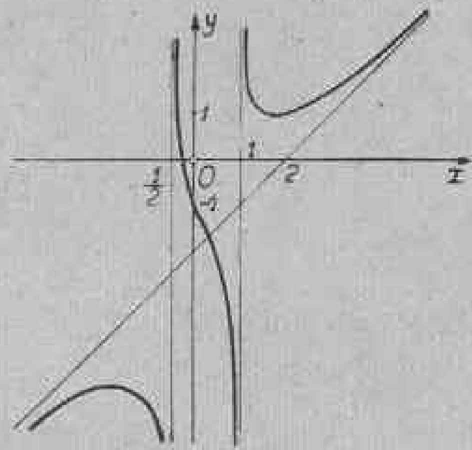
4. (Черт. 78.)

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-5x^2+4x+1}{2x^3-x^2-x}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x^2+5x+1}{2x^2-x-1}=-2.$$

Тогава уравнението на асимптотата е $y=x-2$. Освен това за стойности на x, които удовлетворяват уравнението

$$2x^2-x-1=0,$$



Черт. 78

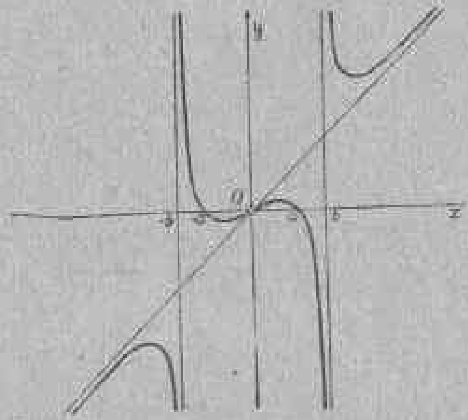
т. е. $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=1$, y става $\pm\infty$. Следователно за тези точки кривата има асимптоти, успоредни на оста y. Производната на y е

$$y'=\frac{4x^4-4x^3-9x^2+6x-3}{(2x^2-x-1)^2}.$$

Тя се анулира за значения на x, които се намират съответно в интервалите $(-1, -2)$ и $(1, 2)$. Тогава вариацията на y се дава от следната схема:

x	$-\infty$		$-2<x_1<-1$		$-\frac{1}{2}\mp 0$		0		1 ∓ 0		$1<x_2<2$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

5. (Черт. 79.) $y' = \dfrac{x^4 + (a^2 - 3b^2)x^2 + a^2b^2}{(x^2 - b^2)^2}$.



Черт. 79

x	$-\infty$		$-x_1$		$-b-0$	$-b+0$		$-a$		$-x_2$		0
y'		$+$	0	$-$				$-$		$-$		0 —
y	$-\infty$	↗	max	↘	$-\infty$	$+\infty$	↘	0	↘	min	↘	0 инфл.

	x_2		a		$b-0$	$b+0$		x_1		$+\infty$
$+$	0	$-$		$-$			$-$	0	$+$	
↗	max	↘	0	↘	$-\infty$	$+\infty$	↗	min	↗	$+\infty$

Кривата има асимптоти правите $x = \pm b$, $y = x$ и е симетрична спрямо началото.

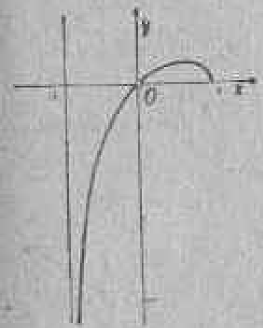
6. (Черт. 80.) Кривата е ограничена между правите $x = -1$ и $x = 1$.

$$y' = \frac{1 - x - x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}.$$

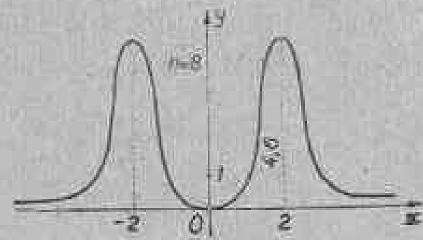
x	-1		0		$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$		1
x'		$+$		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	max	↘	0

7. $y' = x^{n-1} e^{-x^2} (n - 2x^2)$.

Случай I: n четно (черт. 81).



Черт. 80

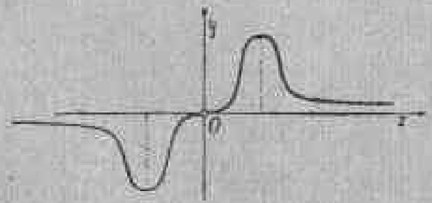


Черт. 81

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$+\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+0$	↗	max	↘	min	↗	max	↘	$+0$

Кривата има четири инфлексни точки.

Случай II: n нечетно (черт. 82).



Черт. 82

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{n}{2}}$		0		$+\sqrt{\frac{n}{2}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
y	-0	↘	min	↗	инфл.	↗	max	↘	$+0$

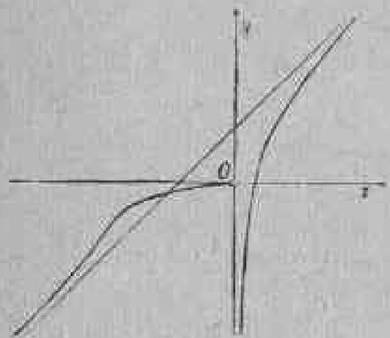
Кривата има пет инфлексни точки.

8. $y' = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x^2 - x - a}{x^2}$, $\quad y'' = e^{\frac{1}{x}} \dfrac{x(1+2a)+a}{x^4}$,

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a}, \quad x = -\frac{a}{1+2a}.$$

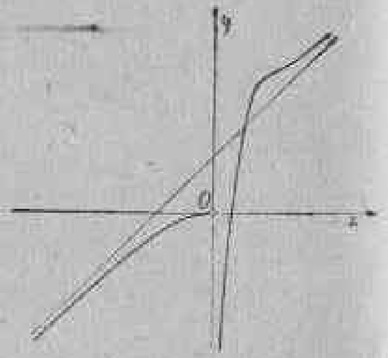
За всяко значение на a кривата има за асимптоти правите $x = 0$, $y = x + 1 + a$.

Случай $a < -\frac{1}{2}$ (черт. 83). — Производната е положителна. Кривата пресича асимптотата $y = x + 1 + a$ наляво от $x = 0$.



$a < -\frac{1}{2}$

Черт. 83



$-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$

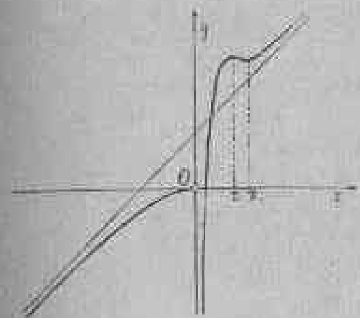
Черт. 84

x	$-\infty$		$-\frac{a}{1+2a}$		-0	$+0$		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$+\infty$	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	инфл.	$\nearrow$	0	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Случай $-\frac{1}{2} < a < -\frac{1}{4}$ (черт. 84). — Също производната е винаги положителна. Кривата пресича асимптотата $y = x + 1 + a$ надясно от $x = 0$.

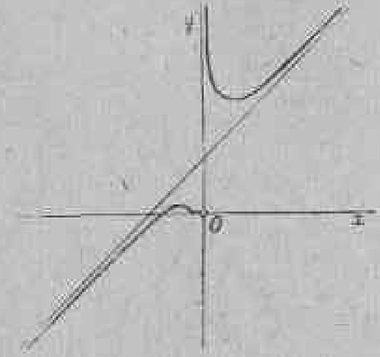
x	$-\infty$		-0	$+0$		$-\frac{a}{1+2a}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$+\infty$	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$-\infty$	$\nearrow$	инфл.	$\nearrow$	$+\infty$

Случай $-\frac{1}{4} < a < 0$ (черт. 85). — Производната се анулира за две положителни значения x_1 и x_2. Асимптотата $y = x + 1 + a$ пресича кривата в точка, лежаща надясно от $x = 0$.



$-\frac{1}{4} < a < 0$

Черт. 85



$a > 0$

Черт. 86

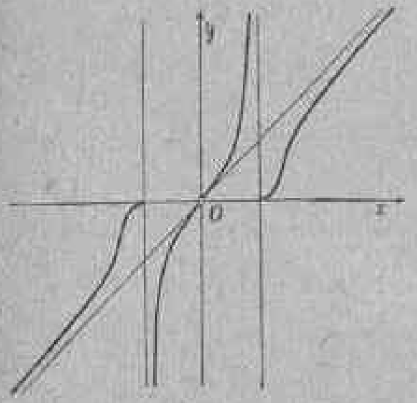
x	$-\infty$		-0	$+0$		x_1		$-\frac{a}{1+2a}$		x_2		$+\infty$
y'		$+$			$+$	0	$-$		$-$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$-\infty$	$\nearrow$	$+\max$	$\searrow$	инфл.	$\searrow$	$+\min$	$\nearrow$	$+\infty$

Случай $a > 0$ (черт. 86). — Производната се анулира за две значения x_1 и x_2, едното от които е положително, а другото — отрицателно. Кривата не пресича асимптотата $y = x + 1 + a$.

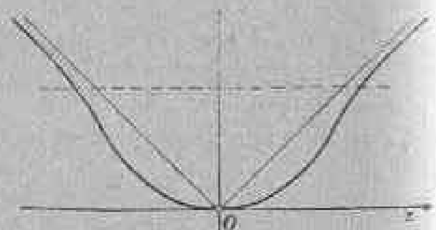
x	$-\infty$		$-a$		x_1		$-\frac{a}{1+2a}$		-0	$+0$		x_2		$+\infty$
y'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$-\infty$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	инфл.	$\searrow$	0	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	∞

9. (Черт. 87.) $y = \dfrac{x^4+1}{(1-x^2)^2} e^{\frac{1}{1-x^2}}$, $\quad y' = 2e^{\frac{1}{1-x^2}} \dfrac{x(3-x^4)}{(1-x^2)^4}$.

Кривата е симетрична спрямо началото на координатната система. Тя има три инфлексни точки и за асимптоти правите $x=\pm 1$, $y=x$. Следователно достатъчно е да изследваме само частта, която се намира наляво от оста y.



Черт. 87



Черт. 88

x	$-\infty$		$-\sqrt[4]{3}$		$-1-0$	$-1+0$		0
y'		$+$		$+$	0	$-\infty$	$+$	e
y	$-\infty$	$\nearrow$	инфл.	$\nearrow$	0	$-\infty$	$\nearrow$	0 инфл.

10. (Черт. 88.) $y'=\dfrac{e^x-e^{-x}+4x}{(e^x+e^{-x})^2}$.

Лесно е да се види, че производната се анулира само за $x=0$. За да намерим асимптотите на кривата, трябва в изразите за a и b да заместим x с $-\infty$ и после x с $+\infty$, защото в този случай могат да се получат различни стойности. Така имаме

$$a_1=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=+1,$$

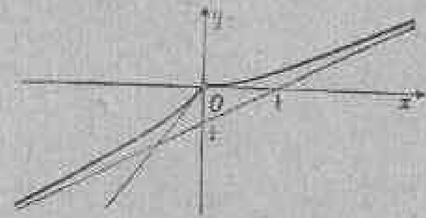
$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=-1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y\pm x)=\pm\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^{2x}+1}=0.$$

Следователно имаме две асимптоти: $y=\pm x$. Кривата има две инфлексни точки, лежащи на правата $y=1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$+\infty$

11. (Черт. 89.) $y'=\dfrac{x+xe^{\frac{1}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{x\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)^2}$.



Черт. 89

$y'=0$, ако x клони към нула, като взема само положителни значения; напротив, $y'=1$, ако x клони към нула само с отрицателни стойности. Следователно точката $(0, 0)$ е една двойна точка за кривата. Асимптотата ѝ е $x-2y=\dfrac{1}{2}$. y расте постоянно, защото y' е винаги положително.

12. (Черт. 90.) — Асимптотата на кривата е

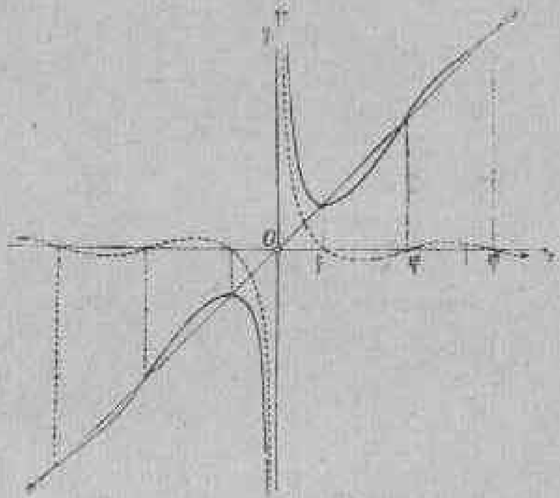
$$y=x.$$

y става $\pm\infty$ за $x\to 0$. Следователно правата $x=0$ е също асимптота. Кривата пресича асимптотата за $x=\pm(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, гдето k е цяло число. Тя може да се построи направо, обаче по-лесно е да се разглежда като сума от y-ците на двете известни криви: правата $y=x$ и кривата $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

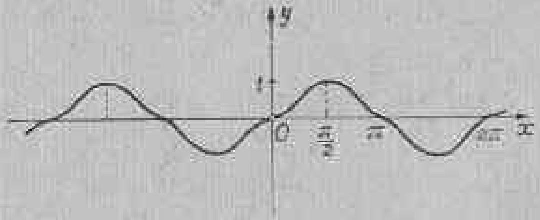
13. (Черт. 91.) — Кривата е симетрична спрямо началото на координатната система, защото мени знака си, като запазва своята абсолютна стойност, ако заместим x с $-x$. Тя среща оста x в точките $x=k\pi$, гдето k е цяло. В тези точки $y'=3\sin^2 x\cos x$ се анулира, като променя своя знак. Това показва, че точките $x=k\pi$ са инфлексни. y' се анулира още когато $\cos x=0$, т. е., когато

$$x=(2k+1)\frac{\pi}{2},$$

което показва, че за тези стойности на x имаме максимум или минимум според това, дали k е четно или нечетно.



Черт. 90



Черт. 91

Втората производна е

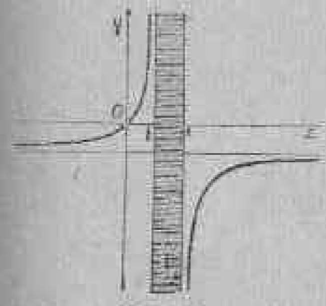
$$y''=3\sin x\,(2-3\sin^2 x).$$

Тя се анулира, ако $\sin x=0$ или ако $\sin x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$.

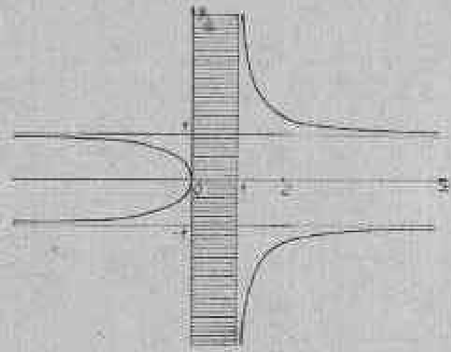
y е с период 2π. Следователно достатъчно е да построим кривата в интервала $(0, 2\pi)$.

14. (Черт. 92.) $y'=\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}-0$		$1+0$		$+\infty$
y'		+		+				+	
y	$-\ln 2+0$	↗	0	↗	$+\infty$	не съществува	$-\infty$	↗	$-\ln 2-0$



Черт. 92



Черт. 93

15. (Черт. 93.) — Кривата е симетрична спрямо оста x. Следователно достатъчно е да изследваме частта на кривата, разположена над оста x, именно кривата, представена с уравнението

$$y=\sqrt{\frac{x}{x-1}},$$

отгдето

$$y'=-\frac{1}{2\sqrt{x(x-1)^3}}.$$

Тази крива има за асимптоти правите $x=1$ и $y=1$. Тя не съществува в интервала $(0, 1)$.

Оттук имаме

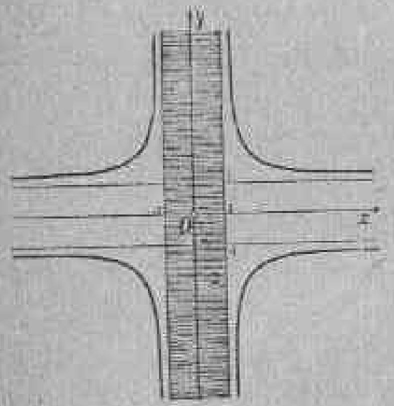
x	$-\infty$		0		$1+0$		$+\infty$
y'		—				—	
y	$1-0$	↘	0	не съществува	$+\infty$	↘	$1+0$

16. (Черт. 94.) — Кривата има за асимптоти правите

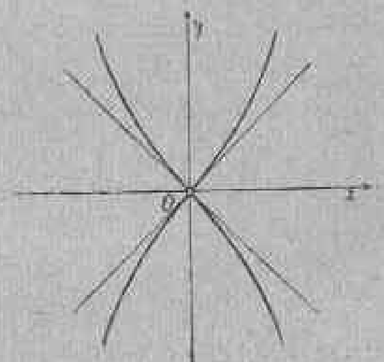
$$x = \pm 1 \quad \text{и} \quad y = \pm 1.$$

Тя е симетрична спрямо координатните оси. Следователно достатъчно е да изследваме нейния клон в първия квадрант. За този клон имаме

x	0		$1+0$		$+\infty$
y'				$-$	
y	не съществува		$+\infty$	$\searrow$	$1+0$



Черт. 94



Черт. 95

17. (Черт. 95.) — Кривата е симетрична относно координатните оси. Производната

$$y' = \pm \frac{1 + 2x^2}{\sqrt{1 + x^2}}$$

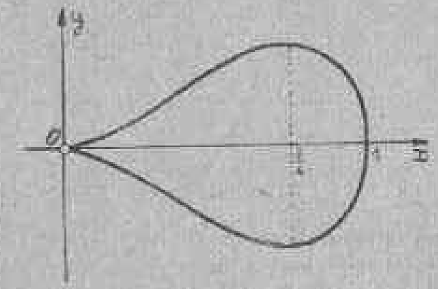
за $x = 0$ е $y' = \pm 1$. Следователно началото е една двойна точка на кривата. Втората производна

$$y'' = \pm \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

се анулира за $x = 0$. Прочее началото е една инфлексна точка и за двата клона на кривата. Имаме

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$\pm$		$\pm$	
y_1	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y_2	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

18. (Черт. 96.) — Кривата е симетрична спрямо оста x. Следователно достатъчно е да разгледаме само онзи клон от кривата, който се намира над оста x. За да бъде y реално, трябва $x^3 \geq x^4$ или $x < 1$. Прочее кривата се намира в интервала $(0, 1)$.



Черт. 96

Производната

$$y' = \frac{3 - 4x}{2} \sqrt{\frac{x}{1 - x}}$$

се анулира за $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}$. Втората производна

$$y'' = \frac{8x^2 - 12x + 3}{4\sqrt{x(1 - x)^3}}$$

се анулира за $x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{4}$. Първата от тези стойности не принадлежи на интервала $(0, 1)$, а втората отговаря на една инфлексна точка от кривата. Вариацията на y е

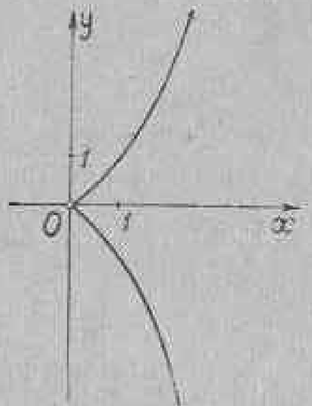
x	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{4}$		$\frac{3}{4}$		1
y'	0	$+$		$+$	0	$-$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	инфл.	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{16}$ max	$\searrow$	0

Поради симетрията на кривата спрямо оста x началото O е рог от първи род с тангента оста x.

19. (Черт. 97.) — Началото на координатната система е рог от първи род.

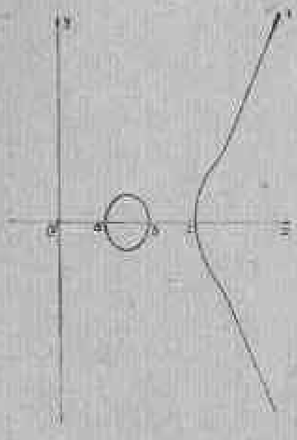
20. Кривата пресича оста x в точките $x = a$, $x = b$, $x = c$. Тя е симетрична спрямо същата ос.

Случай $0<a<b<c$ (черт. 98). — За да бъде y реално, трябва x да се съдържа между a и b, или x да бъде по-голямо от c. Следо-

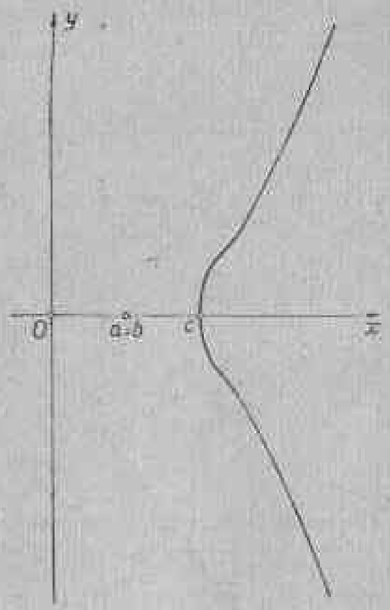


Черт. 97

вателно кривата се състои от един лист (букла или овал) и един параболичен клон. Между точките a и b имаме един максимум и един



Черт. 98



Черт. 99

минимум, симетрично разположени спрямо x. Тангентите в a, b, c са перпендикулярни на оста x, защото производната

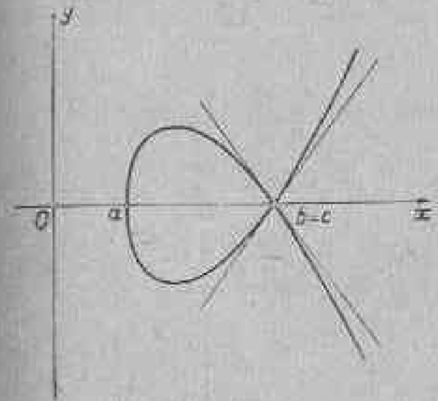
$$y' = \frac{(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)}{2y}$$

става безкрайност за $x=a$, $x=b$ и $x=c$.

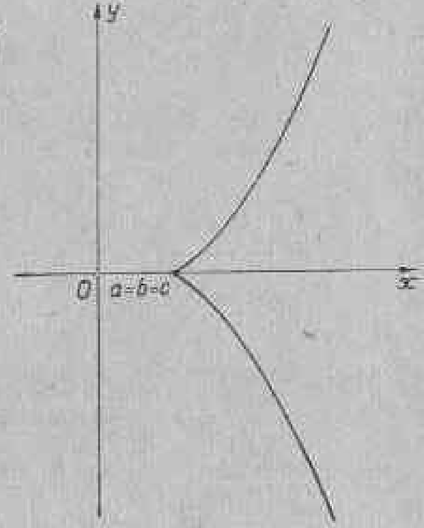
Случай $0<a=b<c$ (черт. 99). Тук листът се редуцира на една изолирана точка.

Случай $0<a<b=c$ (черт. 100). Уравнението на кривата се обръща във вида

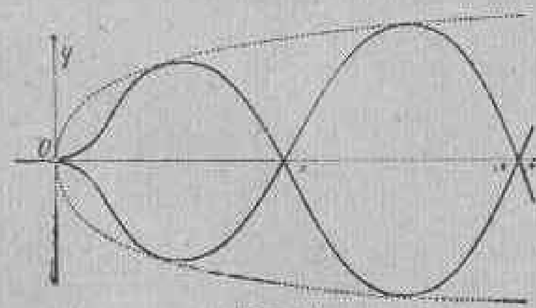
$$y^2-(x-a)(y-b)^2=0.$$



Черт. 100



Черт. 101



Черт. 102

Точката b е двойна и за нея $y'=\pm\sqrt{b-a}$.

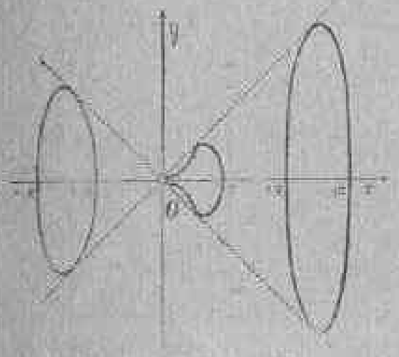
Случай $a=b=c>0$ (черт. 101). Точките b и c се сливат с точката a. В този случай точката a е рог от първи род с тангента оста x.

21. (Черт. 102.) — Кривата се намира надясно от оста y и представлява една верига от връхлести овали, широчината на които расте заедно с x, а дължината им остава постоянна величина π. Точките $k\pi$, гдето k е цяло положително число, са двойни точки.

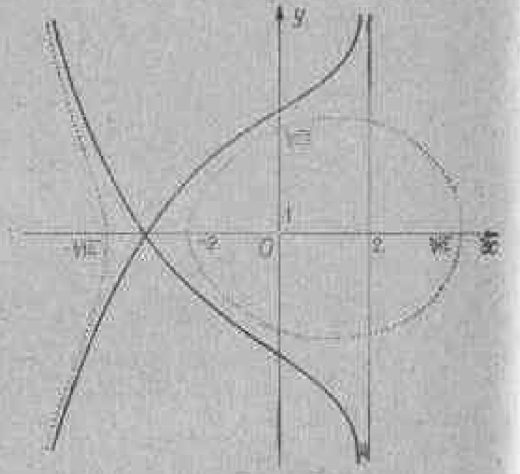
22. (Черт. 103.) — Кривата е симетрична спрямо оста x и се състои от безбройно много овали, широчината на които постоянно расте заедно с $|x|$, а дължината им остава постоянна величина π. Тя не съществува в интервалите

$$(k\pi, \overline{k+1}\pi) \text{ и } (\overline{k+1}\pi, k\pi),$$

гдето в първия случай $k=1, 3, 5, \ldots$, а във втория $k=-1, -3, -5, \ldots$ Правите $y=\pm x$ тангират всеки овал от кривата в точките, за които $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$.



Черт. 103



Черт. 104

23. (Черт. 104.) — Кривата съществува наляво от правата $x=2$ и има за асимптота правата $x=2$. Тя е симетрична спрямо оста x. Производната

$$y' = \mp \frac{3x^2-8x+9}{2\sqrt{(2-x)^3}}$$

е или само отрицателна, или пък само положителна. Кривата има инфлексни точки за $x=\frac{1}{3}$ и изолирана точка $x=3$, $y=0$. За да можем да видим как изглежда кривата, когато x клони към $-\infty$, написваме уравнението ѝ във вида

$$y^2=-x^3-2x^2-14x+28-\frac{25}{x-2}.$$

Ако премахнем члена $\frac{25}{x-2}$, получаваме кубичната парабола

$$y^2=-x^3-2x^2+14x+28,$$

която е асимптотична на дадената крива. Тя е означена с пунктирана линия на черт. 104.

24. (Черт. 105.) — Ако в уравнението на кривата положим $y=xt$, получаваме

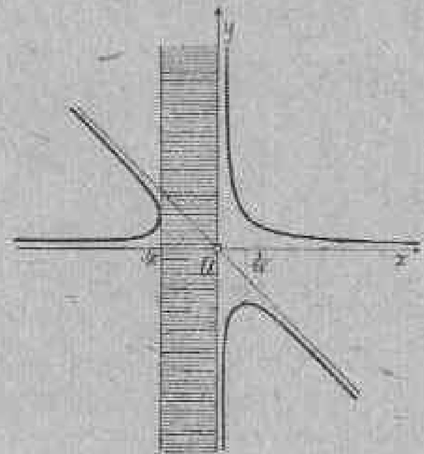
$$x^3(t^2+t)=1, \quad \text{или} \quad t^2+t=\frac{1}{x^3},$$

или още

$$\lim_{x\to\infty}(t^2+t)=a+a^2=0,$$

отгдето

$$a_1=0, \quad a_2=-1.$$



Черт. 105

От друга страна, ако в даденото уравнение заместим y с $ax+u$ гдето a е или 0, или -1, и оставим в полученото уравнение (след като сме го разделили с най-високата степен на x, който то съдържа) x да клони към $+\infty$, ще намерим, че

$$\lim_{x\to+\infty} u=b_{1,2}=0.^*$$

Следователно асимптотите на дадената крива са

$$y=-x \quad \text{и} \quad y=0.$$

Уравнението на кривата може да се напише още така:

$$y_{1,2}=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{1}{x}},$$

което показва, че тази крива има за асимптота правата $x=0$. Това

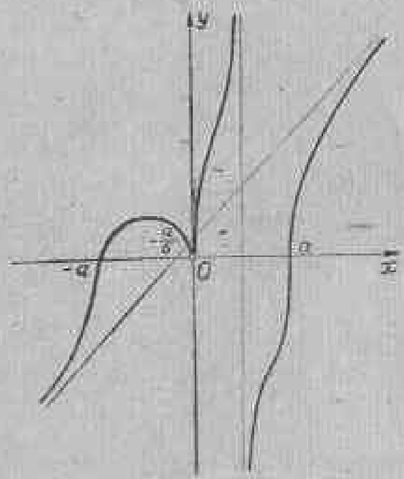
* Този метод се употребява, когато уравнението на кривата не е решено по y.

уравнение показва още, че за стойности на x, които се съдържат в интервала $\left(-\sqrt[3]{4},\ 0\right)$, кривата не съществува. Производната

$$y' = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\,\frac{x^3-2}{\sqrt{x^3(x^3+4)}}$$

се анулира за $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Тогава вариациите на y_1 и y_2 се дават от схемата

x	$-\infty$		$-\sqrt[3]{4}_{-0}$		$+0$		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$+\infty$
y'		$\mp$	$\mp\infty$			$\pm$	$\mp 0-$ $0-$		
y_1	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$		$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$+0$
y	$+0$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$	не съществува	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$



Черт. 106

25. (Черт. 106.) — Асимптотите на кривата са

$$x = \frac{a}{2},\quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(x + \frac{a}{6}\right).$$

Началото на координатната система е рог от първи род. Кривата има четири инфлексни точки, две от които са разположени на оста x.

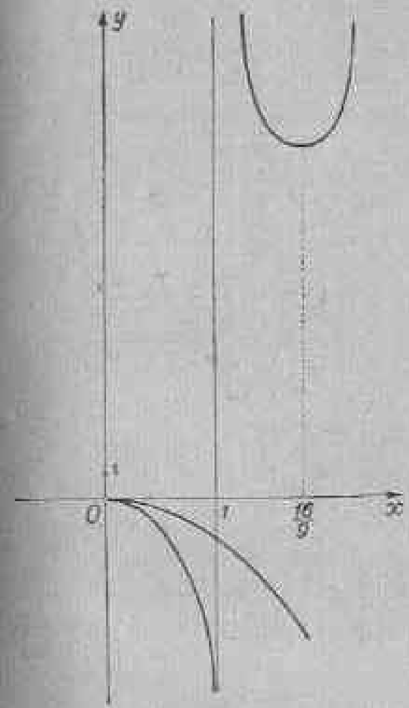
26. (Черт. 107.) — Уравнението на кривата може да се напише още и така:

$$y_{1,2} = \frac{x^2}{1 \pm \sqrt{x}},$$

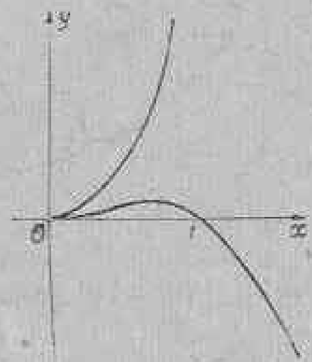
което показва, че y е реално, ако $x \geq 0$. Производните на y за двата клона са съответно

$$y_1' = -x\,\frac{4+3\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2},$$

$$y_2' = -x\,\frac{4-3\sqrt{x}}{2(1-\sqrt{x})^2}.$$



Черт. 107



Черт. 108

y_1' и y_2' са едновременно нули за $x=0$. Следователно началото на координатната система е рог от втори род. Вариациите на y_1 и y_2 са съответно

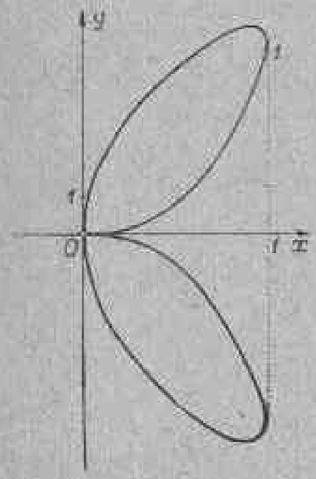
x	0		∞
y_1'	0	—	
y_1	0	$\searrow$	$-\infty$

x	0		$1-0$	$1+0$		$\frac{16}{9}$		$+\infty$
y_2'	0	—			—	0	+	
y_2	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$-\infty$

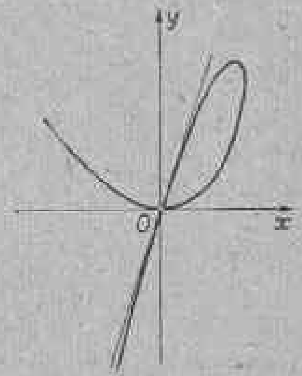
27. (Черт. 108.) — Началото на координатната система е рог от втори род.

28. (Черт. 109.) — Началото на координатната система е тройна точка с тангенти $y=0$ и $x=0$ (двойна).

29. (Черт. 110.) — Началото на координатната система е двойна точка с тангенти $y=0$ и $y=3x$.



Черт. 109



Черт. 110

30. (Черт. 111.) — Уравнението на кривата може да се напише и така:

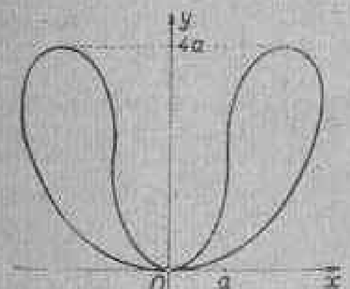
$$x^2-ay=\pm x\sqrt{4ay-y^2},$$

или

$$2x=\pm\sqrt{4ay-y^2}\pm\sqrt{4ay-y^2}.$$

Началото на координатната система е двойна точка с двойна тангента оста x. Двете инфлексни точки имат еднакви ординати:

$$\frac{8a\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}{\sqrt[3]{16}-1}.$$



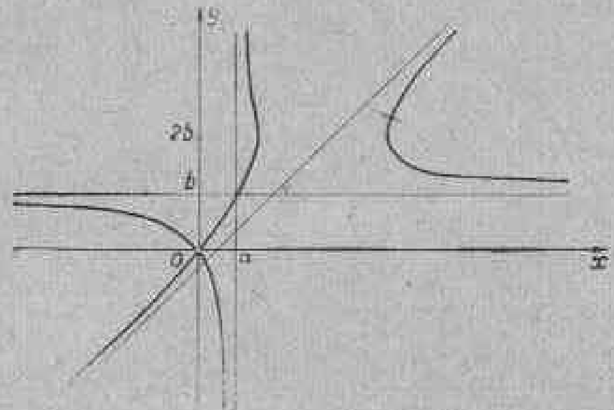
Черт. 111

31. (Черт. 112.) — Началото на координатната система е двойна точка. Кривата има за асимптоти правите

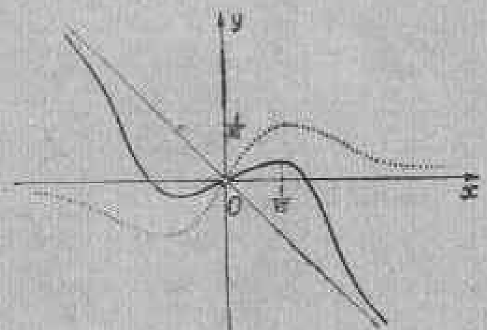
$$x=a,\quad y=b,\quad y=x-b.$$

32. (Черт. 113.) — Асимптотата е $y=-x$. Ако завъртим координатните оси на ъгъл $-\frac{\pi}{4}$, тогава с помощта на съответните трансформачни формули

$$x=\frac{X+Y}{\sqrt{2}},\quad y=\frac{Y-X}{\sqrt{2}}$$



Черт. 112



Черт. 113

даденото уравнение на кривата се обръща в

$$Y^3+(3X^2+1)\,Y-3X=0.$$

Изследването на кривата, представена с това уравнение, става много лесно, защото тя е симетрична спрямо началото.

Диференцираме горното уравнение и намираме

$$Y' = \frac{3(1-2XY)}{3Y^2+3X^2+1}.$$

Y' се анулира, ако $XY = \frac{1}{2}$ и $Y^2 + Y^2 = \frac{3}{4}$, отгдето

$$X = Y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вариацията на функцията е

X	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$+\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
Y'		$-$		$+$		$+$		$-$	
Y	-0	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$ max	$\searrow$	$+0$

Началото на координатната система е инфлексна точка, защото кривата е симетрична спрямо това начало. Също имаме две инфлексни точки съответно в интервалите

$$\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{и} \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right).$$

За да получим кривата спрямо началната координатна система, трябва да завъртим получената крива на ъгъл $-\frac{\pi}{4}$.

33. (Черт. 114.) — Кривата допуща асимптоти, когато $x = \infty$ и $y = \infty$, т. е., когато $t = 1$. Коефициентите на асимптотата са

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{t\to 1}\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(y - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{t\to 1}\frac{2at - at^2(t+1)}{2(t^2-1)} = -\frac{3}{4}a.$$

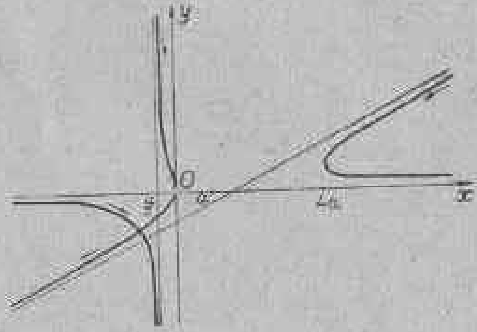
Прочее уравнението на асимптотата е

$$2y = x - \frac{3}{2}a.$$

Също правата $x = -\frac{a}{2}$ е асимптота, защото за $t = -1$ $y = \pm\infty$. За $t = \pm\infty$ $y = 0$ и $x = \pm\infty$; следователно оста x е също асимптота.

Производните на x и y спрямо t са

$$x_t' = at\frac{t-2}{(t-1)^2},\quad y_t' = -a\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} < 0.$$



Черт. 114

Тогава изменението на x и y се дава от следната схема:

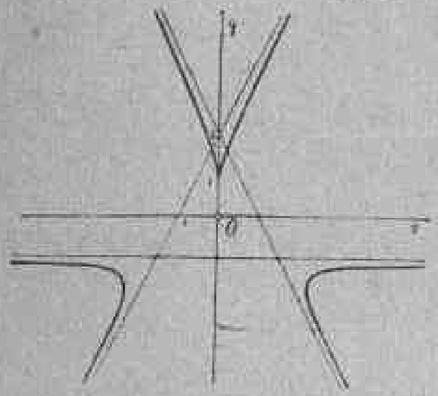
t	$-\infty$		-1 ∓ 0		0		1 ∓ 0		2		$+\infty$
x_t'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y_t'		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{a}{2}$	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$4a$ min	$\nearrow$	$+\infty$
y	-0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\mp\infty$	$\searrow$	$\frac{2}{3}a$	$\searrow$	0

Когато t се мени от $-\infty$ до $+\infty$, кривата се описва по пътя, показан от стрелките в чертежа.

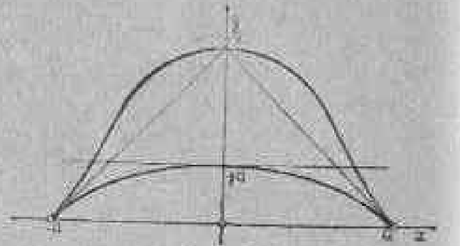
34. (Черт. 115.) — Кривата е симетрична спрямо оста y, понеже y не се мени, а x мени само знака си, когато сменим t с $-t$. Кривата има за асимптоти правите $y = -1$, $y = 2x + 2$, $y = -2x + 2$. Вариациите на x и y, когато t се изменя от 0 до ∞, са

t	0		$1-0$	$1+0$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x_t'		$+$			$+$	0	$-$	
y_t'		$+$			$+$	$+$	$+$	
x	0	$\nearrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\nearrow$	max	$\searrow$	$-\infty$
y	1	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$		$\nearrow$	$-1-0$

Вследствие симетрията спрямо оста y точката (0, 1) е рогова точка от първи род, защото $y_x' = \frac{4}{3t - t^3}$ става безкрайност за тази точка.



Черт. 115



Черт. 116

35. (Черт. 116.) — Кривата има два рога: $(-a, 0)$ и $(a, 0)$, със съответните тангенти $y = x + a$ и $y = -x + a$. Тя има две инфлексни точки, лежащи на правата $y = \frac{1}{3}a$.

36. Двойните точки се дават от системата уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x(x^2 - 1) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y(y^2 - 1) = 0,$$

$$F = 0.$$

Случай $a = 0$. — Даденото уравнение добива вида

$$x^4 + y^4 = 2(x^2 + y^2).$$

За тази крива началото е двойно изолирана точка. По-лесно се извършва конструкцията в полярна координатна система (черт. 117):

$$r^2 = \frac{8}{3 + \cos 4\theta}.$$

Кривата има приблизително форма на квадрат.

Случай $a = 1$. — Уравнението

$$x^4 + y^4 - 2(x^2 + y^2) + 1 = 0$$

има четири двойни точки с координати $x = 0$, $y = \pm 1$; $y = 0$, $x = \pm 1$.

Това уравнение може да се напише още и така:

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2x^2y^2 = 0,$$

което се разлага на две уравнения:

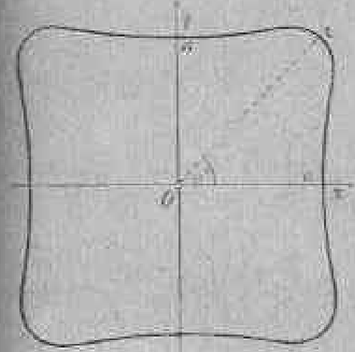
$$x^2 + y^2 - 1 = \pm\sqrt{2}\,xy,$$

които представляват две елипси.

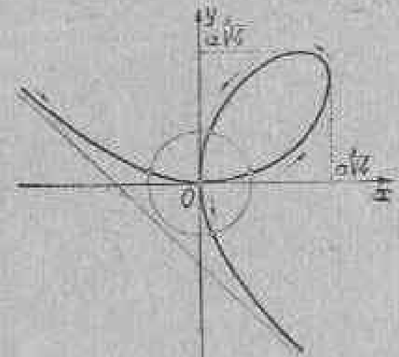
Случай $a = 2$. — Уравнението

$$(x^2 - 1)^2 + (y^2 - 1)^2 = 0$$

представлява една имагинерна крива, която има четири двойно изолирани точки с координати $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.



Черт. 117



Черт. 118

37. (Черт. 118.) — Началото е двойна точка, която има за тангенти координатните оси. За да можем да видим разположението на кривата в околността на двойната точка, ще опишем една окръжност с произволно малък радиус и с център тази точка. След това ще търсим пресечните точки на кривата и тангентите с тази окръжност. За тази цел полагаме

$$(1) \qquad \begin{cases} x = r\cos(\theta_0 + \alpha), \\ y = r\sin(\theta_0 + \alpha), \end{cases}$$

гдето θ_0 е един от ъглите* на една от тангентите на кривата в двойната точка, r е безкрайно малка величина и α — безкрайно малък ъгъл, който отговаря на безкрайно малката дъга от окръжността, която се

* Тук под ъгли на тангентата ще разбираме двата ъгъла, които двете посоки на правата, представляваща тангентата, сключват с оста x.

отсича от направлението θ_0 и най-близкия му клон от кривата. За нашия случай

$$\theta_0=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}.$$

Отначало, ако положим в уравненията (I) $\theta_0=0$ и заместим така получените изрази за x и y в уравнението на дадената крива, получаваме

$$r(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)-3a\sin\alpha\cos\alpha=0,$$

или като развием $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ по степените на α, имаме

$$r\left[\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots\right)^3+\left(\frac{\alpha}{1!}-\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\right)^3\right]$$
$$-3a\left(\frac{\alpha}{1}-\frac{\alpha^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{\alpha^2}{2!}+\frac{\alpha^4}{4!}-\cdots\right)=0.$$

В последното тъждество, ако пренебрегнем всички членове на r и α, които са от по-висока степен от единица, намираме, че

$$\alpha=\frac{r}{3a}>0,$$

т. е. кривата пресича окръжността над оста x.

По същия начин за $\theta_0=\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{3\pi}{2}$ намираме, че x е съответно <0, $=0$ и >0. Прочее от тези данни е ясно разположението на кривата в околността на двойната точка.

Този метод е общ и се прилага при изследването на всяка крива и за всяка особена точка. Обаче в случая можехме да изследваме кривата по много прост начин. И наистина в околността на $x=0$ и $u=\frac{y}{x}=0$ видът на кривата е както на параболата $x^2=3ay$, а в околността на $y=0$ и $u=\frac{y}{x}=\infty$ — както на $y^2=3ax$.

Декартовият лист има за асимптота правата

$$y+x=-a.$$

Понеже кривата е уникурсална, координатите ѝ могат да се изразят като рационални функции на един параметър t:

$$x=\frac{3at}{1+t^3},\quad y=\frac{3at^2}{1+t^3}$$

и изследването ѝ може да стане както в зад. **33.**

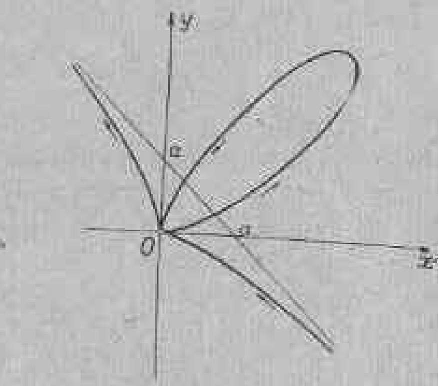
Така намираме

t	$-\infty$		-1 ∓ 0		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x_t'	$+0$	$+$		$+$		$+$	0	$-$			
y_t'	-0	$-$			0	$+$		$+$	0	$-$	
x	$+0$	↗	$\pm\infty$	↗	0	↗	$a\sqrt[3]{4}$ max	↘	$a\sqrt[3]{2}$	↘	0
y	-0	↘	$\mp\infty$	↘	0 min	↗	$a\sqrt[3]{2}$	↗	$a\sqrt[3]{4}$ max	↘	0

38. (Черт. 119.) — Имаме

$$\frac{\partial F}{\partial x}=5x^4-10axy^2=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=5y^4-10ax^2y=0,$$



Черт. 119

отгдето корените на тази система уравнения са $x_0=0$ и $y_0=0$. Тези стойности анулират всички производни до четвърти ред с изключение на

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x_0^2\,\partial y_0^2}=-20a,$$

следователно точката x_0, y_0 е една четворна точка на кривата. Ъгловите коефициенти на тангентите в тази точка се дават от уравнението

$$-120\,at^3+0.t^4=0,$$

което показва, че точката представлява два рога на кривата с тангенти координатните оси.

Правата

$$x+y=a$$

е асимптота на кривата. Уравнението на дадената крива може да се замени със следните параметрични уравнения:

$$x=\frac{5at^2}{1+t^5},\quad y=\frac{5at^3}{1+t^5},$$

отгдето

$$x_t'=5a\frac{2t-3t^6}{(1+t^5)^2},\quad y_t'=5a\frac{3t^2-2t^7}{(1+t^5)^2}.$$

Тогава имаме

t	$-\infty$		-1 ± 0		0		$\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$		$\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$		∞
x_t'	-0	$-$		$-$	0	$\pm$	0	$-$			$-$
y_t'	$+0$	$+$		$+$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x	-0		$\mp\infty$		$\underset{\min}{0}$	$\nearrow$	$\underset{\max}{a\sqrt[5]{4.27}}$		$a\sqrt[5]{72}$	$\searrow$	0
y	$+0$	$\nearrow$	$\pm\infty$		0	$\nearrow$	$a\sqrt[5]{72}$		$\underset{\max}{a\sqrt[5]{4.27}}$	$\searrow$	0

и

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t\to-\infty}=-\infty,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t\to\pm 0}=-0,\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{t\to\infty}=+\infty.$$

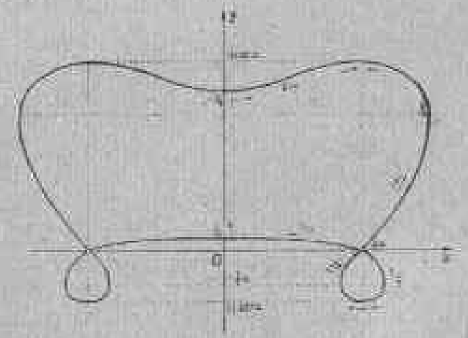
Забележка. За $n>0$

$$x^{2n+1}+y^{2n+1}=(2n+1)\,ax^ny^n$$

представлява уникурсална крива, която има за асимптота правата

$$y+x=(-1)^n a.$$

За $n=2$ получаваме преди малко разглежданата крива, а за $n=1$ — декартовия лист.



Черт. 120

Изследването на криви с горното общо уравнение може да стане с голяма лесница и в полярна координатна система.

39. (Черт. 120). — Ако решим уравнението относно x, намираме

$$x=\pm 2\sqrt{a^2\pm\sqrt{2ay^3+2a^2y^2-y^4}}$$

и

$$x_y'=\pm y\frac{-2y^2+3ay+2a^2}{\sqrt{2ay^3+2a^2y^2-y^4}\,\sqrt{a^2\pm\sqrt{2ay^3+2a^2y^2-y^4}}}.$$

$x_y'=0$ за $y=2a$ и $-\frac{1}{2}a$. Кривата пресича оста x в точките $x=\pm 2a$, които, както е лесно да се види, са двойни точки. Тя пресича оста y в точките

$$0<y_1<a,\ 2a<y_2<a(1+\sqrt{3})$$

и има четири инфлексни точки.

Сега да изследваме клона от кривата, който отговаря на уравнението

$$x=2\sqrt{a^2+y\sqrt{2ay+2a^2-y^2}}.$$

За да бъде x реално, трябва y да се намира в интервала

$$[a(1-\sqrt{3}),\ a(1+\sqrt{3})].$$

Тогава за този клон имаме

y	$a(1-\sqrt{3})$		$-\frac{1}{2}a$		0		$2a$		$a(1+\sqrt{3})$
x_y'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$		0	$-$	$-\infty$
x	$2a$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	$2a$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$2a$

За втория клон

$$x=2\sqrt{a^2-y\sqrt{2ay+2a^2-y^2}}$$

имаме

y	$a(1-\sqrt{3})$		$-\frac{1}{2}a$		0	$0<y_1<a$		$2a<y_2<a(1+\sqrt{3})$	$a(1+\sqrt{3})$
x_y'		$+$	0	$-$	$-$	∞		∞	$+$
x	$2a$	$\nearrow$	$\max$	$\searrow$	$2a$ $\searrow$	0	не съществува	0	$\nearrow$ $2a$

Другите два клона са симетрични на предните спрямо оста y.

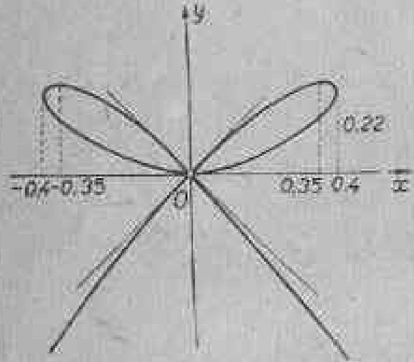
40. (Черт. 121.) — Кривата има за тройна точка началото на координатната система с тангенти $y=0$, $y=\pm x$. Понеже кривата е уникурсална, координатите ѝ могат да се изразят като рационални функции на един параметър. И наистина, ако положим $\frac{y}{x}=t$, намираме

$$x=(1-t^2)\,t,\quad y=(1-t^2)\,t^2;$$

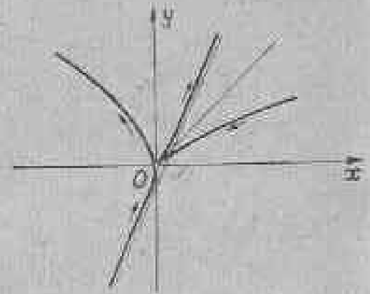
$$x_t'=1-3t^2,\quad y_t'=2t-4t^3.$$

Тогава имаме

t	$-\infty$		-1		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		0		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		1		$+\infty$
x_t'		$-$		$-$		$-$	0	$+$			0	$-$		$-$		$-$	
y_t'		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-0{,}35$	$\searrow$	$-0{,}4$ min	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}4$ max	$\searrow$	$0{,}35$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}25$ max	$\searrow$	$0{,}22$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$0{,}22$	$\nearrow$	$0{,}25$ max	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



Черт. 121



Черт. 122

41. (Черт. 122.) — Кривата има за тройна точка началото на координатната система с тангенти $x=0$ и $y=x$ (двойна), т. е. в околността на началото тази крива се състои от един клон и един рог от първи род. Тя има за асимптота правата

$$2x-y=\frac{1}{8}.$$

Понеже кривата е уникурсална, уравнението ѝ може да се замени със следните параметрични уравнения:

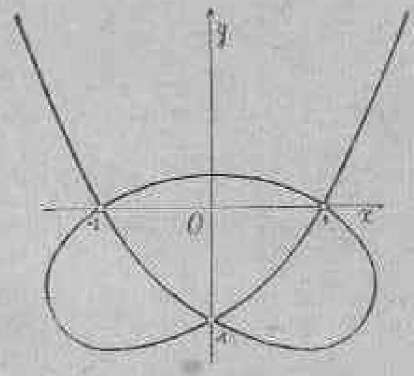
$$x=\frac{(t-1)^3}{(2-t)t^3},\quad y=\frac{(t-1)^2}{t^2(2-t)},$$

откъдето

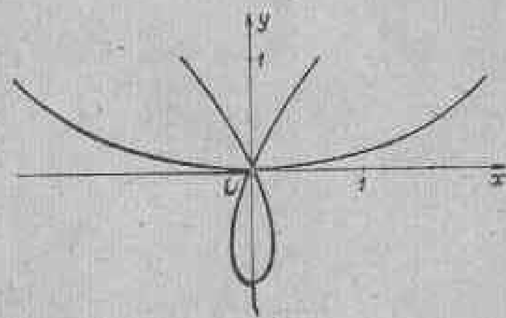
$$x_t'=\frac{2(t-1)(t^2-3t+3)}{t^4(2-t)^2},\quad y_t'=\frac{(t-1)(t^2-3t+4)}{t^3(2-t)^2}.$$

Тогава имаме

t	$-\infty$		± 0		1		2 ∓ 0		$\pm\infty$
x_t'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y_t'	0	$+$		$-$	0	$+$		$+$	
x	0	$\searrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0
y	0	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$\pm\infty$	$\nearrow$	0



Черт. 123



Черт. 124

42. (Черт. 123.) — Кривата има три двойни точки:

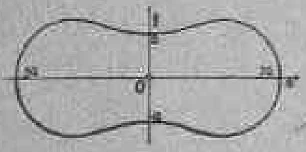
$$(0,-1),\ (1,\ 0),\ (-1,\ 0).$$

43. (Черт. 124.) — Кривата има за тройна точка началото на координатната система.

44. (Черт. 125.) — Производната е

$$r' = -2a\sin 2\theta.$$

При изменението на θ от $\theta=0$ до $\frac{\pi}{2}$ r намалява от $3a$ до a, защото $r'<0$. Ако заместим θ с $\pi\pm\theta$, r не се изменя. Прочее кривата е симетрична спрямо координатните оси x и y. Тя има четири инфлексни точки, определени от уравнението



Черт. 125

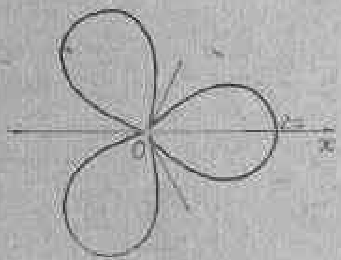
$$r^2+2r'^2-rr''=3a^2(4+4\cos 2\theta-\cos^2 2\theta)=0,$$

отгдето

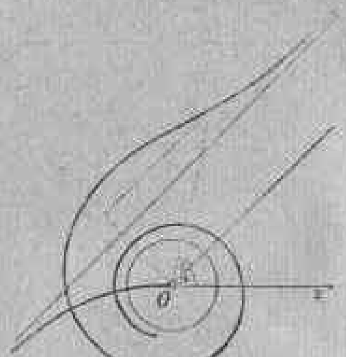
$$\cos 2\theta = 2(1-\sqrt{2}).$$

45. (Черт. 126.) $r' = -3a\sin 3\theta$.

При стойности на θ от $\theta=0$ до $\frac{\pi}{3}$ r намалява от $2a$ до 0. Ако заместим θ с $-\theta$ или с $\theta+\frac{2\pi}{3}$, r не се изменя. Началото е една 6-кратна точка. В тази точка кривата има 3 рога от първи род, тангентите на които сключват с полярната ос съответно ъглите $\theta=\pi$ и $\theta=\pm\frac{\pi}{3}$. Прочее кривата се състои от три еднакви листа.



Черт. 126



Черт. 127

46. (Черт. 127.) — Полярните координати на асимптотата се дават от

$$\varphi(\theta)=\frac{\theta-\alpha}{\theta}=0, \text{ отгдето } \theta=\alpha,$$

$$\delta=-\frac{1}{\varphi'(\alpha)}=-\alpha.$$

r постоянно намалява за $\theta<\alpha$, защото $r'=-\frac{\alpha}{(\theta-\alpha)^2}<0$, но е винаги по-голямо от 1. Следователно кривата се приближава асимптотически до окръжността с радиус единица.

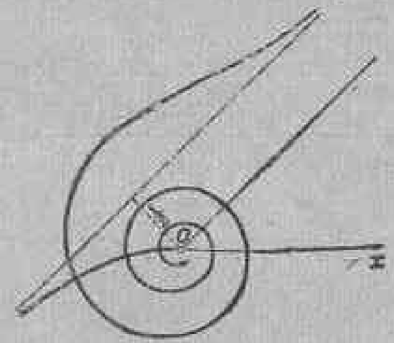
За да видим как изглежда кривата спрямо асимптотата, когато θ клони към α, трябва да изследваме за произволно t знака на разликата

$$OP-OA=\frac{\alpha+t}{t}\sin t-\alpha=\frac{(\alpha+t)\left(\frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\cdots\right)-\alpha t}{t}=t+o(t)^*,$$

гдето A и P са пресечните точки на перпендикуляра, спуснат от O към асимптотата, съответно със самата асимптота и с правата, която минава през M и е успоредна на асимптотата.

Значи тази разлика е положителна, когато t е положително и кривата е разположена над асимптотата. Напротив, ако t е отрицателно, разликата е отрицателна и кривата се намира под асимптотата. Тази част от кривата отговаря на онези значения на θ, които се намират в интервала $(0, \alpha)$. В този интервал r намалява от 0 до $-\infty$.

47. (Черт. 128.) — Асимптотата има полярни координати $\theta=1$ и $\delta=-\frac{1}{2}$.



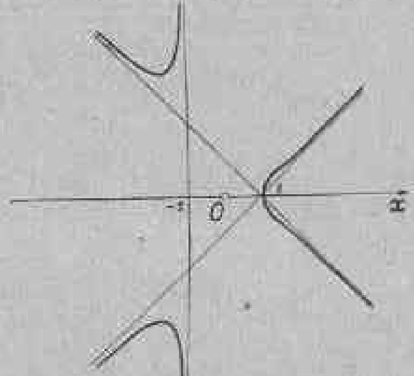
Черт. 128

48. Асимптотата има полярни координати $\theta=\frac{\pi}{2}$ и $\delta=-1$. Полярният център е двойна точка. Ако строфоидата на черт. 72 (**§ 15, зад. 30, в**) завъртим около началото на 180^0, получаваме строфоидата, дадена с уравнението $r=\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

* $o(t)$ означава величина, която, като се раздели с t, клони към 0, когато $t\to 0$.

49. (Черт. 129.) — Кривата е симетрична спрямо полярната ос, защото уравнението не се изменя, когато заместим θ с $-\theta$; r е положително, ако даваме на θ стойности, които се съдържат в един от интервалите

$$\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right) \quad и \quad \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right).$$



Черт. 129

В първия интервал минималната стойност $r=1$ се получава за $\theta=0$. В другите интервали r е минимум за стойности на θ, които анулират производната на израза

$$\cos\theta \cos 2\theta .$$

Този израз представяме във вида

$$\cos\theta\,(2\cos^2\theta-1)$$

и диференцираме относно $\cos\theta$.
Така добиваме израза

$$6\cos^2\theta-1,$$

който се анулира за $\cos^2\theta=\frac{1}{6}$. Тогава съответната стойност на r е $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Кривата има три асимптоти, ограничени в горните интервали. Полярните координати на тези асимптоти са съответно

$$\theta_1=\frac{\pi}{4}, \qquad \delta_1=\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\theta_2=\frac{\pi}{2}, \qquad \delta_2=-1;$$

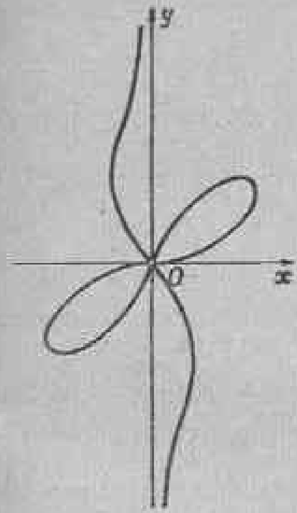
$$\theta_3=\frac{3\pi}{4}, \qquad \delta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Кривата има две инфлексни точки.

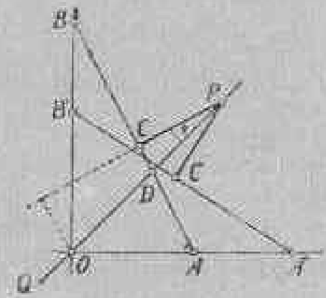
50. (Черт. 130.) — Кривата има за асимптота правата $x=0$ и началото на координатната система е тройна точка. Тя има освен началото още две инфлексни точки.

51. Да намерим най-напред уравнението на тази част от кривата, която отговаря на геометричното място, получено за онези отсечки AB, които секат отсечката OP в точки, принадлежащи едновременно на самите отсечки и на тяхното продължение. Такива точки ще наричаме *положителни*. Избираме P за полюс и PQ за полярна ос на една полярна координатна система (черт. 131). Нека AB е едно положение на движещата се отсечка и да положим $PC=r$, $OP=a$. Като изразим, че r ортогонална проекция на контура $POAC$ върху PC, получаваме

$$r=a\cos\theta-\overline{OA}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right).$$



Черт. 130



Черт. 131

Обаче

$$\overline{OA}=\overline{AB}\sin\widehat{OBA}=\overline{AB}\sin(\widehat{BDP}-\widehat{BOD})=l\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right).$$

Следователно

$$r=a\cos\theta-l\cos\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right),$$

или

(1) $$r=a\cos\theta-\frac{1}{2}\,l\cos 2\theta .$$

По същия начин намираме, че уравнението на останалата част от кривата, която отговаря на геометричното място на отсечките AB, които секат OP в *отрицателни* пресечни точки, е

(2) $$r=a\cos\theta+\frac{1}{2}\,l\cos 2\theta .$$

И за двете уравнения правата OP е ос на симетрията.

Нека най-напред разгледаме уравнението (1). Това уравнение може да се напише още във вида

$$r = a\cos\theta - \frac{l}{2}(2\cos^2\theta - 1),$$

или

$$r = -l\cos^2\theta + a\cos\theta + \frac{l}{2}. \tag{3}$$

Вторият член на (3) се анулира за

$$\cos\theta = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 2l^2}}{2l}. \tag{4}$$

Стойността θ_1, която се получава за долния знак, е реална, защото

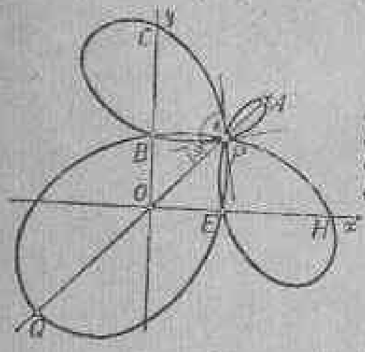
$$\sqrt{a^2 + 2l^2} - a \leq 2l.$$

Втората стойност θ_2 е реална, ако

$$a + \sqrt{a^2 + 2l^2} \leq 2l, \quad \text{т. е.} \quad l \geq 2a.$$

Случай $l \geq 2a$. — Когато това условие е изпълнено, уравнението (3) може да се напише още така:

$$r = l(\cos\theta_2 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta_1).$$



Черт. 132

За да бъде r положително, трябва да даваме на θ стойности, които се съдържат между θ_1 и θ_2. От своя страна r става максимум, когато двата фактора $\cos\theta_2 - \cos\theta$, $\cos\theta - \cos\theta_1$ са равни, т. е., когато

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2) = \frac{a}{2l}.$$

Стойността, която отговаря на r, е $\dfrac{2l^2 + a^2}{4l}$.

Уравнението (3) представлява листовете $PBCP$ и $PEHP$ (черт. 132).

Да разгледаме сега уравнението (2). Понеже то се различава от уравнението (1) само по това, че l е заместено с $-l$, тогава ъглите θ_3 и θ_4, които дават направленията на тангентите в P, са допълнителни до 180° на θ_1 и θ_2 и уравнението (2) може да се представи във вида

$$r = l\cos^2\theta + a\cos\theta - \frac{l}{2} = l(\cos\theta - \cos\theta_3)(\cos\theta - \cos\theta_4).$$

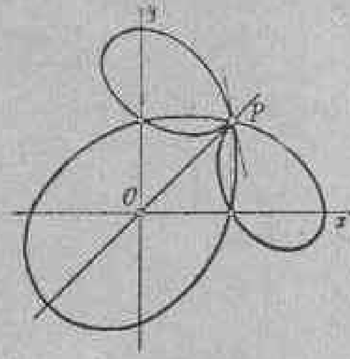
r е положително, когато θ се съдържа между θ_3 и θ_4.

Очевидно радиус-векторът става максимум за $\theta = 0$. За да видим дали за други стойности на θ r има максимум или минимум, разглеждаме производната

$$\frac{dr}{d\theta} = -(2l\cos\theta + a)\sin\theta.$$

Тя се анулира за $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, които стойности съответствуват на двата максимума PQ и PA. Също факторът $2l\cos\theta + a$ се анулира за

$$\cos\theta = -\frac{a}{2l}.$$



Черт. 133

Обаче тази стойност обръща r в отрицателно число. Така ние добиваме листовете $PBQEP$ и PAP.

Проекциите B и E на точката P върху осите Ox и Oy имат съответно полярните координати

$$-\frac{\pi}{4}, \ \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad \frac{\pi}{4}, \ \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

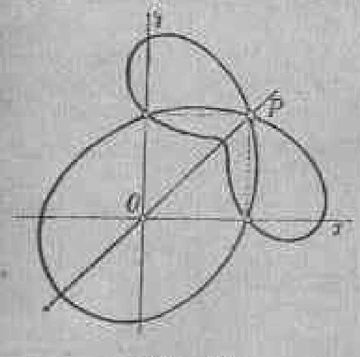
Тези стойности удовлетворяват и двете уравнения — (1) и (2). Оттук следва, че точките B и E са двойни, а точката P е четворна.

Случай $l = 2a$. — В този случай листът PAP изчезва и равенството (4) става

$$\cos\theta = \frac{a \pm 3a}{4a},$$

отгдето

$$\theta_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{и} \quad \theta_2 = 0.$$



Черт. 134

Кривата е дадена на черт. 133.

Случай $l < 2a$.* — През точката P минават само два клона. Полярната ос среща тази крива в още две други точки: $r = a \pm \dfrac{l}{2}$. В тях тангентите са перпендикулярни на полярната ос, защото $r' = -a\sin\theta \pm l\sin 2\theta$ (което представлява субнормалата) е нула за $\theta = 0$ (черт. 134).

* В черт. 131 имаме $l < 2a$.

§ 17. Обвивки на равнинни криви линии

Основни указания

Уравнението на обвивката се дава със следните системи уравнения:

а) $F(x, y, \alpha) = 0,\ \dfrac{dF}{d\alpha} = 0;$

b) $F(x, y, \alpha, \beta) = 0,\ \varphi(\alpha, \beta) = 0,\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \dfrac{\partial F}{\partial \beta}\dfrac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.$

1. Имаме

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = x - \frac{p}{2\alpha^2} = 0, \text{ отгдето } \alpha = \pm\sqrt{\frac{p}{2x}}.$$

Ако заместим α в уравнението на фамилията прави, като предварително го повдигнем в квадрат, получаваме

$$y^2 = x^2\frac{p}{2x} + xp + \frac{p^2}{\dfrac{2p}{x}} = 2px.$$

Следователно обвивката на фамилията прави е параболата

$$y^2 = 2px.$$

2. Параболата $y^2 = 4m(m + x)$.

3. а) Диференцираме двете уравнения спрямо α:

$$\frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2}{\beta^3}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad 1 + \frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Ако елиминираме $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$ от тези уравнения, получаваме

$$\frac{x^2}{\alpha^3} - \frac{y^2}{\beta^3} = 0,$$

или като вземем пред вид свойството на пропорцията,

(1) $$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\alpha} = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\beta} = \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{k}.$$

Като заместим стойностите на α и β, определени от (1) в уравнението на фамилията криви, намираме

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2}{k^2} + \frac{y^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^2}{k^2} = 1,$$

или

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{2}{3}},$$

което представлява уравнението на *астроидата*.

b) Ако диференцираме спрямо α дадените две уравнения, получаваме

$$\frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2}{\beta^3}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \alpha + \beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

отгдето, като елиминираме $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$, намираме

$$\frac{x^2}{\alpha^4} - \frac{y^2}{\beta^4} = 0,$$

или

(2) $$\frac{x}{\alpha^2} = \pm\frac{y}{\beta^2} = \frac{x \pm y}{k^2}.$$

Като заместим стойностите на α и β, определени от (2) в уравнението на елипсата, получаваме

$$x(x \pm y) = \mp y(x \pm y) + k^2,$$

т. е.

$$x \pm y = \pm k.$$

Прочее търсената обвивка представлява четири прави, успоредни на бисектрисите на ъглите, които образуват координатните оси.

c) Имаме

$$\frac{x^2}{\alpha^3} + \frac{y^2}{\beta^3}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0, \quad \beta + \alpha\frac{d\beta}{d\alpha} = 0.$$

Оттук, като изключим $\dfrac{d\beta}{d\alpha}$, намираме

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 0,$$

или

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{y^2}{\beta^2} = \frac{\pm xy}{k^2}.$$

Стойностите на α^2 и β^2, определени от последното уравнение, заместваме в уравнението на елипсата и получаваме

$$xy = \pm\frac{1}{2}k^2.$$

Прочее търсената обвивка се състои от две равнораменни хиперболи.

4. Уравнението на правите, които притежават това свойство, е

(1) $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

където $a=k\cos\alpha$, $b=k\sin\alpha$, k — дължината на хлъзгащата се отсечка и α — ъгълът, който сключва отрицателната посока на оста x с една произволна права от дадената фамилия.

Диференцираме уравнението (1) спрямо α:

$$x\cos\alpha-y\sin\alpha=k(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha).$$

От това уравнение и от уравнението (1) намираме, че

$$x=k\cos^3\alpha,$$

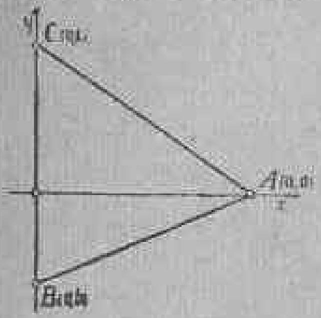
$$y=k\sin^3\alpha.$$

Елиминирането на α от тези две уравнения води до намиране на уравнението на астроидата:

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=k^{\frac{2}{3}}.$$

5. Парабола.

6. Нека оста y е правата BC и оста x минава през точката A (черт. 135). Тогава върховете на триъгълника имат координати съответно $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$ и $C(0,\ c)$, където $c-b=l=\text{const}$, а страната AC — ъглов коефициент $-\frac{c}{a}$. Прочее височината, която минава през B, има уравнение



Черт. 135

$$b^2+b(l-y)+ax-ly=0.$$

Това уравнение диференцираме спрямо b и получаваме

$$2b+l-y=0,$$

отгдето

$$b=\frac{y-l}{2}.$$

Като заместим тази стойност на b в уравнението (1), намираме, че търсената обвивка е параболата

$$(l+y)^2=4ax.$$

7. Координатите на върха на движещата се парабола са

$$x=-\frac{t^2}{2q},\quad y=t.$$

Тогава съответната парабола има уравнение

$$(y-t)^2=2p\left(x+\frac{t^2}{2q}\right),$$

или

(1) $$(q-p)t^2-2qyt+q(y^2-2px)=0.$$

Последното уравнение диференцираме спрямо t:

$$(q-p)t-qy=0,$$

отгдето

$$t=\frac{qy}{q-p}.$$

Като заместим тази стойност на t в (1), получаваме

$$y^2=2(p-q)x\text{ — парабола.}$$

Да предположим сега, че $q=p$. Тогава уравнението (1) добива вида

$$y^2=2px+2ty,$$

което показва, че тези параболи минават през началото на координатната система. Прочее в този случай обвивката се редуцира на една точка.

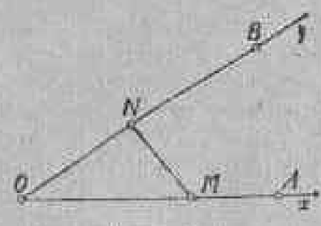
8. Равнораменна хипербола.

9. Нека OA е оста x и OB — оста y на една клиногонална координатна система (черт. 136). Ако положим

$$OA=a,\quad OB=b,\quad OM=\alpha,\quad ON=\beta,$$

уравнението на правата MN е

(1) $$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=1.$$



Черт. 136

От друга страна,

$$\alpha\beta=(a-\alpha)(b-\beta),$$

или

(2) $$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}=0.$$

Ако диференцираме уравненията (1) и (2) спрямо α, получаваме

$$\frac{x}{\alpha^2}d\alpha+\frac{y}{\beta^2}d\beta=0,\quad \frac{d\alpha}{a}+\frac{d\beta}{b}=0.$$

Оттук

(3) $$\frac{(ax)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}=\pm\frac{(by)^{\frac{1}{2}}}{\beta}.$$

Като елиминираме α и β от уравнението (1), (2) и (3), намираме

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}}=1,$$

което, лесно е да се види, представлява уравнението на една парабола. Тази крива се употребява при конструкцията на път, който съединява два прави пътя, продълженията на които се пресичат в близко съседство.

10. Параболата $y^2=2p\left(x+\frac{p}{2}\right)$.

11. $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=-2(x-\alpha)=0.$

Като елиминираме α от това уравнение и от уравнението на фамилията криви, получаваме

$$y^4-y^2=0.$$

Това уравнение представлява трите прави

$$y=0,\quad y=1,\quad y=-1.$$

Фамилията криви се получава от кривата

$$y^4-y^2+x^2=0,$$

като се хлъзга успоредно на оста x. Обаче тази крива има за двойна точка началото на координатната система и е тангента към двете прави $y=\pm 1$. Следователно правата $y=0$ е геометричното място на двойните точки, а двете прави $y=\pm 1$ представляват чистата обвивка.

12. Нека оста x е правата, която съединява двете постоянни точки, оста y — перпендикулярът, издигнат от средата на разстоянието между тези точки, и да означим с a и $-a$ абсцисите им. Ако движещата се права има уравнение

$$(1)\qquad \alpha x+\beta y+1=0,$$

тогава разстоянията на постоянните точки до тази права са

$$\pm\frac{\alpha a+1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad \pm\frac{-\alpha a+1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Оттук следва, като изразим условието на задачата, че

$$\frac{1-\alpha^2a^2}{\alpha^2+\beta^2}=\pm k^2,$$

или

$$(2)\qquad (a^2\pm k^2)\,\alpha^2\pm k^2\beta^2=1.$$

Предполагаме отначало, че знакът пред k^2 е *положителен* и диференцираме уравненията (1) и (2) спрямо α:

$$x+y\frac{d\beta}{d\alpha}=0,\quad (a^2+k^2)\,\alpha+k^2\beta\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

От тези уравнения, като елиминираме $\frac{d\beta}{d\alpha}$, получаваме

$$(3)\qquad (a^2+k^2)\,\alpha y-k^2\beta x=0.$$

От уравненията (1), (2) и (3) елиминираме α и β и добиваме уравнението на обвивката:

$$(4)\qquad k^2(a^2+k^2)=k^2x^2+a^2x^2+k^2y^2,$$

което представлява една елипса с полуоси k и $\sqrt{a^2+k^2}$.

Ако предположим сега, че знакът на k^2 е *отрицателен*, тогава лесно е да се види, че уравнението (4) се замени с

$$(5)\qquad -k^2(a^2-k^2)=-k^2x^2+a^2x^2-k^2y^2.$$

Това уравнение представлява една хипербола, ако $k^2<a^2$. В случай че $k^2>a^2$, уравнението (5) представлява една имагинерна елипса. Това може да се предвиди, защото произведението от разстоянията от постоянните точки до правата, които са с различни знаци, не може да бъде по-голямо от a^2.

13. Ако краищата на един диаметър имат координати x и y, тогава краищата на неговия спрегнат диаметър имат координати

$$-\frac{ay}{b},\ \frac{bx}{a}.$$

Прочее уравнението на търсената права е

$$\eta-y=\frac{b(ay-bx)}{a(ay+bx)}(\xi-x).$$

Като вземем пред вид уравнението на елипсата, това уравнение може да се напише още така:

$$(1)\qquad ay(a\eta-b\xi)+bx(a\eta+b\xi)=a^2b^2.$$

Ако диференцираме това уравнение и уравнението на елипсата, намираме

$$a^2y\frac{dy}{dx}+b^2x=0,\quad a(a\eta-b\xi)\frac{dy}{dx}+b(a\eta+b\xi)=0,$$

отгдето, като елиминираме $\frac{dy}{dx}$, получаваме

$$(2)\qquad bx(a\eta-b\xi)-ay(a\eta+b\xi)=0.$$

Сега остава да елиминираме x и y от уравненията (1), (2) и

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Достатъчно е за това да съберем уравненията (1) и (2), да повдигнем в квадрат двете части на полученото уравнение, като вземем пред вид равенство (1). Така добиваме

$$a^2 b^2 (a\eta - b\xi)^2 + a^2 b^2 (a\eta + b\xi)^2 = a^4 b^4,$$

или

$$\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\xi^2}{a^2}=\frac{1}{2},$$

което е уравнението на една елипса.

Забележка. По-просто се достига до този резултат, като се вземат параметричните уравнения на елипсата

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi.$$

14. $\left(\frac{\xi}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1$ — астероида.

15. $\eta^2 = -8p\xi$ — парабола.

16. Ако означим с a и b отрезите на движещата се права от координатните оси, с θ — ъгъла между тези оси и с $2p$ — дадения периметър, тогава уравнението на търсената права е

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, \tag{1}$$

гдето

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\theta}=2p,$$

или като се освободим от радикала, имаме

$$ab\cos^2\frac{\theta}{2}-ap-bp+p^2=0. \tag{2}$$

Диференцираме уравненията (1) и (2) спрямо a:

$$(x-a)\frac{db}{da}+y-b=0, \quad \left(a\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)\frac{db}{da}+b\cos^2\frac{\theta}{2}-p=0.$$

От последните две уравнения елиминираме $\frac{db}{da}$ и намираме

$$a\left(y\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)-b\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)=py-px. \tag{3}$$

Обаче елиминацията на ab от релациите (1) и (2) ни дава

$$a\left(y\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)+b\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)=-p^2. \tag{4}$$

Като решим уравненията (3) и (4) спрямо a и b, получаваме

$$a=\frac{py-px-p^2}{2\left(y\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)}, \quad b=\frac{px-py-p^2}{2\left(x\cos^2\frac{\theta}{2}-p\right)}.$$

Като заместим тези стойности в уравнението (1), намираме уравнението на търсената обвивка:

$$x^2+y^2+2xy\cos\theta-2px-2py+p=0,$$

което представлява една окръжност, допирателна на координатните оси.

17. В триъгълника $MM'M''$, който има за център на тежестта центъра (началото на координатната система) на елипсата, сумата на абсцисите, както и на ординатите, на трите му върха е нула. Ако увеличим ординатите, като ги умножим с $\frac{a}{b}$, добиваме три точки, които очевидно притежават същото свойство и са разположени върху окръжността с диаметър най-голямата ос на елипсата. Прочее новообразуваният триъгълник е равностранен, защото неговият център на тежестта се слива с центъра на описаната окръжност.

Оттук следва, че ако $a\cos\varphi$, $b\sin\varphi$ са координатите на точката M, тогава двата други върха ще имат за координати съответно

$$a\cos\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right), \quad b\sin\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right)$$

и

$$a\cos\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right), \quad b\sin\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right).$$

Тогава уравнението на описаната окръжност на този триъгълник е

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi & a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a^2\cos^2\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right)+b^2\sin^2\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right) & a\cos\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right) & b\sin\left(\varphi+\frac{2}{3}\pi\right) & 1 \\ a^2\cos^2\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right)+b^2\sin^2\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right) & a\cos\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right) & b\sin\left(\varphi+\frac{4}{3}\pi\right) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

или като развием детерминантата, намираме

$$x^2+y^2+\frac{c^2}{2a}\cos\varphi\,(4\sin^2\varphi-1)\,x-\frac{c^2}{2b}\sin\varphi\,(4\cos^2\varphi-1)\,y-\frac{a^2+b^2}{2}=0,$$

което може да се напише още така:

$$x^2+y^2-x\frac{c^2}{2a}\cos 3\varphi-y\frac{c^2}{2b}\sin 3\varphi-\frac{a^2+b^2}{2}=0.$$

Като диференцираме (1) спрямо φ, получаваме

(2) $$\frac{1}{a}x\sin 3\varphi-\frac{1}{b}y\cos 3\varphi=0.$$

Решаваме уравненията (1) и (2) спрямо $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ и намираме

$$\sin 3\varphi=\frac{(2x^2+2y^2-a^2-b^2)\,y}{bc^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)},$$

$$\cos 3\varphi=\frac{(2x^2+2y^2-a^2-b^2)\,x}{ac^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)},$$

отгдето, като ги повдигнем в квадрат и после съберем, намираме

$$1=\frac{(2x^2+2y^2-a^2-b^2)^2\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)}{c^4\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^2},$$

или

$$\frac{c^4}{4}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(x^2+y^2-\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2.$$

18. Ако положим $y=tx$, тогава уравнението на строфоидата се заменя с

$$x=\frac{a(t^2-1)}{t^2+1},\quad y=\frac{at(t^2-1)}{t^2+1}.$$

Уравнението на тангентата е

(1) $$\xi(t^4+4t^2-1)-4t\eta-a(t^2-1)^2=0.$$

Ако в това уравнение считаме (ξ,η) за координати на една дадена точка, то ще съществуват четири значения на t, които ще съответствуват на четирите допирателни точки на тангентите, прекарани в точката (ξ,η).

Ако точката (ξ,η) лежи на кривата, то

$$\xi=\frac{a(u^2-1)}{u^2+1},\quad \eta=\frac{au(u^2-1)}{u^2+1}.$$

Като заместим тези стойности на ξ и η в уравнението (1), получаваме

$$t^4-t^2(3u^2-1)+2ut(u^2-1)+u^2=0.$$

Тъй като това уравнение трябва да има един двукратен корен $t=u$, то трябва да се дели на

$$t^2-2ut+u^2.$$

Като извършим делението, получаваме за частното

$$t^2+2ut+1=0.$$

Следователно, ако t_1, t_2 са значенията на t, които съответствуват на точките T и T', тогава имаме

(2) $$t_1+t_2=-2u \quad\text{и}\quad t_1.t_2=1.$$

Уравнението на тангентата TT' е

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ \dfrac{a(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & \dfrac{at_1(t_1^2-1)}{t_1^2+1} & 1\\ \dfrac{a(t_2^2-1)}{t_2^2+1} & \dfrac{at_2(t_2^2-1)}{(t_2^2+1)} & 1\end{vmatrix}=0,$$

или, като развием детерминантата и съкратим на t_1-t_2, получаваме

$$x(t_1^2t_2^2+2t_1t_2+t_1^2+t_2^2-1)-2y(t_1+t_2)-a(t_1^2t_2^2-t_1-t_2+1)=0.$$

Като вземем пред вид релацията (2), намираме

(3) $$u^2x+uy-a(1-u^2)=0.$$

Ако диференцираме това уравнение спрямо u, имаме

$$2ux+y+2au=0,\quad u=-\frac{y}{2(x+a)}.$$

Прочее уравнението на обвивката е параболата

$$y^2+4a(x+a)=0.$$

19. Нека уравнението на кривата C е

$$ax^2+2bxy+cy^2+2fx+2gy+h=0. \tag{1}$$

Тогава уравнението на полярата на една точка от това конично сечение спрямо

$$px^2+2qxy+ry^2=1$$

е

$$x(p\xi+q\eta)+y(q\xi+r\eta)-1=0, \tag{2}$$

гдето x и y удовлетворяват уравнението (1).

Ако положим

$$p\xi+q\eta=P, \quad q\xi+r\eta=Q$$

и означим с λ един неопределен фактор, намираме

$$\begin{cases} \lambda P+ax+by+f=0, \\ \lambda Q+bx+cy+g=0, \end{cases} \tag{3}$$

отгдето

$$-\lambda+fx+gy+h=0. \tag{4}$$

Като елиминираме λ, x и y от уравненията (2), (3) и (4), получаваме

$$\begin{vmatrix} 0 & P & Q & -1 \\ P & a & b & f \\ Q & b & c & g \\ -1 & f & g & h \end{vmatrix}=0.$$

Ако развием детерминантата, намираме уравнението на търсената обвивка:

$$(g^2-ch)P^2+2(bh-fg)PQ+(f^2-ag)Q^2$$
$$+2(bg-cf)P+2(bf-ag)Q+b^2-ac=0.$$

Ако се търси обвивката на полярите на точките на тази крива спрямо коничното сечение

$$px^2+2qxy+ry^2=1,$$

намираме кривата C. Това свойство е общо за каквито и да са криви. Те се наричат реципрочни поляри.

20. Ако един сноп светлинни лъчи L пада върху една крива C и се отразява, то обвивката на отразените лъчи се нарича *каустика на отражението* (катакустика).

Тази крива има голямо приложение в оптиката.

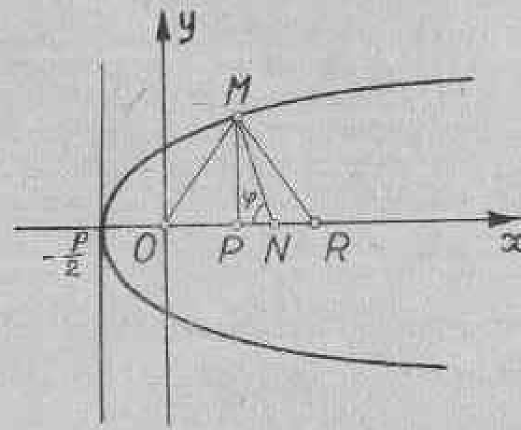
Да означим с PM един лъч от снопа, с MN — нормалата на параболата, с MR — отразения лъч и с φ — ъгъла MNP (черт. 137). Тогава ще имаме

$$\widehat{NMP}=\widehat{NMR}=\frac{\pi}{2}-\varphi,$$

$$\widehat{MRx}=\frac{3\pi}{2}-2\varphi;$$

уравнението на правата MR ще бъде

$$\eta-y=\frac{\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi}(\xi-x). \tag{1}$$



Черт. 137

От триъгълника MPN се вижда, че

$$PN=p=y\,\mathrm{ctg}\,\varphi,$$

отгдето

$$y=p\,\mathrm{tg}\,\varphi.$$

Като заместим тази стойност на y в уравнението на параболата, получаваме

$$2x=\frac{p\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}-p=-\frac{p\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}.$$

Тогава уравнението (1) на отразения лъч може да се напише още така:

$$\eta\sin 2\varphi-\xi\cos 2\varphi=\frac{p}{2\cos^2\varphi}. \tag{2}$$

Ако диференцираме двете страни на равенството спрямо φ, намираме

$$\eta\cos 2\varphi+\xi\sin 2\varphi=\frac{p\sin\varphi}{2\cos^3\varphi}. \tag{3}$$

Уравненията (2) и (3), решени спрямо ξ и η, ни дават

$$\begin{cases} \xi=-\dfrac{p}{2\cos^3\varphi}\cos 3\varphi, \\ \eta=\dfrac{p}{2\cos^3\varphi}\sin 3\varphi. \end{cases}$$

Тези уравнения представляват параметричните уравнения на каустиката на отражението. От тях лесно се намира полярното ѝ уравнение

$$r^{\frac{1}{3}}\cos\frac{\theta}{3}=\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

21. $[4(x^2+y^2)-r^2]^3-27\,r^4y^2=0$ — *епициклоида*[*].

22. Кардиоида.

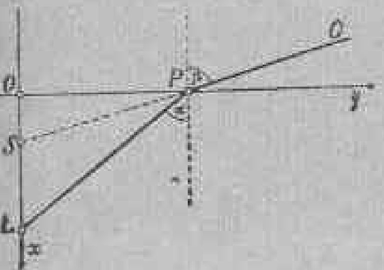
23. $x^2=4p(y+a)$.

24. *Каустика на пречупването (диакустика)* на сноп лъчи L, падащи върху една крива C, е обвивката на пречупените лъчи.

Да си изберем координатната система по такъв начин, че източникът на светлина L да лежи върху оста x на разстояние a от началото, а дадената права да е оста y и да означим с

$$n=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

коефициента на пречупването. Нека LP е един лъч от снопа, PQ — пречупеният му лъч и S — пресечната точка на продължението на PQ с оста x (черт. 138). Тогава, като имаме пред вид, че



Черт. 138

$$OP=a\operatorname{tg}\alpha,\quad OS=a\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta},$$

уравнението на пречупения лъч е

$$x\operatorname{tg}\beta+y-a\operatorname{tg}\alpha=0.$$

Уравнението на обвивката (каустиката) на фамилията прави, представена с последното уравнение, гдето $n\sin\beta=\sin\alpha$, е

$$\begin{cases} x=\dfrac{an\cos^3\beta}{\cos^3\alpha}, \\[2mm] y=\dfrac{an(1-n^2)\sin^3\beta}{\cos^3\alpha}, \end{cases}$$

[*] Епициклоидата е такава крива, която се получава като геометрично място на една точка, неизменно свързана с равнината на един кръг с радиус b, търкалящ се върху един постоянен кръг с радиус a и тези кръгове са външни един на друг. Когато подвижният кръг е вътрешен на постоянния, тогава кривата се нарича *хипоциклоида*. Техните уравнения са съответно

$$\begin{cases} x=(a+b)\cos\varphi-c\cos\dfrac{a+b}{b}\varphi, \\[2mm] y=(a+b)\sin\varphi-c\sin\dfrac{a+b}{b}\varphi; \end{cases}\qquad \begin{cases} x=(a-b)\cos\varphi+c\cos\dfrac{a-b}{b}\varphi, \\[2mm] y=(a-b)\sin\varphi-c\sin\dfrac{a-b}{b}\varphi, \end{cases}$$

гдето c е разстоянието на точката до центъра на движещата се окръжност.

или като елиминираме α и β, получаваме

$$\left(\frac{x}{an}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y\sqrt{1-n^2}}{an}\right)^{\frac{2}{3}}=1, \tag{1}$$

което, както ще видим по-нататък, представлява еволюта на една елипса или на една хипербола в зависимост от това, дали $n<1$ или $n>1$. Уравнението на еволютата на елипсата

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1$$

е

$$\left(\frac{a_1x}{a_1^2-b_1^2}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b_1y}{a_1^2-b_1^2}\right)^{\frac{2}{3}}=1. \tag{2}$$

Като сравним уравненията (1) и (2), получаваме

$$a_1=\frac{a}{n},\quad b_1=\frac{a}{n}\sqrt{1-n^2},$$

отгдето

$$\sqrt{a_1^2-b_1^2}=a,$$

което показва, че източникът на светлината L лежи в един от фокусите на елипсата и всеки пречупен лъч е нормала на елипсата.

Източникът на светлината L вследствие на пречупването получава премествания във вертикална и хоризонтална посока, съответно равни на

$$a-x=\frac{a(\cos^3\alpha-n\cos^3\beta)}{\cos^3\alpha},$$

$$y=\frac{an(1-n^2)\sin^3\beta}{\cos^3\alpha}.$$

Тези формули могат да ни послужат за пресмятане на коефициента на пречупването, напр. във вода и въздуха.

Така ако във водата на един басейн на разстояние a от водната повърхност поставим един светещ източник, вижда се, че образът на този източник се явява повдигнат на около $\frac{1}{4}\,a$ от действителното му положение.

Ако предположим сега, че $\beta=0$, получаваме също $\alpha=0$. Тогава първото от последните две уравнения ни дава

$$a(1-n)=\frac{1}{4}\,a,$$

отгдето

$$n=\frac{3}{4}.$$

25. $x = \dfrac{\xi^2 f'(\xi)}{f(\xi) - \xi f'(\xi)}, \quad y = \dfrac{[f(\xi)]^2}{f(\xi) - \xi f'(\xi)}$.

26. $y = -\dfrac{1}{2} g \dfrac{x^2}{v_0^2} + \dfrac{1}{2} \dfrac{v_0^2}{g}$ — парабола.

§ 18. Радиус на кривината и еволюта. Допиране и оскулация

Основни указания

a) Ако уравнението на кривата е $y = f(x)$, то еволютата и радиусът на кривината се дават от

$$\xi = x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''};$$

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

b) Ако уравнението на кривата е $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ тогава имаме

$$\xi = x - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}, \quad \eta = y + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''},$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y'' - x''y'}.$$

c) Ако най-после уравнението на кривата е $r = f(\theta)$, тогава имаме

$$\xi = \frac{r(r'^2 - rr'')\cos\theta - (r^2 + r'^2) r' \sin\theta}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\eta = \frac{r(r'^2 - rr'')\sin\theta + (r^2 + r'^2) r' \cos\theta}{r^2 + 2r'^2 - rr''};$$

$$R = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}.$$

d) Най-общото уравнение на еволютата и за трите случая е

$$\xi = y + R\cos\alpha, \quad \eta = x - R\sin\alpha.$$

e) Условието, за да имат кривите $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$ допиране от n-ти ред в точката (x_1, y_1) е

$$f(x_1) = \varphi(x_1), \quad f'(x_1) = \varphi'(x_1), \ldots, \quad f^{(n)}(x_1) = \varphi^{(n)}(x_1),$$
$$f^{(n+1)}(x_1) \neq \varphi^{(n+1)}(x_1).$$

f) Ако кривите C и C' са дадени съответно с уравненията $y = f(x)$ и $F(x, y, a, b, \ldots, l) = 0$, където $a, b, \ldots, l$ са $n+1$ параметъра, условието кривата C' да оскулира кривата C е

$$F[x_1, f(x_1), a, b, \ldots, l] = 0,$$
$$\frac{d}{dx_1} F[x_1, f(x_1), a, b, \ldots, l] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{d^n}{dx_1^n} F[x_1, f(x_1), a, b, \ldots, l] = 0.$$

1. $R = \dfrac{(y^2 + 4a^2)^{\frac{3}{2}}}{4a^2}$.

2. $R = \dfrac{(a^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$.

3. $R = \dfrac{4}{3} a \sin\dfrac{\theta}{2}$.

4. $R = \dfrac{2a}{\cos^3\dfrac{\theta}{2}}$.

5. Имаме

$$y' = \operatorname{sh}\frac{x}{a}, \quad y'' = \frac{y}{a^2},$$

откъдето

$$R = \frac{y^2}{a}.$$

Тогава еволютата е определена от уравненията

$$\xi = x - \frac{a}{2} \operatorname{sh}\frac{2x}{a},$$

$$\eta = 2a \operatorname{ch}\frac{x}{a}.$$

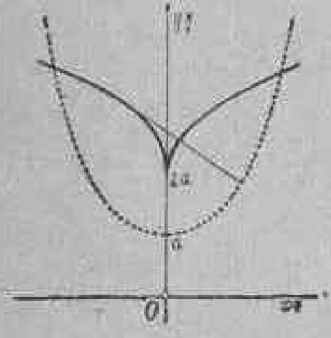
Да изследваме тази крива. Производните на ξ и η спрямо x са

$$\xi_x' = -2\operatorname{sh}^2\frac{x}{a}, \quad \eta_x' = 2\operatorname{sh}\frac{x}{a}.$$

Ако x заменим с $-x$, то ξ се замени с $-\xi$, а η не се промени. Следователно кривата е симетрична спрямо оста η. Когато x варира от x

до $-\infty$, ξ намалява от 0 до $-\infty$, а η расте от $2a$ до $+\infty$. Така $(0, 2a)$ е един рог от първи род (черт. 139).

Верижката е крива, която се образува, когато закачим краищата на една хомогенна, тежка, неразтегаема и гъвкава нишка за две фиксирани точки.



Черт. 139

6. $y' = \dfrac{3a - 2x}{2(a-x)}\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$,

$$y'' = \frac{3a^2}{4(a-x)^2\sqrt{x(a-x)}},$$

$$R = a\frac{4a-3x}{6(a-x)^2}\sqrt{x(4a-3x)}.$$

Еволютата е определена от уравненията

$$\xi = ax\frac{5x-6a}{6(a-x)^2},\ \eta = \frac{4a}{3}\sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Като елиминираме x от тези уравнения, намираме

$$\xi = -\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{\eta^2}{8a^3}\left(\eta^2 + \frac{32a^2}{3}\right).$$

7. $y' = -\dfrac{1}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2}{x^3}$, $R = \dfrac{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}{2x^3}$.

Следователно параметричните уравнения на еволютата са:

$$\xi = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2x^3},\quad \eta = \frac{3}{2x} + \frac{x^3}{2},$$

отгдето

$$\xi + \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + x\right)^3,$$

$$\xi - \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - x\right)^3.$$

От последните две уравнения лесно се елиминира параметърът x. Достатъчно е да повдигнем двете им страни в степен $\frac{2}{3}$ и после да ги извадим. Така получаваме декартовото уравнение на еволютата:

$$(\xi + \eta)^{\frac{2}{3}} - (\xi - \eta)^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{2}{3}}.$$

8. $R = \dfrac{(a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{ay}$,

$$\xi = a\ln\frac{\eta \pm (\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{4a} - \frac{\eta^2 + 4a^2 \pm \eta(\eta^2 - 8a^2)^{\frac{1}{2}}}{8a}.$$

9. $R = \dfrac{1}{2a}\sqrt{\dfrac{x}{3}}(4a + 3x)^{\frac{3}{2}}$,

$$\xi = -x\frac{2a + 3x}{2a},\quad \eta = 4(x + a)\sqrt{\frac{x}{3a}}.$$

10. $R = \dfrac{a(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}$, $\eta = \dfrac{a^2}{y}$, $\xi = -a\ln\dfrac{a + (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}{y}$,

отгдето

$$\eta = a\,\mathrm{ch}\frac{\xi}{a}.$$

Прочее верижката е еволюта на трактрисата (зад. 5).

Трактрисата е крива, която се описва от края на една неразтегаема и без маса нишка, разположена в една хоризонтална равнина, другият край на която се тегли по дължината на една права линия. Трябва да се отбележи, че придобитата скорост на подвижната точка постоянно се унищожава от съпротивлението на равнината, т. е., което е все същото, да предположим, че триенето е безкрайно голямо. Clairaut е обобщил тази крива, като взема една произволна крива вместо правата.

11. $y' = -\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}$, $y'' = \dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}}$, $R = 3(axy)^{\frac{1}{3}}$.

Параметричните уравнения на еволютата са

$$\xi = x + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}},\quad \eta = y + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}},$$

отгдето

$$\xi + \eta = x + 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} + y = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3,$$

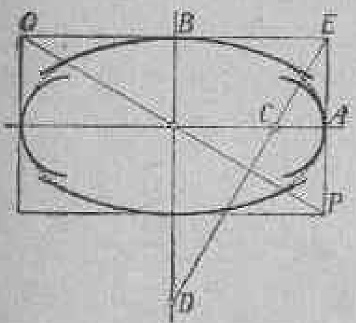
$$\xi - \eta = x - 3x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - y = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

Оттук получаваме

$$(\xi+\eta)^{\frac{2}{3}}+(\xi-\eta)^{\frac{2}{3}}=2a^{\frac{2}{3}},$$

което представлява една астроида.

12. $x_t'=-a\sin t,\quad y_t'=b\cos t,\quad x_t''=-a\cos t,\quad y_t''=-b\sin t.$



Черт. 140

Тогава радиусът на кривината е

$$R=\frac{(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}{ab}.$$

В частност за върховете на елипсата

$$A(t=0)\quad\text{и}\quad B\left(t=\frac{1}{2}\pi\right)$$

радиусите на кривината са съответно

$$R_A=\frac{b^2}{a}\quad\text{и}\quad R_B=\frac{a^2}{b}.$$

Тези формули показват, че перпендикулярът, спуснат от точката E към PQ (черт. 140), пресича осите на елипсата съответно в центровете на кривината на върховете A и B. По такъв начин се вижда оправданието на познатата приблизителна конструкция на елипсата. Освен това, както ще видим по-нататък, в точките A и C оскулачните окръжности имат допиране с елипсата от най-висок ред.

Уравненията на еволютата са

$$\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t,\qquad \eta=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin^3 t.$$

Оттук получаваме

$$(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=(a^2-b^2)^{\frac{2}{3}},$$

което представлява една крива, подобна на астроидата и наречена *астероида*.

13. $x_t'=a(1-\cos t),\quad y_t'=a\sin t,\quad x_t''=a\sin t,\quad y_t''=a\cos t,$

отгдето

$$R=2a\sqrt{2(1-\cos t)}=4a\sin\frac{t}{2}.$$

Еволютата е определена с уравненията

$$(1)\qquad \begin{cases}\xi=a(t+\sin t),\\ \eta=-a(1-\cos t).\end{cases}$$

Ако положим

$$\xi'=a\pi+\xi,\quad \eta'=2a+\eta,$$

уравненията (1) се обръщат във вида

$$\xi'=a(t+\pi+\sin t),\quad \eta'=a(1+\cos t).$$

Като положим сега $t'=\pi+t$, получаваме

$$\xi'=a(t'-\sin t'),$$
$$\eta'=a(1-\cos t'),$$

т. е. уравненията на една циклоида.

14. $x_t'=2(a+b)\cos\frac{a+2b}{2b}t\,\sin\frac{at}{2b},$

$$y_t'=2(a+b)\sin\frac{a+2b}{2b}t\,\sin\frac{at}{2b},$$

отгдето

$$(1)\qquad R=\frac{4b(a+b)}{a+2b}\sin\frac{at}{2b}.$$

Уравненията на еволютата са

$$(2)\qquad \begin{cases}\xi=\dfrac{ab}{a+2b}\left(\dfrac{a+b}{b}\cos t+\cos\dfrac{a+b}{b}t\right),\\[2mm] \eta=\dfrac{ab}{a+2b}\left(\dfrac{a+b}{b}\sin t+\sin\dfrac{a+b}{b}t\right).\end{cases}$$

Ако заместим b с $-b$ в (1) и (2), ще получим формулите, които се добиват, като третираме същия въпрос за хипоциклоидата.

Уравненията (2) представляват една епициклоида от същия род като дадената. За да се уверим в това, достатъчно е да направим едно въртене на координатната система по такъв начин, че уравненията (2) да се трансформират в уравненията на дадената епициклоида.

15. $r'=ae^{a\theta}=ar,\quad r''=a^2r,\quad R=r\sqrt{1+a^2}.$

За да получим уравненията на еволютата, използваме основните формули c). Така намираме

$$\xi=-ae^{a\theta}\sin\theta,\quad \eta=ae^{a\theta}\cos\theta.$$

Ако в тези уравнения положим $\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta$, добиваме

$$\xi=ae^{a\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\cos\varphi,\quad \eta=ae^{a\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\sin\varphi.$$

Оттук получаваме полярното уравнение на еволютата

$$r = ae^{a\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)};$$

то представлява също една логаритмична спирала, която се получава от дадената, като завъртим полярната ос на ъгъл

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\ln a}{a}.$$

16. $r' = -a \sin\theta, \quad r'' = -a\cos\theta, \quad R = \frac{4}{3} a \cos\frac{\theta}{2}.$

Параметричните уравнения на еволютата са

$$\xi = \frac{a}{3}(2 + \cos\theta - \cos^2\theta),$$

$$\eta = \frac{a}{3}\sin\theta\,(1 - \cos\theta).$$

Ако положим

$$\xi' = \xi - \frac{2a}{3}, \quad \eta = \eta',$$

получаваме

$$\xi' = \frac{a}{3}\cos\theta\,(1 - \cos\theta),$$

$$\eta' = \frac{a}{3}\sin\theta\,(1 - \cos\theta).$$

Оттук получаваме полярното уравнение на еволютата:

$$r = \frac{a}{3}(1 - \cos\theta),$$

което представлява уравнението на една кардиоида, защото, ако положим $\theta = \pi - \varphi$, това уравнение се обръща във вида

$$r = \frac{a}{3}(1 + \cos\varphi).$$

17. $R = \dfrac{a^2}{3\,(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{a}{3\sqrt{\cos 2\theta}}.$

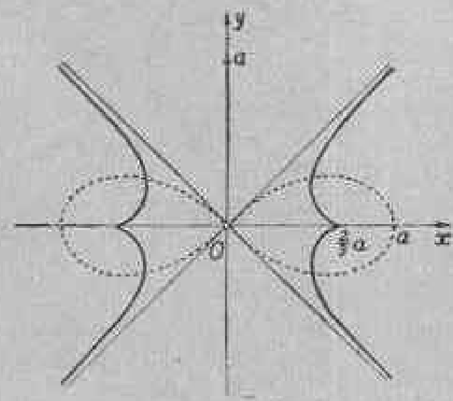
$$\eta = -\frac{y\,(a^2 - x^2 - y^2)}{3(x^2 + y^2)} = -\frac{2\,a\sin^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}},$$

$$\xi = \frac{x(a^2 + x^2 + y^2)}{3\,(x^2 + y^2)} = \frac{2\,a\cos^3\theta}{3\sqrt{\cos 2\theta}},$$

откъдето

$$\left(\xi^{\frac{2}{3}} + \eta^{\frac{2}{3}}\right)^2\left(\xi^{\frac{2}{3}} - \eta^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{4a^2}{9}.$$

Лемнискатата и нейната еволюта са представени на черт. 141.



Черт. 141

18. Нека уравнението на централното конично сечение е

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1.$$

Тогава уравнението на тангентата и разстоянието на центъра до тази тангента са съответно

$$\frac{x\xi}{a} + \frac{y\eta}{b} = 1,$$

$$d = \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2}}.$$

Но

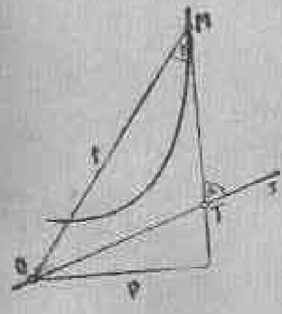
$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{y}, \quad y'' = -\frac{b^2}{a}\frac{1}{y^3}, \quad R^2 = \frac{(a^2y^2 + b^2x^2)^3}{a^4 b^4}.$$

Оттук следва, че

$$R^2 d^6 = a^2 b^2,$$

или

$$R = \pm\frac{ab}{d^3}.$$



Черт. 142

19. Имаме (черт. 142)

$$OT = \xi = x - \frac{y}{y'} = \frac{y'x - y}{y'},$$

$$p = \frac{y'x - y}{y'}\sin\alpha = x\sin\alpha - y\cos\alpha.$$

Диференцираме последното равенство спрямо α:

$$(1) \qquad dp = (\sin\alpha\,dx - \cos\alpha\,dy) + (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\,d\alpha.$$

Изразът в първата скоба е равен на нула, защото

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Ако диференцираме равенство (1) още един път, получаваме

$$\frac{d^2p}{d\alpha^2}=-p+\cos\alpha\frac{dx}{d\alpha}+\sin\alpha\frac{dy}{d\alpha}.$$

Обаче

$$\cos\alpha=\frac{dx}{ds},\quad \sin\alpha=\frac{dy}{ds},\quad R=\frac{ds}{d\alpha}.$$

Следователно

(1) $$\frac{d^2p}{d\alpha^2}=-p+\frac{ds}{d\alpha},\ \text{или}\ R=p+\frac{d^2p}{d\alpha^2}.$$

От друга страна

$$p=r\sin\mu=\frac{r}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\mu}}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}.$$

Ако диференцираме двете страни на това равенство, намираме

$$dp=\frac{2r\,dr}{\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}-\frac{r^2}{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\left(r\,dr+\frac{dr\,d^2r}{d\theta\,d\theta^2}d\theta\right),$$

или

$$\frac{dp}{r\,dr}=\frac{r^2+2r'^2-rr''}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{R},$$

или още

(2) $$R=r\frac{dr}{dp}.$$

20. Предполагаме, че означенията са същите както в предната задача. Тогава имаме

$$p=r\cos\varphi$$

и ъгълът φ става максимум или минимум заедно с

$$\cos\varphi=\frac{p}{r}.$$

Следователно за тези значения на φ имаме

$$r\,dp-p\,dr=0,$$

или като имаме пред вид формула (2) на предната задача,

$$r\frac{r\,dr}{R}-p\,dr=0,$$

откъдето

$$pR=r^2.$$

21. Избираме за координатни оси тангентата и нормалата в точката M. Тогава уравнението на елипсата е от вида

$$ay^2+bxy+cx^2+dy=0.$$

Ако x_1 е абсцисата на точката T, полярата ѝ спрямо елипсата ще има уравнение

$$bx_1y+2cx_1x+dy=0,$$

а перпендикулярът, спуснат от точката T към тази права, ще има уравнение

(1) $$y=\frac{bx_1+d}{2cx_1}(x-x_1).$$

Центърът на елипсата се дава от двете уравнения

$$by+2cx=0,$$

$$2ay+bx+d=0.$$

Първото уравнение представлява уравнението на диаметъра OM. Тогава уравнението на перпендикуляра, спуснат от точка T върху OM, е

(2) $$y=\frac{b}{2c}(x-x_1).$$

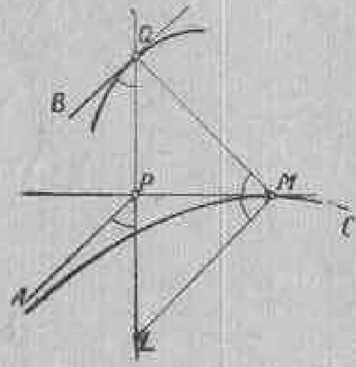
Правите (1) и (2) отсичат от ординатната ос съответно отрезите $-\frac{bx_1+d}{2c}$, $-\frac{bx_1}{2c}$, разликата на които е $-\frac{d}{2c}$. Но абсолютната стойност на тази величина е точно стойността на радиуса на кривината.

22. Най-напред се вижда, че продължението на правата QM е отразеният лъч (черт. 143). От друга страна, тангентата на геометричното място Q е успоредна на тангентата на геометричното място P, понеже тези геометрични места са хомотетични и PA (зад. 39, § 15) сключва с PL ъгъл $\widehat{APL}=\widehat{PML}$. Прочее, ако BQ е тангента на геометричното място Q, ще имаме

$$\widehat{PQB}=\widehat{PML}=\widehat{PMQ}$$

и следователно

$$\widehat{PQB}+\widehat{PQM}=\widehat{BQM}=\widehat{PQM}+\widehat{PMQ}=\frac{\pi}{2}.$$



Черт. 143

Това показва, че отразените лъчи са нормали на кривата Q и следователно еволютата на тази крива е каустиката.

23. а) В логаритмичната спирала ъгълът PML е постоянен (черт. 143). Прочее геометричното място на точката P и следователно това на точката Q са спирали, подобни на дадената. Тогава еволютата на геометричното място Q, което е търсената каустика, е също логаритмична спирала (зад. 15).

b) Ако изберем за координатни оси осите на хиперболата, знаем (зад. 32, § 15), че геометричното място на точката P има уравнение

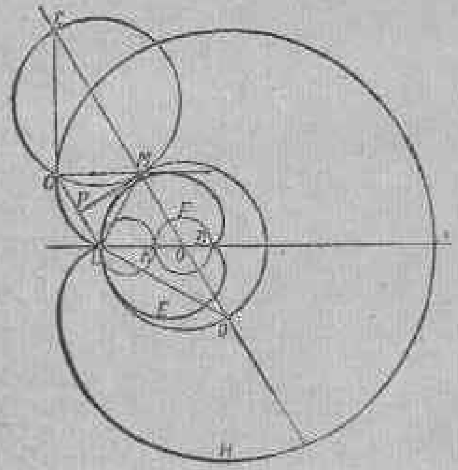
$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$$

и това на точката Q —

$$(x^2+y^2)^2=4a^2(x^2-y^2),$$

което представлява уравнението на една лемниската на Бернули. Обаче в зад. 17 се търси еволютата на тази крива, която ще представлява търсената каустика.

c) Най-напред ще покажем, че геометричното място на точката Q е една епициклоида. За тази цел от точката Q издигаме перпендикуляр QC на правата MQ. Продължаваме QC, докато пресече правата MO; също продължаваме MO до D (черт. 144). Двата правоъгълни



Черт. 144

триъгълника MQC и MLD са сходни, понеже $\widehat{QMC}=\widehat{LMD}$ и $\overline{MQ}=\overline{ML}$. Прочее $\overline{MC}=\overline{MD}$. Оттук следва, че ако прекараме една окръжност през трите точки M, Q и C, тя ще бъде равна на дадената и понеже $\overline{MQ}=\overline{ML}$, ясно е, че дъгите MQ и ML са равни. Следователно, ако търкаляме външно върху дадената окръжност една еднаква окръжност,

точката от тази окръжност, която съвпада най-напред с L, ще опише геометричното място Q, т. е. епициклоидата $LQAH$.

Знаем (зад. 14), че еволютата на епициклоидата е също една епициклоида. И така каустиката е една епициклоида.

Ако вземем $OB=OK=\frac{OL}{3}$ и опишем окръжности върху BK и KL като диаметри, то ако втората окръжност се търкаля върху първата, точката, която най-напред съвпада с L, ще опише епициклоидата LBE, т. е. търсената каустика.

24. От уравнението на окръжността чрез диференциране намираме за точката $\left(\frac{a}{4},\ \frac{a}{4}\right)$, че

$$y'=-1,\quad y''=\frac{4}{a},\quad y'''=-\frac{24}{a^2},\quad y^{IV}=\frac{288}{a^3}.$$

Също за параболата намираме

$$y'=-1,\quad y''=\frac{4}{a},\quad y'''=-\frac{24}{a^2},\quad y^{IV}=\frac{240}{a^3}.$$

Оттук следва, че кривите имат допиране от трети ред в точката $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$.

25. Уравненията на търсените параболи трябва да имат вида

а) $(y-\beta)^2=2p(x-\alpha)$ и **b)** $(x-u)^2=2q(y-v)$.

От уравнението на окръжността чрез диференциране получаваме за точката $(a,\ 2a)$, че

$$y'=-\frac{1}{2},\quad y''=-\frac{5}{8a}. \tag{1}$$

Също от уравнението **а)** на параболата намираме

$$y'=\frac{p}{2a-\beta},\quad y''=-\frac{p^2}{(2a-\beta)^3}. \tag{2}$$

Като сравним (1) и (2) и от уравнението на параболата получаваме

$$p=-\frac{1}{2}(2a-\beta),\quad 2a-\beta=\frac{2a}{5},\quad \frac{4a^2}{25}=2p(a-\alpha),$$

отгдето

$$\alpha=\frac{8}{5}a,\quad p=\frac{a}{5},\quad \beta=\frac{8}{5}a.$$

Следователно уравнението на едната парабола е

$$\left(y-\frac{8}{5}a\right)^2=\frac{2}{5}a\left(\frac{7}{5}a-x\right).$$

По същия начин намираме, че уравнението на втората парабола е

$$\left(x-\frac{a}{5}\right)^2=\frac{16}{5}\,a\left(\frac{11}{5}\,a-y\right).$$

26. $(x-a\pi)^2-6a(2a-y)=0$.

27. $1^\circ.\ bx^2-2a^2(b-y)=0$,

$2^\circ.\ ay^2-2b^2(a-x)=0$.

28. $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a}{3}\left(y-\frac{a}{4}\right)$.

29. Като диференцираме три пъти уравнението на оскулачната окръжност

(1) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2,$$

намираме

(2) $$(x-\alpha)+(y-\beta)\,y'=0,$$

(3) $$1+y'^2+(y-\beta)\,y''=0,$$

(4) $$3y'y''+(y-\beta)\,y'''=0.$$

От уравненията (3) и (4) елиминираме $y-\beta$ и получаваме

(5) $$3y'y''^2-(1+y'^2)\,y'''=0,$$

което е условието, за да съществува максимум или минимум на радиуса на кривината

$$R=\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Обратно, от уравнението (3) и (5) получаваме равенството (4)

30. $y=0,\quad x=\pm a;\quad x=0,\quad y=\pm b$.

31. Нека вземем за координатни оси тангентата и нормалата на кривата в дадената точка. Тогава общото уравнение на елипсите, които тангират в началото дадената крива, е

(1) $$ax^2+2bxy+cy^2+2dy=0.$$

В началото на координатната система y'' и y''' за елипсите и за дадената крива имат едни и същи стойности, съответно m и n. Диференцираме 3 пъти уравнението (1) и като положим

$$x=0,\quad y=0,\quad y'=0,$$

получаваме

$$a+d\,m=0,\quad 3bm+dn=0,$$

отгдето

(2) $$\frac{b}{a}=\frac{n}{3m^2}.$$

Уравненията, които дават центровете на тези елипси, са

$$ax+by=0,$$
$$bx+cy+d=0.$$

Ако в първото от тези уравнения заместим $\frac{b}{a}$ със съответната стойност, дадена от (2), получаваме уравнението на геометричното място на търсените центрове:

$$y+\frac{3m^2}{n}\,x=0,$$

което представлява една права.

32. $x^2+y^2+\frac{y}{m}=0$.

33. Да изберем за координатни оси тангентата и нормалата в дадената точка на кривата. Тогава за началото имаме

$$y=0,\quad y'=0,\quad y''=\frac{1}{R}.$$

В тази точка на параболите също трябва да имаме

$$y=0,\quad y'=0,\quad y''=\frac{1}{R}.$$

Ако α е ъгълът, който оста на една от тези параболи сключва с Ox, нейното уравнение е от вида

$$(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2=2ay.$$

Като диференцираме това уравнение 2 пъти и положим после

$$x=y=y'=0,\quad y''=\frac{1}{R},$$

намираме

$$a=R\sin^2\alpha.$$

Прочее общото уравнение на търсените параболи е

(1) $$(y\cos\alpha-x\sin\alpha)^2=2R\sin^2\alpha\,.\,y,$$

което зависи от параметъра α.

От (1) лесно се вижда, че координатите на фокусите на тези параболи са

$$\xi=-\frac{R}{2}\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\eta=\frac{R}{2}\sin^2\alpha.$$

Като елиминираме τ, получаваме

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{R}{2}\eta = 0.$$

Това уравнение представлява една окръжност, която допира дадената крива в началото.

34. Нека O и O_1 са съответните центрове на оскулачните окръжности в две близки точки M и M_1 от кривата. Отсечката $OM = R$, която е радиус на оскулачната окръжност в точката M, е по-малка от $O_1M_1 = R_1$ — радиус на оскулачната окръжност в точка M_1, защото $\overline{O_1M_1} = OM + \widehat{OO_1}$, гдето $\widehat{OO_1}$ е дъгата от еволютата на дадената крива.

Сега ще покажем, че оскулачната окръжност с център O_1 съдържа в себе си оскулачната окръжност с център O.

И наистина нека $R_1' = R_1$ е радиусът на оскулачната окръжност с център O_1, който минава през O. Тогава окръжността с център O и радиус

$$R' = R_1' - \overline{OO_1} \geq R_1 - \widehat{OO_1} = R$$

очевидно ще се съдържа в оскулачната окръжност в M_1 и освен това съдържа в себе си и оскулачната окръжност в M.

§ 19. Пространствени криви

Основни формули и указания

А. Уравнения на крива

1) Пресечница на две повърхнини

(1) $$F(x, y, z) = 0, \quad \Phi(x, y, z) = 0.$$

2) Параметричен вид: скаларен

(2) $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t);$$

векторен

(2а) $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\,\boldsymbol{i} + y(t)\,\boldsymbol{j} + z(t)\,\boldsymbol{k},$$

гдето t е произволен параметър, в частност $t = x, y, z$.

3) Параметричен вид: скаларен

(3) $$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = z(s);$$

векторен

(3а) $$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s) = x(s)\,\boldsymbol{i} + y(s)\,\boldsymbol{j} + z(s)\,\boldsymbol{k},$$

гдето s е дължината на дъгата от една дадена точка P_0 до една текуща точка P.

4) Дъгов елемент

$$ds = |d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

В. Естествен триедър

Тангенциален вектор

$$\boldsymbol{t} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} : \left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right| = \alpha\boldsymbol{i} + \beta\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{k}, \quad |\boldsymbol{t}| = 1,$$

където α, β, γ са косинус-директорите на $\boldsymbol{t}$.

Уравнение на тангентата

Скаларен вид

$$\frac{\xi - x}{x'} = \frac{\eta - y}{y'} = \frac{\zeta - z}{z'},$$

ако кривата е дадена с (2) или (3), или

$$\begin{cases} (\xi - x)\dfrac{\partial F}{\partial x} + (\eta - y)\dfrac{\partial F}{\partial y} + (\zeta - z)\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0, \\ (\xi - x)\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + (\eta - y)\dfrac{\partial \Phi}{\partial y} + (\zeta - z)\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

ако кривата е дадена с (1);

векторен вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},$$

гдето $\boldsymbol{R}$ е текущ радиус-вектор.

Нормален вектор

$$\boldsymbol{n} = \frac{d\boldsymbol{t}}{ds} : \left|\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\right| = R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \alpha_1\boldsymbol{i} + \beta_1\boldsymbol{j} + \gamma_1\boldsymbol{k},$$

гдето $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ са косинус-директорите на $\boldsymbol{n}$.

Уравнение на главната нормала

Скаларен вид

$$\frac{\xi - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ m & n \end{vmatrix}} = \frac{\eta - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ n & l \end{vmatrix}} = \frac{\zeta - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ l & m \end{vmatrix}}, \qquad \begin{cases} l = y'z'' - y''z' \\ m = z'x'' - x'z'' \\ n = x'y'' - x''y'; \end{cases}$$

векторен вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right),$$

гдето $\boldsymbol{R}$ е текущ радиус-вектор.

Бинормален вектор

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n} = R\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \alpha_2\boldsymbol{i}+\beta_2\boldsymbol{j}+\gamma_2\boldsymbol{k},$$

гдето α_2, β_2, γ_2 са косинус-директорите на $\boldsymbol{b}$.

Уравнение на бинормалата

Скаларен вид

$$\frac{\xi-x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}} = \frac{\eta-y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}} = \frac{\zeta-z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}};$$

векторен вид

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} + \lambda\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right),$$

гдето $\boldsymbol{R}$ е текущ радиус-вектор.

Уравнение на нормалната равнина

Скаларен вид

$$(\xi-x)x' + (\eta-y)y' + (\zeta-z)z' = 0,$$

ако кривата е дадена с (2) или (3), или

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0, \text{ ако кривата е дадена с (1);}$$

векторен вид

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}' = 0.$$

Уравнение на оскулачната равнина

Скаларен вид

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0;$$

векторен вид

$$[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}''] = 0.$$

Уравнение на ректификуемата равнина

Скаларен вид

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ x' & y' & z' \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{cases} l = y'z''-y''z'', \\ m = z'x''-x'z'', \\ n = x'y''-x''y', \end{cases}$$

или

$$(\xi-x)\frac{d^2x}{ds^2} + (\eta-y)\frac{d^2y}{ds^2} + (\zeta-z)\frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

векторен вид

$$\left[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}),\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\right] = 0 \quad \text{или} \quad (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0.$$

C. Формула на Frenet

Скаларен вид

(I) $$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha_1}{R}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\beta_1}{R}, \quad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\gamma_1}{R};$$

(II) $$\frac{d\alpha_2}{ds} = -\frac{\alpha_1}{T}, \quad \frac{d\beta_2}{ds} = -\frac{\beta_1}{T}, \quad \frac{d\gamma_2}{ds} = -\frac{\gamma_1}{T};$$

(III) $$\frac{d\alpha_1}{ds} = -\frac{\alpha}{R} + \frac{\alpha_2}{T}, \quad \frac{d\beta_1}{ds} = -\frac{\beta}{R} + \frac{\beta_2}{T}, \quad \frac{d\gamma_1}{ds} = -\frac{\gamma}{R} + \frac{\gamma_2}{T};$$

векторен вид

(I) $$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{R}\boldsymbol{n};$$

(II) $$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\boldsymbol{n};$$

(III) $$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{R}\boldsymbol{t} + \frac{1}{T}\boldsymbol{b},$$

гдето R е радиусът на кривината, а T — радиусът на торсията. При $\frac{1}{T} > 0$ имаме дясно ориентиране на естествения триедър, а при $\frac{1}{T} < 0$ — ляво ориентиране.

Ако кривата е дадена с (2),

$$R^2=\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2=\frac{\left|\frac{dr}{dt}\right|^6}{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2}=\frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^6}{l^2+m^2+n^2},$$

$$T^2=\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2=\frac{1}{R^4\left(\frac{dr}{ds}\frac{d^2r}{ds^2}\frac{d^3r}{ds^3}\right)^2}=\frac{\Delta^2}{(l^2+m^2+n^2)^2},$$

където $d\sigma$ е контингентният ъгъл, а $d\tau$ — торсионният,

$$\Delta=\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \qquad \begin{cases} l=y'z''-y''z', \\ m=z'x''-z''x', \\ n=x'y''-x''y'. \end{cases}$$

Ако кривата е дадена с (3),

$$R^2=\frac{1}{\left|\frac{d^2r}{ds^2}\right|^2}=\frac{1}{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

1. $\dfrac{\xi-x}{2y}=\dfrac{\eta-y}{a-2x}=\dfrac{\zeta-z}{-\dfrac{ay}{z}}.$

2. $\begin{cases} \dfrac{x\xi}{a^2}+\dfrac{y\eta}{b^2}=\dfrac{1}{2}, \\ \zeta=\dfrac{c}{\sqrt{2}}. \end{cases}$

3. Уравненията на тангентата са

$$\frac{\xi-x}{y}=\frac{\eta-y}{z-x}=\frac{\zeta-z}{-y}.$$

Ако означим с α, β, γ ъглите, които образува тангентата с координатните оси, и положим

$$\cos\alpha=k,\quad \cos\beta=k\frac{z-x}{y},\quad \cos\gamma=-k,$$

получаваме, че

$$k=\pm\frac{y}{a}.$$

Следователно координатите на търсените точки удовлетворяват уравнението

$$y=\mp a\cos\gamma.$$

4. $\begin{cases} x\xi+y\eta=a^2, \\ y\eta+z\zeta=b^2 \end{cases}$ — тангента.

$\dfrac{\eta}{y}+\dfrac{\zeta}{z}+\dfrac{\xi}{x}=1$ — нормална равнина.

$b^2x^3\xi-a^2z^3\zeta+(a^2-b^2)y^3\eta=a^2b^2(a^2-b^2)$ — оскулачна равнина.

5. $\dfrac{x(\xi-x)}{a^2(b^2-c^2)}=\dfrac{y(\eta-y)}{b^2(c^2-a^2)}=\dfrac{z(\zeta-z)}{c^2(a^2-b^2)}$ — тангента.

$a^2(b^2-c^2)\dfrac{\xi-x}{x}+b^2(c^2-a^2)\dfrac{\eta-y}{y}+c^2(a^2-b^2)\dfrac{\zeta-z}{z}=0$

— нормална равнина.

6. $\dfrac{(\xi-x)x}{a}=\dfrac{(\eta-y)y}{b}=\dfrac{\zeta-z}{1}$ — тангента.

$a\dfrac{\xi}{x}+b\dfrac{\eta}{y}+\zeta-z=a+b$ — нормална равнина.

$\eta=\dfrac{bx}{ay}\xi$ — оскулачна равнина.

$R=\dfrac{(a+b+2z)^{\frac{3}{2}}}{(a+b)^{\frac{1}{2}}}$ — радиус на кривината.

7. $(\xi-x)=\dfrac{a}{x}(\eta-y)=2a^2\dfrac{\zeta-z}{x^2}$ — тангента.

$\dfrac{y\xi}{a}-\dfrac{x\eta}{a}+\zeta=\dfrac{x^3}{6a^2}$ — оскулачна равнина.

$R=T=\dfrac{(y+a)^2}{a}$ — радиус на кривината и на торсията.

8. а) Диференцираме уравнението на витловата линия:

(1) $$dr=(-a\sin t\,\boldsymbol{i}+a\cos t\,\boldsymbol{j}+b\boldsymbol{k})\,dt,$$

откъдето

(2) $$ds=|dr|=\sqrt{a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\,dt.$$

Като разделим (1) с (2), получаваме тангенциалния вектор

(3) $$t=\frac{dr}{ds}=-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,i+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,j+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}k.$$

Косинус от ъгъла γ, който сключва тангентата с оста z, е точно коефициентът пред k:

$$\cos\gamma=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

което показва, че γ е постоянен.

b) Диференцираме (3) и разделяме получения резултат с ds:

(4) $$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{R}n=\frac{\left(-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t\,i-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\,j\right)dt}{\sqrt{a^2+b^2}\,dt}$$

$$=\frac{a}{a^2+b^2}(-\cos t\,i-\sin t\,j).$$

Оттук следва, че

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2[(-\cos t)^2+(-\sin t)^2]=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2},$$

или

$$R=\frac{a^2+b^2}{a}=\text{const.}$$

От уравнението (4) и като се вземе пред вид R, следва, че нормалният вектор е

(5) $$n=-\cos t\,i-\sin t\,j.$$

c) Като вземем пред вид (3) и (5), намираме

$$b=t\times n=-\frac{a\cos^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}}(j\times i)-\frac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}(k\times i)$$

$$+\frac{a\sin^2 t}{\sqrt{a^2+b^2}}(i\times j)-\frac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}(k\times j)=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin t\,i-b\cos t\,j+ak),$$

отгдето чрез диференциране получаваме

$$\frac{db}{ds}=\frac{db}{dt}:\frac{ds}{dt}=-\frac{1}{T}n=\frac{b}{a^2+b^2}(\cos t\,i+\sin t\,j)=-\frac{b}{a^2+b^2}n,$$

което показва, че радиусът на торсията е постоянен:

$$T=\frac{a^2+b^2}{b}.$$

d) Уравнението на центъра на кривината е

$$R=r+Rn=a\cos t\,i+a\sin t\,j+ct\,k+\frac{a^2+b^2}{a}(-\cos t\,i-\sin t\,j),$$

или

$$R=-\frac{b^2}{a}\cos t\,i-\frac{b^2}{a}\sin t\,j+ct\,k,$$

което представлява също витлова линия.

9. Проекцията на кривата върху равнината (xy) е параболата

$$r=\sin t\,i+\frac{1}{2}\sin^2 t\,j$$

или чрез елиминация на t

$$y=\frac{x^2}{2}.$$

Следователно дадената пространствена крива лежи на параболичния цилиндър $y=\frac{x^2}{2}$, образувателните на който са успоредни на оста z. При растенето на t една точка от кривата се движи върху цилиндъра по такъв начин, че нейната проекция върху равнината (xy) се колебае между точките $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ и $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ от основата на цилиндъра, докато координатата z постоянно расте.

Имаме

$$\frac{dr}{dt}=\cos t\,i+\sin t\cos t\,j+\sin^2 t\,k,$$

отгдето $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=1$. Това показва, че параметърът t има значение на дъгата s. Оттук следва, че ако t означава времето, кривата се описва с постоянна скорост единица.

Като диференцираме още два пъти горното равенство, добиваме

$$r''=-\sin t\,i+\cos 2t\,j+\sin 2t\,k,$$

$$r'''=-\cos t\,i-2\sin 2t\,j+2\cos 2t\,k.$$

Следователно радиусът на кривината е

$$R=\frac{1}{|r''|}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 t}},$$

а радиусът на торсията

$$T=\frac{1}{R(r'r''r''')}=\frac{2+\sin^2 t}{1+\sin^2 t}\cos t.$$

Радиусът на кривината R е най-голям ($R=1$) в точките на оста z ($t=k\pi$, $k=0, 1, 2,\ldots$), а най-малък $\left(R=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в точките, които се намират най-отдалечено от оста z $\left(t=k\frac{\pi}{2},\ k=1, 3, 5,\ldots\right)$. В последните точки торсията $\frac{1}{T}=0$, а в първите тя се мени между $+2$ и -2, т. е. кривата се променя от декстрозна в синистрозна.

В точките от кривата, които лежат на оста z ($t=k\pi$, $k=0, 1, 2,\ldots$), тангенциалният вектор сменя последователно положителната и отрицателната посока:

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{r}'=\pm\boldsymbol{i}.$$

Нормалният вектор има в тези точки посоката на оста y:

$$\boldsymbol{n}=R\boldsymbol{r}''=\boldsymbol{j}.$$

Бинормалният вектор

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\pm\boldsymbol{k}$$

сменя последователно положителната и отрицателната посока; в тези точки оскулачната равнина на кривата е хоризонтална.

В най-отдалечените точки на кривата отдясно и отляво

$$\left(t=k\frac{\pi}{2},\ k=1, 3, 5,\ldots\right)$$

тангенциалният вектор стои отвесно и насочен нагоре:

$$\boldsymbol{t}=\boldsymbol{k}.$$

Нормалният вектор

$$\boldsymbol{n}=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\quad-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

в тези точки мени последователно посоката си от ъглополовящата на първия в тази на втория квадрат и обратно; същото е и за бинормалния вектор:

$$\boldsymbol{b}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}\mp\boldsymbol{j}.$$

Оскулачните равнини във външните точки са перпендикулярни на равнината (xy):

$$\xi-\eta=\frac{1}{2}\ \text{(дясна) и}\ \xi+\eta=\frac{1}{2}\ \text{(лява)}.$$

10. Дадената крива лежи върху кръговия цилиндър

$$x^2+y^2=1.$$

Обаче нейната проекция върху равнината (xy) не покрива цялата основна окръжност, а само половината — от $t=0$ до $t=\pi$, понеже за $t>\pi$ функцията $\operatorname{tg}\frac{t}{2}$ е отрицателна и следователно z е имагинерно. Когато проекцията на точката от кривата описва основната окръжност от $t=0$ до $t=\pi$, то z расте от $-\infty$ до $+\infty$. Проекцията на кривата върху равнината (yz) е

$$\boldsymbol{r}=\sin t\,\boldsymbol{j}+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\boldsymbol{k},$$

или като положим

$$u=\operatorname{tg}\frac{t}{2},$$

$$\boldsymbol{r}=\frac{2u}{1+u^2}\boldsymbol{j}+\ln u\,\boldsymbol{k}.$$

Като елиминираме u от последното равенство, получаваме

$$y=\frac{1}{\operatorname{ch} z}.$$

Сега ще изследваме кривата в точката $t=\frac{\pi}{2}$, т. е. в точката (0, 1, 0). За тази цел намираме

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\sin t\,\boldsymbol{i}+\cos t\,\boldsymbol{j}+\frac{1}{\sin t}\boldsymbol{k},$$

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\cos t\,\boldsymbol{i}-\sin t\,\boldsymbol{j}-\frac{\cos t}{\sin^2 t}\boldsymbol{k},$$

$$\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=\sin\quad\boldsymbol{i}-\cos t\,\boldsymbol{j}+\frac{1+\cos^2 t}{\sin^3 t}\boldsymbol{k}.$$

За точката $t=\frac{\pi}{2}$ имаме

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},\quad\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\boldsymbol{j},\quad\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k},$$

отгдето

$$\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=\sqrt{2},\quad\left|\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right|=1,\quad\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=0,\quad\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d^3\boldsymbol{r}}{dt^3}=0.$$

Оттук намираме радиусите на кривината и на торсията:

$$R=\frac{\left|\frac{dr}{dt}\right|^3}{\sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2-\left(\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2;$$

$$T=\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}^2}=\frac{1+1}{1+1}=1.$$

За единичните вектори на естествения триедър получаваме

$$\boldsymbol{t}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}:\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{n}=R\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}=-\boldsymbol{j},$$

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)(-\boldsymbol{j})=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}.$$

За точка $t=\frac{\pi}{4}$ имаме:

оскулачната равнина

$$\left(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r},\ \frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)=\begin{vmatrix} \xi & \eta-1 & \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\xi+\ =0$$

нормалната равнина

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=[\xi\boldsymbol{i}+(\eta-1)\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k}](-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})=-\xi+\zeta=0;$$

ректификуемата равнина

$$\left[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r}),\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\ \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\right)\right]=\begin{vmatrix} \xi & \eta-1 & \zeta \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2(\eta-1)=0.$$

Оскулачната и нормалната равнина са симетрични спрямо равнината $(\xi\,\eta)$ и сключват с нея 45^0, а ректификуемата равнина е перпендикулярна на оста η.

11. Нека равнината на кривата е

(1) $$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0.$$

Уравнението на оскулачната равнина е

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & \zeta-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}=0,$$

което, като използуваме свойствата на детерминантите, добива вида

$$\begin{vmatrix} \xi-x & \eta-y & A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z) \\ x' & y' & Ax'+By'+Cz' \\ x'' & y'' & Ax''+By''+Cz'' \end{vmatrix}=0.$$

Понеже

$$Ax'+By'+Cz'=0 \text{ и } Ax''+By''+Cz''=0,$$

то

$$A(\xi-x)+B(\eta-y)+C(\zeta-z)=0$$

и като вземем под внимание

$$Ax+By+Cz=-D,$$

получаваме

$$A\xi+B\eta+C\zeta+D=0,$$

което е идентично с уравнението (1).

При това доказателство предполагаме, че

$$x'y''-x''y'$$

е отлично от нула, защото в противен случай бихме имали

$$\frac{x''}{x'}=\frac{y''}{y'},$$

или

$$y'=ax',$$

което чрез непосредствено интегриране се обръща в

$$y=ax+b,$$

гдето a и b са постоянни величини. Обаче този случай не може да съществува, ако $C\gtrless 0$, понеже кривата ще се обърне в права.

За да докажем сега обратното твърдение, полагаме

$$
\begin{aligned}
y'z'' - z'y'' &= \lambda A,\\
z'x'' - x'z'' &= \lambda B,\\
x'y'' - y'x'' &= \lambda C,
\end{aligned}
$$

гдето A, B и C са постоянни. Тогава получаваме

$$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

отгдето

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

к. т. д. д.

12. Без ограничение на общността можем да предположим, че в дадената точка

$$\varphi = 0.$$

Тогава cos-те от ъглите, образувани от тангентата на кривата в тази точка с координатните оси, са пропорционални съответно на

$$0,\ 1,\ m.$$

Следователно уравнението на правата, успоредна на тази тангента, е

$$\xi = x,\quad \eta - y = \frac{\zeta - z}{m},$$

или като вземем пред вид уравненията на витловата линия

$$x = a\cos\varphi,\quad y = a\sin\varphi,\quad z = am\varphi,$$

получаваме за координати на прободa следните изрази:

$$\xi = a\cos\varphi,\quad \eta = a\sin\varphi - a\varphi.$$

Като положим сега

$$\xi = a - Y \quad\text{и}\quad \eta = -X,$$

получаваме, че търсеното геометрично място е

$$
\begin{cases}
X = a(\varphi - \sin\varphi),\\
Y = a(1 - \cos\varphi),
\end{cases}
$$

което е една циклоида.

13. Координатите на точката M_1 са

$$
\begin{cases}
x_1 = x + R\alpha',\\
y_1 = y + R\beta',\\
z_1 = z + R\gamma',
\end{cases}
$$

гдето α', β', γ' са косинус-директорите на главната нормала и R — радиусът на кривината на C.

Като диференцираме (1), получаваме

$$
\begin{aligned}
dx_1 &= dx + R\,d\alpha' + \alpha'\,dR,\\
dy_1 &= dy + R\,d\beta' + \beta'\,dR,\\
dz_1 &= dz + R\,d\gamma' + \gamma'\,dR
\end{aligned}
$$

или по-добре, като заместим $d\alpha'$, $d\beta'$, $d\gamma'$ посредством формулите на Frenet с

$$
\begin{aligned}
&\alpha''\,d\tau - \alpha\,d\sigma,\\
&\beta''\,d\tau - \beta\,d\sigma,\\
&\gamma''\,d\tau - \gamma\,d\sigma,
\end{aligned}
$$

намираме

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 ds_1 &= \alpha''\,R\,d\tau + \alpha' dR,\\
\beta_1 ds_1 &= \beta''\,R\,d\tau + \beta' dR,\\
\gamma_1 ds_1 &= \gamma''\,R\,d\tau + \gamma' dR,
\end{aligned}
$$

гдето α_1, β_1, γ_1 са косинус-директорите на тангентата на C_1 и ds_1 — диференциалният елемент на дъгата на C_1.

Оттук следва

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1 = 0, \tag{2}$$

$$\alpha'\alpha_1 + \beta'\beta_1 + \gamma'\gamma_1 = \frac{dR}{ds_1}, \tag{3}$$

$$\alpha''\alpha_1 + \beta''\beta_1 + \gamma''\gamma_1 = \frac{R\,d\tau}{ds_1}. \tag{4}$$

Прочее

$$ds_1^2 = dR^2 + R^2\,d\tau^2.$$

Уравненията (2), (3) и (4) показват, че тангентата на геометричното място на центъра на кривината е в нормалната равнина на дадената крива и сключва с главната нормала в точката M ъгъл, тангенсът на който е $\dfrac{R\,d\tau}{dR}$. Този ъгъл е равен на нула само за равнинни криви.

14. Пресечните точки на кривата с равнината са

$$M_1(1,\ 1,\ 1),\quad M_2(-1,\ 1,\ -1),\quad M_3(2,\ 4,\ 8).$$

Оскулачната равнина на една крива е

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + C(\zeta - z) = 0,$$

гдето

$$
\begin{aligned}
A &= dy\,d^2z - d^2y\,dz,\\
B &= dz\,d^2x - d^2z\,dx,\\
C &= dx\,d^2y - d^2x\,dy.
\end{aligned}
$$

Обаче

$$dx = dt, \quad dy = 2t dt, \quad dz = 3t^2\, dt;$$

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 2dt^2, \quad d^2z = 6t dt^2;$$

тогава

$$A = 6t^2\, dt^3, \quad B = -6t dt^3, \quad C = 2dt^3.$$

Следователно трите оскулачни равнини са

$$3\xi - 3\eta + \zeta - 1 = 0,$$

$$3\xi + 3\eta + \zeta + 1 = 0,$$

$$12\xi - 6\eta + \zeta - 8 = 0.$$

Те се пресичат в точката $M\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -2\right)$, която удовлетворява уравнението на равнината.

15. Имаме

$$y'z'' - z'y'' = 0, \quad z'x'' - x'z'' = 0, \quad x'y'' - y'x'' = 0.$$

Чрез непосредствено интегриране на първите две равенства получаваме

$$\frac{y'}{z'} = c_1, \quad \frac{x'}{z'} = c_2.$$

Като интегрираме още един път, намираме

$$\begin{cases} y = c_1 z + c_3, \\ x = c_2 z + c_4, \end{cases}$$

което представлява една права.

16. От формулите на Frenet следват релациите

$$\frac{d\alpha'}{ds} = 0, \quad \frac{d\beta'}{ds} = 0, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = 0,$$

отгдето

$$\alpha' = c_1, \quad \beta' = c_2, \quad \gamma' = c_3.$$

Следователно имаме

$$\alpha' dx + \beta' dy + \gamma'\, dz = c_1 dx + c_2 dy + c_3 dz = 0,$$

т. е.

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = c_4.$$

17. Излизаме от формулите в една естествена координатна система:

$$x = s - \frac{s^3}{6R^2} + \ldots,$$

$$y = \frac{s^2}{2R} - \frac{s^3}{6R^2}\frac{dR}{ds} + \ldots,$$

$$z = -\frac{s^3}{6RT}.$$

Тогава

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 = s^2 - \frac{s^4}{3R^2} + \frac{s^4}{4R^2} + \ldots$$

Обаче

$$d^2 - s^2 = (d + s)(d - s) = -\frac{s^4}{12R^2} + \ldots$$

и понеже $d + s = 2s + \varepsilon_1$, то

$$s - d = \frac{s^3}{24R^2} + \ldots$$

18. Служим си с естествената координатна система. Понеже за ос x избираме едната тангента, то търсената ос ще бъде разстоянието от началото на координатната система до проекцията на другата тангента върху равнината yOz. И така търсената ос δ ще се даде от формулата

$$\delta = \frac{zy' - yz'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}} = \frac{zy' - yz'}{\sqrt{1 - x'^2}} = \frac{s^3}{12RT}.$$

Ясно е, че за стационарните точки $\left(\frac{1}{T} = 0\right)$ δ ще бъде от 4-ти ред спрямо s.

19. Ако $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'$ са съответно косинус-директорите на тангентата и главната нормала и като вземем пред вид, че

$$\alpha = f', \qquad \beta = \varphi', \qquad \gamma = \psi';$$

$$\alpha' = f''R, \quad \beta' = \varphi''R, \quad \gamma' = \psi''R,$$

то от релацията

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$$

получаваме

$$f'f'' + \varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0.$$

От самата дефиниция на R следва

$$f''^2+\varphi''^2+\psi''^2=\frac{1}{R^2}.$$

Чрез диференциране на (2) получаваме (3).

Ако положим

$$\varphi'\psi''-\psi'\varphi''=\frac{A}{ds^3},$$

$$\psi'f''-f'\psi''=\frac{B}{ds^3},$$

$$f'\varphi''-\varphi'f''=\frac{C}{ds^3},$$

получаваме

$$\triangle=\frac{Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z}{ds^6}=\frac{Ad^3x+Bd^3y+Cd^3z}{(A^2+B^2+C^2)R^2}=-\frac{1}{T}\frac{1}{R^2}.$$

Обаче

$$f'''^2+\varphi'''^2+\psi'''^2=\left[\frac{d\left(\frac{\alpha'}{R}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{\beta'}{R}\right)}{ds}\right]^2+\left[\frac{d\left(\frac{\gamma'}{R}\right)}{ds}\right]^2$$

и като вземем пред вид, че

$$\frac{d\alpha'}{ds}=-\frac{\alpha}{R}+\frac{\alpha''}{T},$$

$$\frac{d\beta'}{ds}=-\frac{\beta}{R}+\frac{\beta''}{T},$$

$$\frac{d\gamma'}{ds}=-\frac{\gamma}{R}+\frac{\gamma''}{T},$$

получаваме

$$f'''^2+\varphi'''^2+\psi'''^2=\frac{1}{R^2T^2}+\frac{1+R'^2}{R^4}.$$

Този резултат може да се получи от (3) чрез диференциране.

20. Радиусите на кривината и торсията са съответно

$$R=\frac{(1+18z^2)^2}{6},$$

$$T=\frac{(1+18z^2)^2}{6}.$$

Тяхното отношение е равно на единица, което показва, че кривата е витлова линия и лежи на цилиндъра

$$(y-z)^2=\frac{x}{3}(3x-1)^2.$$

21. Ако вземем x като независима променлива, косинус-директорите на тангентата се дават от

$$\frac{\alpha}{x'}=\frac{\beta}{y'}=\frac{\gamma}{z'}=\frac{1}{\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}=\frac{1}{1+2x},$$

отгдето

$$\alpha=\frac{1}{1+2x},\ \beta=\frac{2x}{1+2x},\ \gamma=\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{1+2x}.$$

Като предположим, че дъгата s на кривата се смята от началото на координатната система и вземем пред вид, че

$$s'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}=1+2x,$$

имаме $s=x+x^2$.

Върху тангентата в точката M нанасяме в една посока отсечката $r=c-s$, където c е произволна постоянна величина. Тогава координатите на другия край на тази отсечка са

$$\begin{cases}\xi=x+r\alpha=x+\dfrac{c-x-x^2}{1+2x},\\[2mm] \eta=y+r\beta=x^2+2x\dfrac{c-x-x^2}{1+2x},\\[2mm] \zeta=z+r\gamma=\dfrac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\dfrac{c-x-x^2}{1+2x},\end{cases}$$

което представлява параметричните уравнения на еволвентите. Лесно е да се покаже, че тези еволвенти лежат в равнините

$$\xi+\eta=c.$$

22. 1°. Вземаме за координатна система триедъра, образуван от тангентата, главната нормала и бинормалата. Нека означим с x, y, z координатите на точката M', с s — дъгата MM', с α, β, γ — косинус-директорите на тангентата в M' и с α', β', γ' — косинус-директорите на главната нормала. Главната нормала в точката M' е

$$\frac{\xi-x}{\alpha'}=\frac{\eta-y}{\beta'}=\frac{\zeta-z}{\gamma'}.$$

Най-късото разстояние между оста n (главната нормала в M) в тази равнина е равно на разстоянието от M до проекцията

$$\frac{\xi-x}{\alpha'}=\frac{\zeta-z}{\gamma'}$$

върху равнината Mtb. Това разстояние е

$$\delta=\frac{\alpha' z-\gamma' x}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}.$$

От формулите на Frenet имаме

$$\alpha'=R\frac{d\alpha}{ds}=R\frac{d^2x}{ds^2},$$

$$\gamma'=R\frac{d^2z}{ds^2}.$$

Като се възползуваме от формулите

$$x=s-\frac{s^3}{6R^2}+\ldots,$$

$$y=\frac{s^2}{2R}+\ldots,$$

$$z=-\frac{s^3}{6RT}+\ldots,$$

получаваме

$$\delta\approx\frac{\left(-\frac{s}{R^2}\right)\left(-\frac{s^3}{6RT}\right)-\left(-\frac{s}{RT}\right)s}{\sqrt{\frac{s^2}{R^4}+\frac{s^2}{R^2T^2}}}\approx\frac{Rs}{\sqrt{R^2+T^2}}.^{*}$$

Това разстояние е от ред, по-висок от първи, само ако или $R=0$ (точка на възвръщането), или $R=\infty$ (инфлексна точка), или $T=\infty$. Равнинните криви са единствените, които реализират последното условие за всички свои точки. Тогава δ е точно нула. Ако за всички точки на една линия $R=\infty$, тази линия е права: главната нормала е неопределена.

2°. Търсената пресечна точка е прободът на главната нормала в M' и равнината, прекарана през Mn перпендикулярно на

$$\frac{\xi-x}{\alpha'}=\frac{\zeta-z}{\gamma'}.$$

* Знакът $\approx$ е знак на приближение, когато се пренебрегват членовете от по-висок ред.

Тази равнина е

(1) $$\alpha'\xi+\gamma'\zeta=0.$$

Като пишем

$$\frac{\xi-x}{\alpha'}=\frac{\eta-y}{\beta'}=\frac{\zeta-z}{\gamma'}=\lambda$$

и като заместим

$$\xi=x+\lambda\alpha',\quad \zeta=z+\lambda\gamma'$$

в (1), получаваме

$$\lambda=-\frac{\alpha' x+\gamma' z}{\alpha'^2+\gamma'^2}\quad\text{и}\quad \eta-y=-\beta'\frac{\alpha' x+\gamma' z}{\alpha'^2+\gamma'^2}.$$

Прочее търсеното гранично положение е на разстояние

$$d=\frac{\alpha' x+\gamma' z}{\alpha'^2+\gamma'^2}$$

от M, понеже $\beta'\approx 1$. Като вземем пред вид, че

$$\alpha'=R\frac{d^2x}{ds^2}\approx-\frac{s}{R^2},\quad x\approx s,$$

$$\gamma'=R\frac{d^2z}{ds^2}\approx-\frac{s}{RT},\quad z\approx-\frac{s^3}{6RT},$$

получаваме

$$d\approx\frac{\frac{s^2}{R^2}}{s^2\left(\frac{1}{R^4}+\frac{1}{R^2T^2}\right)}=\frac{R^2T^2}{R^2+T^2}.$$

23. При $\boldsymbol{n}=\text{const}$ третата формула на Frenet дава

$$-\frac{1}{R}\boldsymbol{t}+\frac{1}{T}\boldsymbol{b}=0.$$

Понеже векторите $\boldsymbol{t}$ и $\boldsymbol{b}$ не са колинеарни, то $\frac{1}{R}=\frac{1}{T}=0$, което показва, че линията е права, а това се изключва от разглеждането, тъй като нормалният вектор е неопределен.

25. Ако исканият вектор $\boldsymbol{x}$ съществува, то съгласно формулите на Frenet той трябва да удоволетворява уравненията

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{t}=\frac{1}{R}\boldsymbol{n},\quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{n}=-\frac{1}{R}\boldsymbol{t}+\frac{1}{T}\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{x}\times\boldsymbol{b}=-\frac{1}{T}\boldsymbol{n}.$$

Умножаваме тези равенства съответно с $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{t}$ и намираме

$$(\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{t}\,\boldsymbol{n}) = \frac{1}{R}, \quad (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{b}) = \frac{1}{T}, \quad (\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{t}) = 0,$$

или

$$\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} = \frac{1}{R}, \quad \boldsymbol{x}\boldsymbol{t} = \frac{1}{T}, \quad \boldsymbol{x}\boldsymbol{n} = 0.$$

Тези стойности представляват проекциите на вектора $\boldsymbol{x}$ върху естествената координатна система. Следователно единственото възможно изразяване е

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}\boldsymbol{t})\,\boldsymbol{t} + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} + (\boldsymbol{x}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{b},$$

или

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{T}\boldsymbol{t} + \frac{1}{R}\boldsymbol{b}.$$

Обратно, чрез заместване на вектора $\boldsymbol{x}$ се убеждаваме, че той удовлетворява дадените уравнения.

27. *Условието е необходимо*: Ако съществува постоянен единичен вектор $\boldsymbol{a}$, така че $\boldsymbol{a}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \text{const}$, то

$$\boldsymbol{a}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0, \quad \boldsymbol{a}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = 0, \quad \boldsymbol{a}\frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4} = 0.$$

Оттук следва, че векторите $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}, \frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}$ са компланарни.

Условието е достатъчно: Ако $\left(\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}, \frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}, \frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4}\right) = 0$, то съществува единичен вектор $\boldsymbol{N}(s)$, така че

$$\boldsymbol{N}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0, \quad \boldsymbol{N}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = 0, \quad \boldsymbol{N}\frac{d^4\boldsymbol{r}}{ds^4} = 0.$$

Диференцираме първото равенство и изваждаме второто, след това диференцираме второто и изваждаме третото и намираме

$$\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{N}}{ds}\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} = 0.$$

Да предположим, че $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ и $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$ не са колинеарни; тогава векторът $\frac{d\boldsymbol{N}}{ds}$, ако той е $\neq 0$, трябва да бъде перпендикулярен към равнината на $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ и $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3}$, т. е. колинеарен с $\boldsymbol{N}$, което е възможно, тъй като $\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} \perp \boldsymbol{N}$ $(\boldsymbol{N}^2 = 1)$. Понеже $\frac{d\boldsymbol{N}}{ds} = 0$, $\boldsymbol{N} = \text{const}$, то първото равенство може да се напише във вида $\frac{d\left(\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\right)}{ds} = 0$, отгдето $\boldsymbol{N}\frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = \text{const}$, т. е. $\left(\widehat{\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}\,\boldsymbol{N}}\right) = \text{const}$ при $\boldsymbol{N} = \text{const}$. Остава да се разгледа случаят, когато $\frac{d^3\boldsymbol{r}}{ds^3} \parallel \frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$, но това означава, че $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2}$ има постоянна посока: $\frac{d^2\boldsymbol{r}}{ds^2} = \varphi''(s)\,\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a} = \text{const}$. Оттук

$$\boldsymbol{r} = \varphi(s)\,\boldsymbol{a} + s\,\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c},$$

което ни убеждава, че имаме равнинна крива, която, разбира се, сключва постоянен ъгъл (90°) с нормалата на равнината.

§ 20. Координатни линии на повърхнина и на пространството. Координатни повърхнини. Линеен, лицев и обемен елемент

Основни указания

Уравнение на повърхнина

в явен вид

$$z = f(x, y),$$

в неявен вид

$$F(x, y, z) = 0.$$

Аналитично представяне на повърхнина

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v) = x(u, v)\,\boldsymbol{i} + y(u, v)\,\boldsymbol{j} + z(u, v)\,\boldsymbol{k},$$

гдето u и v са линейните координати на повърхнината.

Аналитично представяне на пространството

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v, w) = x(u, v, w)\,\boldsymbol{i} + y(u, v, w)\,\boldsymbol{j} + z(u, v, w)\,\boldsymbol{k},$$

гдето u, v и w са линейните координати на пространството.

Линеен елемент ds

$$ds^2 = |d\boldsymbol{r}|^2 = (\boldsymbol{r}_u\,du + \boldsymbol{r}_v\,dv)^2 = \boldsymbol{r}_u^2\,du^2 + 2\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v\,du\,dv + \boldsymbol{r}_v^2\,dv^2$$
$$= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

гдето

$$E = \boldsymbol{r}_u^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \boldsymbol{r}_v^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Ъгъл между координатните линии

$$\cos\alpha = \frac{F}{\sqrt{EG}},\quad \sin\alpha = \sqrt{\frac{EG-F^2}{EG}}.$$

Лицев вектор $d\mathbf{o}$

$$d\mathbf{o} = (d_u\mathbf{r}\times d_v\mathbf{r}) = (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv.$$

Лицев елемент do

$$do = |d\mathbf{o}| = |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|\,du\,dv = \sqrt{EG-F^2}\,du\,dv.$$

Обемен елемент $d\tau$

$$d\tau = (d_u\mathbf{r}, d_v\mathbf{r}, d_w\mathbf{r}) = (\mathbf{r}_u\mathbf{r}_v\mathbf{r}_w)\,du\,dv\,dw$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}.$$

1. Уравнението представлява централна полусфера, намираща се над равнината (xy), което се проверява, като заместим $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = \sqrt{a^2-u^2}$ в израза $x^2+y^2+z^2$:

$$x^2+y^2+z^2 = (u\cos v)^2 + (v\sin v)^2 + (\sqrt{a^2-u^2})^2 = a^2.$$

u-линиите са четвърт окръжности, които лежат в равнините, минаващи през оста z:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v = \text{const},\quad x^2+y^2+z^2 = a^2.$$

v-линиите са окръжности, успоредни на равнината (xy):

$$x^2+y^2 = u^2 = \text{const},\quad z = \sqrt{a^2-u^2} = \text{const}.$$

Следователно координатните равнини представляват мрежа от меридиани и паралели.

Чрез диференциране намираме

$$\mathbf{r}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} - \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = -u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j},$$

$$E = \mathbf{r}_u^2 = \left(\cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} - \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{k}\right)\left(\cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} - \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{k}\right)$$

$$= 1 + \frac{u^2}{a^2-u^2} = \frac{a^2}{a^2-u^2},$$

$$F = \mathbf{r}_u\mathbf{r}_v = \left(\cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} - \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{k}\right)(-u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}) = 0,$$

$$G = \mathbf{r}_v^2 = (-u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j})(-u\sin v\,\mathbf{i} + u\cos v\,\mathbf{j}) = u^2.$$

$F = 0$ показва, че координатните линии са ортогонални.

Следователно линейният елемент, лицевият вектор и лицевият елемент са съответно

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \sqrt{\frac{a^2}{a^2-u^2}\,du^2 + v^2\,dv^2},$$

$$d\mathbf{o} = (\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)\,du\,dv = \left(\frac{u^2\cos v}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{i} + \frac{u^2\sin v}{\sqrt{a^2-u^2}}\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k}\right)du\,dv,$$

$$do = \frac{au}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du\,dv.$$

2. u-линиите са прави, пресичащи оста z и успоредни на равнината (xy):

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} v = \text{const},\quad z = cv = \text{const}.$$

v-линиите са витлови линии:

$$\mathbf{r} = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} + cv\,\mathbf{k} \quad (u = \text{const}).$$

Витловият конус произлиза от равномерното въртене на прав ъгъл около едното му рамо, като същевременно този ъгъл се премества по посока на това рамо. Елиминацията на u и v дава декартовото уравнение на повърхнината

$$z = c\operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

За линейния елемент, лицевия вектор и лицевия елемент имаме съответно

$$ds = \sqrt{du^2 + (u^2+c^2)\,dv^2},$$

$$d\mathbf{o} = (c\sin v\,\mathbf{i} - c\cos v\,\mathbf{j} + u\,\mathbf{k})\,du\,dv,$$

$$do = \sqrt{u^2+c^2}\,du\,dv.$$

Тук $F = 0$, което показва, че образувателните прави и витловите линии са взаимно ортогонални.

3. u-линиите са правите

$$\frac{y}{x}=\operatorname{tg} v=\text{const},\quad z=cv=\text{const}.$$

v-линиите са конични витлови линии, лежащи върху ротационния конус

$$x^2+y^2=\frac{u^2}{c^2}z^2\qquad (u=\text{const}).$$

Линейният елемент, лицевият вектор и лицевият елемент са съответно

$$ds=\sqrt{u^2du^2+2u\,du\,dv+(u^2+c^2+1)\,dv^2},$$

$$d\boldsymbol{o}=(cu\sin v\,\boldsymbol{i}+cu\cos v\,\boldsymbol{j}+u\boldsymbol{k})\,du\,dv,$$

$$do=\sqrt{1+c^2}\,u\,du\,dv.$$

4. u означава разстоянието на една точка от повърхнината до оста z, v — ъгъла на равнината на меридиана с равнината (xz) (географската дължина) и $z=f(u)$ — уравнението на меридианната крива в равнината zOu.

u-линиите са меридианните криви, а v-линиите са паралелите, перпендикулярни на оста z. Уравнението в декартови координати е

$$z=f(x,y).$$

Тук

$$ds^2=[1+f'^2(u)]\,du^2+u^2dv^2,$$

$$d\boldsymbol{o}=[-uf'(u)(\cos v\,\boldsymbol{i}+\sin v\,\boldsymbol{j})+u\boldsymbol{k}]\,du\,dv,$$

$$do=u\sqrt{1+f'^2(u)}\,du\,dv.$$

5. Уравнението представлява една равнина в общо положение. u-линиите са прави, успоредни на вектора $\boldsymbol{a}$; v-линиите са прави, успоредни на вектор $\boldsymbol{b}$.

Тук имаме

$$\boldsymbol{r}_u=\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}_v=\boldsymbol{b},\ E=\boldsymbol{a}^2,\ F=\boldsymbol{ab},\ G=\boldsymbol{b},$$

$$ds^2=\boldsymbol{a}^2du^2+2\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,du\,dv+\boldsymbol{b}^2dv^2,$$

$$d\boldsymbol{o}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\,du\,dv,$$

$$do=\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b})^2}\,du\,dv,$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2-(\boldsymbol{ab})^2}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}.$$

6. u-линиите са прави, които пресичат ортогонално оста z; v-линиите са цилиндрични, лежащи на цилиндъра

$$x^2+y^2=u^2=\text{const}.$$

Тук

$$ds^2=[\varphi'^2(v)+u^2]\,dv^2+du^2,$$

$$do=\sqrt{\varphi'^2(v)+u^2}\,du\,dv.$$

7. x-линиите са пресечниците на повърхнината $z=f(x,y)$ с равнините $y=\text{const}$; y-линиите са пресечниците на повърхнината с равнините $x=\text{const}$.

Тук

$$\boldsymbol{r}_x=\boldsymbol{i}+p\,\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}_y=\boldsymbol{j}+q\,\boldsymbol{k}\ \left(p=\frac{\partial f}{\partial x},\ q=\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

$$E=1+p^2,\ F=pq,\ G=1+q^2,$$

$$ds^2=(1+p^2)\,dx^2+2\,pq\,dx\,dy+(1+q^2)\,dy^2,$$

$$d\boldsymbol{o}=(\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_y)\,dx\,dy=(-p\,\boldsymbol{i}-q\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\,dx\,dy,$$

$$do=\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy.$$

8. $r=\text{const}$ са коаксиални цилиндри* с ос оста z; $\theta=\text{const}$ са сноп равнини, които минават през оста z; $z=\text{const}$ са равнини, перпендикулярни на оста z. Пространството се разделя на криволинейни паралелепипеди.

Чрез диференциране намираме

$$\boldsymbol{r}_r=\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{r}_\theta=-r\sin\theta\,\boldsymbol{i}+r\cos\theta\,\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{r}_z=\boldsymbol{k},$$

отгдето

$$d\tau=\begin{vmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}dr\,d\theta\,dz=r\,dr\,d\theta\,dz.$$

9. $r=\text{const}$, $\lambda=\text{const}$, $\theta=\text{const}$ са съответно концентрични сфери, коаксиални конуси и сноп равнини с ос оста z. Пространството се разделя с тези повърхнини на криволинейни паралелепипеди.

Тук имаме

$$\boldsymbol{r}_r=\sin\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{j}+\cos\lambda\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_\lambda=r\cos\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\cos\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{j}-r\sin\lambda\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=-r\sin\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{j}.$$

$$d\tau=\begin{vmatrix}\sin\lambda\cos\theta & \sin\lambda\sin\theta & \cos\lambda\\ r\cos\lambda\cos\theta & r\cos\lambda\sin\theta & -r\sin\lambda\\ -r\sin\lambda\sin\theta & r\sin\lambda\cos\theta & 0\end{vmatrix}dr\,d\lambda\,d\theta=r^2\sin\lambda\,dr\,d\lambda\,d\theta.$$

* Цилиндри с една и съща ос се наричат коаксиални.

10. $u = \mathrm{const}$ са координатните повърхнини, успоредни на векторите $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$; $v = \mathrm{const}$ са координатните повърхнини, успоредни на векторите $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$; $w = \mathrm{const}$ са координатните повърхнини, успоредни на векторите $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Пространството се разделя от координатните равнини в праволинейни паралелепипеди.

Тук

$$\boldsymbol{r}_u = \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{r}_w = \boldsymbol{c},$$

$$d\tau = (\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{c})\,du\,dv\,dw.$$

11. Уравненията на мрежата координатни повърхнини са

$$x^2 + y^2 = u^2,\ \ y = x\,\mathrm{tg}\,v,\ \ z = c\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} + w \qquad \left(c = \frac{h}{2\pi}\right),$$

отгдето

$$x = u\cos v,\ \ y = u\sin v,\ \ z = cv + w.$$

Следователно аналитичният израз на представяне на пространството е

$$\boldsymbol{r} = u\cos v\,\boldsymbol{i} + u\sin v\,\boldsymbol{j} + (cv + w)\,\boldsymbol{k}.$$

Обемният елемент е

$$d\tau = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 0 \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}\,du\,dv\,dw = u\,du\,dv\,dw,$$

който не зависи от h.

12. Снопът равнини, фамилиите конуси и витлови конуси имат съответно уравнения

$$y = ux,$$

$$x^2 + y^2 = v^2 z^2,$$

$$z - w = c\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} \qquad \left(c = \frac{h}{2\pi}\right),$$

отгдето

$$\boldsymbol{r} = \frac{v\,(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)}{\sqrt{1+u^2}}\,\boldsymbol{i} + \frac{u\,v\,(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)}{\sqrt{1+u^2}}\,\boldsymbol{j} + (w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)\,\boldsymbol{k}.$$

Ако положим $\sqrt{1+u^2} = U$, имаме

$$d\tau = \begin{vmatrix} \frac{v}{U^3}[c - u(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)] & \frac{v}{U^3}(w + cu - c\,\mathrm{arc\,tg}\,u) & \frac{c}{U^2} \\ \frac{1}{U}(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u) & \frac{u}{U}(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u) & 0 \\ \frac{v}{U} & \frac{uv}{U} & 1 \end{vmatrix}\,du\,dv\,dw$$

$$= \frac{w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u}{U^3}\begin{vmatrix} \frac{v}{U}[c - u(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)] & \frac{v}{U}(w + cu - c\,\mathrm{arc\,tg}\,u) & c \\ 1 & u & 0 \\ \frac{v}{U} & \frac{uv}{U} & 1 \end{vmatrix}\,du\,dv\,dw.$$

$$= -\frac{(w + c\,\mathrm{arc\,tg}\,u)^2\,v}{1+u^2}\,du\,dv\,dw.$$

13. Снопът равнини и фамилията коаксиални цилиндри имат съответно следните уравнения:

(1) $$y = x\,\mathrm{tg}\,v,$$

(2) $$x^2 + y^2 = u^2.$$

Равнините секат цилиндрите в прави, които са успоредни на оста z, а параболоидите — в параболи. Цилиндрите секат параболоидите в кръгове. От (1) и (2) следва $x = u\cos v$, $y = u\sin v$. Като заместим тези изрази в уравнението на параболоида, получаваме $z = w(1 + u^2)$. Следователно

$$d\tau = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v & 2uw \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1+u^2 \end{vmatrix}\,du\,dv\,dw = u(1+u^2)\,du\,dv\,dw.$$

14. $$\boldsymbol{r} = \frac{uw}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\boldsymbol{i} + \frac{vw}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\boldsymbol{j} + \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2}}\,\boldsymbol{k},$$

$$d\tau = -\frac{u^2}{(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}}\,du\,dv\,dw.$$

15. $$\boldsymbol{r} = \sin w\sqrt{2uv - v^2}\,\boldsymbol{i} + \cos w\sqrt{2uv - v^2}\,\boldsymbol{j} + v\,\boldsymbol{k},$$

$$d\tau = v\,du\,dv\,dw.$$

16. Чрез решаване на трите уравнения по x, y, z получаваме

$$x = \frac{1}{2v}\left(w^2 + \frac{u^2}{w^2}\right),\ \ y = \frac{1}{2}\left(w + \frac{u}{w}\right),\ \ z = \frac{1}{2}\left(w - \frac{u}{w}\right),$$

отгдето

$$d\tau = -\frac{w^2 + u^2}{4u^2w^3}\,du\,dv\,dw.$$

Точката $(4, -1, 5)$ има линейни координати $u = -24$, $v = 6{,}5$, $w = 4$.

17. Имаме

$$x=2w\sqrt{u^2+uv},\quad y=2w\sqrt{uv+v^2},\quad z=4w^2(u+v),$$

$$d\tau=8w^3\frac{(u+v)^2}{\sqrt{uv}}\,du\,dv\,dw.$$

Точката $(3, -4, -6)$ има линейни координати

$$u=-\frac{3}{2},\quad v=-\frac{8}{3},\quad w=\pm\frac{3}{5}.$$

18. Имаме

$$\frac{\partial x}{\partial u}=-\frac{(\alpha-v)(\alpha-w)}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)x},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{(\alpha-w)(\alpha-u)}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial w}=-\frac{(\alpha-u)(\alpha-v)}{2(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)x},\qquad \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{(\beta-v)(\beta-w)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{(\beta-w)(\beta-u)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)y},\qquad \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{(\beta-u)(\beta-v)}{2(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{(\gamma-v)(\gamma-w)}{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=-\frac{(\gamma-w)(\gamma-u)}{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial w}=-\frac{(\gamma-u)(\gamma-v)}{2(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)z}.$$

Като положим

$$\varphi(t)=(\alpha-t)(\beta-t)(\gamma-t),$$

то

$$r_u^2=\Sigma x_u^2=\frac{(u-v)(u-w)}{4\varphi(u)},$$

$$r_v^2=\Sigma x_v^2=\frac{(v-w)(v-u)}{4\varphi(v)},$$

$$r_w^2=\Sigma x_w^2=\frac{(w-u)(w-v)}{4\varphi(w)},$$

отгдето

$$ds^2=\frac{(u-v)(v-w)(w-u)}{4}\left(\frac{du^2}{\varphi(u)(w-v)}+\frac{dv^2}{\varphi(v)(u-w)}+\frac{dw^2}{\varphi(w)(v-u)}\right).$$

Също

$$d\tau=\frac{1}{8xyz(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2}$$

$$\times\begin{vmatrix}(\alpha-v)(\alpha-w) & (\beta-v)(\beta-w) & (\gamma-v)(\gamma-w)\\ (\alpha-w)(\alpha-u) & (\beta-w)(\beta-u) & (\gamma-w)(\gamma-u)\\ (\alpha-u)(\alpha-v) & (\beta-u)(\beta-v) & (\gamma-u)(\gamma-v)\end{vmatrix}du\,dv\,dw$$

$$=\frac{(u-v)(v-w)(w-u)}{8\sqrt{-\varphi(u)\varphi(v)\varphi(w)}}\,du\,dv\,dw.$$

19. Отначало вместо u вземаме за параметър радиуса ρ на паралела. Тогава имаме

$$\boldsymbol{r}=c\operatorname{arc\,ch}\frac{\rho}{c}\boldsymbol{i}+\rho\cos v\,\boldsymbol{j}+\rho\sin v\,\boldsymbol{k},$$

отгдето

$$ds^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-c^2}d\rho^2+\rho^2dv^2.$$

За меридиана $v=\text{const}$ дължината на дъгата е

$$u=\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\sqrt{\rho^2-c^2}+C.$$

Следователно

$$ds=du^2+(u^2+c^2)\,dv^2,$$

което доказва твърдението на задачата.

§ 21. Повърхнини. Допирателна равнина, нормала, главни радиуси на кривината, омбилици

Основни формули

Уравнение на допирателна равнина на повърхнина

Скаларен вид

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y)\ \text{ при }\ z=f(x,y)\left(p=\frac{\partial z}{\partial x},\ q=\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\eta-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\zeta-z)=0\ \text{ при }\ F(x,y,z)=0,$$

$$\begin{vmatrix}\xi-x & \eta-y & \zeta-z\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}=0\ \text{ при }\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),\\ z=z(u,v);\end{cases}$$

векторен вид

$$[(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}_u\,\boldsymbol{r}_v]=0\ \text{ или }\ (\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})\boldsymbol{N}=0$$

$$\text{при }\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u,v)=x(u,v)\boldsymbol{i}+y(u,v)\boldsymbol{j}+z(u,v)\boldsymbol{k},$$

където $\boldsymbol{N}=\dfrac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$ — нормален вектор на повърхнината. Тук ξ, η, ζ и $\boldsymbol{R}$ са съответно текущите координати и радиус-векторът на допирателната равнина.

Уравнение на нормала на повърхнина

Скаларен вид

$$\frac{\xi-x}{p}=\frac{\eta-y}{q}=\frac{\zeta-z}{-1}\quad \text{при}\quad z=f(x, y),$$

$$\frac{\xi-x}{\frac{\partial F}{\partial x}}=\frac{\eta-y}{\frac{\partial F}{\partial y}}=\frac{\zeta-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}\quad \text{при}\quad F(x, y, z)=0$$

$$\frac{\xi-x}{\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\eta-y}{\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v}\end{vmatrix}}=\frac{\zeta-z}{\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}}\quad \text{при}\quad \begin{cases}x=x(u, v),\\ y=y(u, v),\\ z=z(u, v);\end{cases}$$

векторен вид

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v),\ \text{или}\ \boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}+\lambda\boldsymbol{N}$$

при $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}$.

Формула на Meusnier:

$$\frac{\cos\theta}{R}=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2},$$

където

$$E=\boldsymbol{r}_u^2,\quad F=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v,\quad G=\boldsymbol{r}_v^2,$$

$$L=\frac{(\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad M=\frac{(\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}},\quad N=\frac{(\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}.$$

Уравнение на главните радиуси на кривината

$$(rt-s^2)R^2-\sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)t+(1+q^2)r-2pqs]R+(1+p^2+q^2)^2=0$$

при

$$z=f(x, y)\quad\left(r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y},\ t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$$

$$(LN-M^2)R^2-(EN-2FM+GL)R+EG-F^2=0$$

при

$$\boldsymbol{r}=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}.$$

Средна кривина

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{EN-2FM+GL}{EG-F^2}.$$

Gauss'ова кривина

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}.$$

Уравнение на омбиличните точки

$$\frac{r}{1+p^2}=\frac{s}{pq}=\frac{t}{1+q^2}\quad \text{при}\quad z=f(x, y).$$

$$\frac{E}{L}=\frac{F}{M}=\frac{G}{N}\quad \text{при}\quad \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)=x(u, v)\boldsymbol{i}+y(u, v)\boldsymbol{j}+z(u, v)\boldsymbol{k}.$$

1. Имаме

$$\boldsymbol{r}_\lambda=\cos\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\cos\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{j}-\sin\lambda\,\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}_\theta=-\sin\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{j},$$

отгдето

$$\boldsymbol{r}_\lambda\times\boldsymbol{r}_\theta=\sin^2\lambda\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin^2\lambda\sin\theta\,\boldsymbol{j}+\sin\lambda\cos\lambda\,\boldsymbol{k}.$$

Тогава уравнението на допирателната равнина е

$$(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}_\lambda\times\boldsymbol{r}_\theta)\equiv(\xi-x)\sin\lambda\cos\theta+(\eta-y)\sin\lambda\sin\theta+(\zeta-z)\cos\lambda=0,$$

а на нормалата —

$$\frac{\xi-x}{\sin\lambda\cos\theta}=\frac{\eta-y}{\sin\lambda\sin\theta}=\frac{\zeta-z}{\cos\lambda}.$$

2. Имаме

$$\frac{\partial F}{\partial x}=2x(z^2-r^2),\quad \frac{\partial F}{\partial y}=2a^2y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=2x^2z,$$

отгдето уравненията на допирателната равнина и на нормалата са съответно

$$x(z^2-r^2)\xi+a^2y\eta+x^2z\zeta=x^2z^2$$

$$\frac{\xi-x}{x(z^2-r^2)}=\frac{\eta-y}{a^2y}=\frac{\zeta-z}{x^2z}$$

3. $a^{\frac{1}{2}}(x^2+y^2)(\zeta-z)+2z^{\frac{1}{2}}(y\xi-x\eta)=0$ — допирателна равнина,

$$\frac{\xi-x}{2y\sqrt{z}}=\frac{\eta-y}{-2x\sqrt{z}}=\frac{\zeta-z}{\sqrt{a}\,(x^2+y^2)}\quad\text{— нормала.}$$

4. $3x-3y+z-4=0$.

5. $x+y+z-3=0$.

6. Уравнението на допирателната равнина е

$$(a^2-z^2)x\xi-b^2y\eta-x^2z\zeta+x^2z^2=0.$$

Като го решим с уравнението на повърхнината

$$(a^2-\zeta^2)\xi^2-b^2\eta^2=0$$

и вземем пред вид, че

$$(a^2-z^2)\,x^2-b^2y^2=0,$$

получаваме уравнението на проекцията на пресечницата върху (xz):

$$(z-\zeta)\,\{(a^2-z^2)\,[\xi^2(z+\zeta)-2xz\xi]-x^2z^2(z-\zeta)\}=0.$$

Това уравнение показва, че пресечницата се цепи на една права и една крива от трета степен.

7. Уравнението на допирателната равнина е

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1. \tag{2}$$

Уравненията на перпендикулярите, спуснати от началото към допирателните равнини, са

$$\frac{\xi}{\dfrac{x}{a^2}}=\frac{\eta}{\dfrac{y}{b^2}}=\frac{\zeta}{\dfrac{z}{c^2}}. \tag{3}$$

За да определим x, y, z от уравненията (2) и (3), написваме уравненията (3), като вземем пред вид (1), във вида

$$\frac{a\xi}{\dfrac{x}{a}}=\frac{b\eta}{\dfrac{y}{b}}=\frac{c\zeta}{\dfrac{z}{c}}=\frac{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2}}{1}.$$

От тези уравнения определяме $\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}, \dfrac{z}{c}$ и ги заместваме в (1). Така получаваме уравнението на подножицата

$$(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2=a^2\xi^2+b^2\eta^2+c^2\zeta^2,$$

която се нарича *повърхнина на еластицитета.*

8. Нормалният вектор е

$$N=\frac{r_u\times r_v}{|r_u\times r_v|}=\frac{c\sin v\,i-c\cos v\,j+u\,k}{\sqrt{c^2+u^2}},$$

а уравнението на допирателната равнина —

$$c\sin v\,\xi-c\cos v\,\eta+u\,\zeta=cuv.$$

Търсеното разстояние е

$$\delta=\frac{cuv}{\sqrt{c^2+u^2}}.$$

9. $\dfrac{r^4}{\sqrt{a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2}}$, където $r^2=x^2+y^2+z^2$.

11. $z\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{k^2+x^2+y^2}}$.

12. Уравнението на допирателната равнина е

$$x\xi+y\eta-c\zeta=c(z-2c).$$

По условие трябва

$$z-2c=0.$$

Като заместим стойността на c от това уравнение в уравнението на повърхнината, получаваме търсеното геометрично място

$$2(x^2+y^2)=z^2.$$

13. В уравнението на допирателната равнина

$$(\xi-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(\eta-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(\zeta-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

заместваме ξ, η, ζ с a, b, c и получаваме

$$(a-x)\frac{\partial f}{\partial x}+(b-y)\frac{\partial f}{\partial y}+(c-z)\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{1}$$

Уравнението на конуса ще получим, като елиминираме x, y, z от (1) и уравненията

$$f(x, y, z)=0, \tag{2}$$

$$\frac{\xi-a}{x-a}=\frac{\eta-b}{y-b}=\frac{\zeta-c}{z-c}=t. \tag{3}$$

Тази елиминация извършваме, като определим x, y, z от (3) и ги заместваме в (1) и (2):

$$F(t)=f[a+t(\xi-a),\ b+t(\eta-b),\ c+t(\zeta-c)]=0,$$

$$F'(t)=0,$$

а след това от тези две уравнения елиминираме t и получаваме уравнението на конуса.

За сферата този конус е

$$\eta^2+\zeta^2+(\xi-a)^2=0.$$

14. Понеже уравнението на допирателната равнина е

$$\eta-y+[m\varphi'(x-mz)-n](\zeta-z)-\varphi'(x-mz)(\xi-x)=0,$$

то тази равнина е успоредна на дадената права, тъй като

$$-m\varphi'(x-mz)+n+m\varphi'(x-mz)-n=0.$$

15. Уравненията на допирателните равнини към трите повърхнини са съответно

$$\frac{x}{p^2}\xi+\frac{y}{p^2-h^2}\eta+\frac{z}{p^2-k^2}\zeta=1, \tag{4}$$

$$\frac{x}{q^2}\xi+\frac{y}{q^2-h^2}\eta+\frac{z}{q^2-k^2}\zeta=1, \tag{5}$$

$$\frac{x}{r^2}\xi+\frac{y}{r^2-h^2}\eta+\frac{z}{r^2-k^2}\zeta=1. \tag{6}$$

Координатите на пресечницата на повърхнините (1) и (2) удовлетворяват уравнението

$$\frac{x^2}{p^2q^2}+\frac{y^2}{(p^2-h^2)(q^2-h^2)}+\frac{z^2}{(p^2-k^2)(q^2-k^2)}=0,$$

което показва, че равнините (4) и (5) са перпендикулярни.

По същия начин се доказва ортогоналността на (2) и (3) и на (1) и (3).

16. Уравнението на ротационната повърхнина, която има за ос на въртене оста z, е

$$x^2+y^2=f(z).$$

Уравнението на нормалата в точката (x, y, z) е

$$\frac{\xi-x}{2x}=\frac{\eta-y}{2y}=\frac{\zeta-z}{-f'(z)}.$$

Тази права пресича оста z в точката

$$\xi=0,\quad \eta=0,\quad \zeta=z+\frac{1}{2}f'(z).$$

Понеже координатите на тази точка зависят само от z, то тя е една и съща за всяка точка от паралела с апликата z.

Обратно, да предположим сега, че нормалите, прекарани към точките от повърхнината, които лежат в равнина, успоредна на дадена равнина, се пресичат в точки, които образуват права, перпендикулярна на равнините. Приемаме, че тази права е оста z, а повърхнината е

$$f(x, y, z)=0.$$

Тогава условието, че нормалата в точката (x, y, z) пресича оста z, е

$$\frac{x}{f'_x}=\frac{y}{f'_y}. \tag{1}$$

Ако z има постоянно значение z_0, то уравнението на повърхнината $f(x, y, z_0)=0$ дава от

$$f'_x+y'_x f'_y=0$$

и условието (1) може да се напише в следния вид:

$$x+yy'_x=0,$$

т. е. x^2+y^2 остава постоянно при $z=z_0$.

Прочее $x^2+y^2=C$, гдето C зависи от z_0, т. е. x^2+y^2 е функция на z, което може да се изрази с равенството

$$x^2+y^2=f(z).$$

Това уравнение представлява една ротационна повърхнина.

17. Нека уравненията на повърхнината и допирателната равнина са съответно

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\eta-y). \tag{2}$$

Уравненията на перпендикуляра, спуснат от началото към допирателната равнина, са

$$\frac{\xi}{p}=\frac{\eta}{q}=\frac{\zeta}{-1}. \tag{3}$$

От уравненията (2) и (3) получаваме

$$(\xi-x)\xi+(\eta-y)\eta+(\zeta-z)\zeta=0,$$

отгдето, като диференцираме, намираме

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz=(2\xi-x)\,d\xi+(2\eta-y)\,d\eta+(2\zeta-z)\,d\zeta.$$

Понеже координатите на средата на радиус-вектора са

$$\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ \frac{z}{2}$$

и като вземем пред вид (3), получаваме

$$\xi dx+\eta dy+\zeta dz=0,$$

което изразява изискването на задачата.

19. 1° и 2°. Нека x, y, z са координатите на една точка M от кривата C, която ще наречем управляваща крива, l, m, n — косинусдиректорите на образуващата, която минава през M. За една точка от кривата, близка до M, ще имаме аналогично величините

$$x+\Delta x,\quad y+\Delta y,\quad z+\Delta z,\quad l+\Delta l,\quad m+\Delta m,\quad n+\Delta n.$$

Косинус-директорите на оста между двете образуващи, сключващи помежду си ъгъл ν, са

$$\frac{m\Delta n - n\Delta m}{\sin\nu}, \quad \frac{n\Delta l - l\Delta n}{\sin\nu}, \quad \frac{l\Delta m - m\Delta l}{\sin\nu}$$

и най-късото разстояние е

$$\delta = \frac{\Delta x\,(m\,\Delta n - n\Delta m) + \Delta y\,(n\Delta l - l\Delta n) + \Delta z\,(l\Delta m - m\Delta l)}{\sin\nu}.$$

Тогава търсените граници са

$$\frac{m\,dn - n\,dm}{\nu}, \quad \frac{n\,dl - l\,dn}{\nu}, \quad \frac{l\,dm - m\,dl}{\nu},$$

$$\frac{\delta}{\nu} = \frac{(m\,dn - n\,dm)\,dx + (n\,dl - l\,dn)\,dy + (l\,dm - m\,dl)\,dz}{\nu^2},$$

гдето

$$\nu = \sqrt{dl^2 + dm^2 + dn^2}.$$

3°. Нека h е разстоянието на точката M до търсената точка M_1, координатите на която са x_1, y_1, z_1. Тогава

(1) $$x_1 - x = hl, \quad y_1 - y = hm, \quad z_1 - z = hn$$

и следователно

$$h = -\frac{dx\,dl + dy\,dm + dz\,dn}{\nu^2}.$$

Точката M_1, която това уравнение определи върху образуващата g, е наречена от Chasles *централна точка*. Геометричното място на централните точки се казва *стрикционна линия* на праволинейната повърхнина. На всяка централна точка отговаря една права и една равнина. Правата е граничното положение на оста на g и безкрайно близката ѝ образуваща и се нарича *централна права*. Равнината, която е наречена *централна равнина*, е тази, която съдържа централната права и g, и следователно уравнението ѝ е

$$(\xi - x_1)\,dl + (\eta - y_1)\,dm + (\zeta - z_1)\,dn = 0,$$

или като вземем пред вид (1),

$$(\xi - x)\,dl + (\eta - y)\,dm + (\zeta - z)\,dn = 0.$$

Ако $h = 0$, кривата C е самата стрикционна крива и се вижда, че централната равнина съдържа тангентата на тази крива. Тази равнина е прочее допирателна към праволинейната повърхнина във всяка точка от стрикционната линия.

20. Получаваме

$$\delta = \frac{\varepsilon}{\sin\nu}\left(\varepsilon P + \frac{\varepsilon^2}{2}\frac{dP}{ds} + \cdots\right),$$

където

$$\Delta s = \varepsilon \quad \text{и} \quad P = a(mn' - nm') + b(nl' - ln') + c(lm' - ml').$$

Като приравним P към нула, получаваме

(1) $$dx\,(m\,dn - n\,dm) + dy\,(n\,dl - l\,dn) + dz\,(l\,dm - m\,dl) = 0.$$

Това уравнение изразява, че за праволинейната повърхнина направлението, определено от

$$m\,dn - n\,dm, \quad n\,dl - l\,dn, \quad l\,dm - m\,dl,$$

което е перпендикулярно на образуващата, е също такова към образуващата крива в точката M, където тази крива пресича образуващата. Прочее това е също направлението на нормалата на повърхнината и понеже то не се отличава от граничното направление на оста на разгледаната образуваща и безкрайно близката ѝ образуваща, то не зависи от образуващата крива и остава същото по дължината на образуващата. Може лесно да се види, че това направление е перпендикулярно към всяка крива, начертана върху повърхнината в точката $P(\xi, \eta, \zeta)$, където тази крива пресича образуващата.

Наистина, като положим $MP = R$, имаме

$$\xi - x = Rl,$$
$$\eta - y = Rm,$$
$$\zeta - z = Rn.$$

Следователно

$$d\xi = dx + R\,dl + l\,dR,$$
$$d\eta = dy + R\,dm + m\,dR,$$
$$d\zeta = dz + R\,dn + n\,dR,$$

отгдето

$$d\xi\,(m\,dn - n\,dm) + d\eta\,(n\,dl - l\,dn) + d\zeta\,(l\,dm - m\,dl) = 0.$$

Уравнението (1) характеризира развиваемата повърхнина и я дефинира аналитически.

21. Ако вземем една точка $P(\xi, \eta, \zeta)$ върху образуващата, която минава през M, и означим с R разстоянието PM, имаме

$$d\xi - dx = R\,dl + l\,dR,$$
$$d\eta - dy = R\,dm + m\,dR,$$
$$d\zeta - dz = R\,dn + n\,dR.$$

Сега трябва да покажем, че можем да определим точката P по такъв начин, че величините $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ да бъдат пропорционални на l, m, n. Обаче направлението l, m, n е перпендикулярно на оста и също успоредно на централната равнина (зад. 19), на която косинус-директорите са

$$\frac{dl}{\nu},\quad \frac{dm}{\nu},\quad \frac{dn}{\nu}.$$

Тогава имаме

$$d\xi\,(m\,dn - n\,dm) + d\eta\,(n\,dl - l\,dn) + d\zeta\,(l\,dm - m\,dl) = 0$$

и

$$d\xi\,dl + d\eta\,dm + d\zeta\,dn = 0.$$

От зад. **20** знаем, че първото уравнение е удовлетворено, а второто уравнение ще бъде удовлетворено, ако

$$R = -\frac{dx\,dl + dy\,dm + dz\,dn}{dl^2 + dm^2 + dn^2}.$$

Този резултат доказва, че образуващите на повърхнината са тангенти на стрикционната линия, която се нарича ръб на възвръщането, когато повърхнината е развиваема.

Обратната задача е непосредствена.

22. Ако вземем ръба на възвръщането на образуваща крива на развиваемата повърхнина, тогава косинус-директорите l, m, n стават съответно равни на α, β, γ. Обаче бинормалата на ръба на възвръщането е перпендикулярна едновременно на направленията (α, β, γ) и $(d\alpha, d\beta, d\gamma)$. Понеже въз основа на равенствата

$$dx\,(m\,dn - n\,dm) + dy\,(n\,dl - l\,dn) + dz\,(l\,dm - m\,dl) = 0$$

и

$$dl\,(m\,dn - n\,dm) + dm\,(n\,dl - l\,dn) + dn\,(l\,dm - m\,dl) = 0$$

нормалата на повърхнината е също перпендикулярна на тези направления, то теоремата е доказана.

23. Като вземем пред вид, че за сферата

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta, \\ y = r\cos\varphi\sin\theta, \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

имаме

$$E = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 = r^2,$$

$$F = \sum\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial x}{\partial\theta} = 0,$$

$$G = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2 = r^2\cos^2\varphi,$$

то линейният елемент е

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = r^2\,d\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\,d\theta^2.$$

Понеже $F = 0$, координатните линии са ортогонални.

25. *Централни повърхнини.* — Достатъчно е да разгледаме елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Като приложим уравнението на главните радиуси на кривината

$$R^2(rt - s^2) - R(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}[(1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0,$$

намираме

$$D^4R^2 + (a^2 + b^2 + c^2 - x^2 - y^2 - z^2)D^2R + a^2b^2c^2 = 0,$$

където D представлява разстоянието от началото до допирателната равнина. Оттук заключаваме, че Gauss'овата кривина е една и съща за всички точки, допирателните на които са на равни разстояния от началото.

Параболоиди. — Уравнението на тези повърхнини е

$$\frac{y^2}{2a} + \frac{z^2}{2b} = x;$$

тогава имаме

$$R^2 + (a + b + 2x)\frac{x}{D}R + \frac{abx^2}{D^4} = 0,$$

където

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

26. $$R^2 - 2(x^2 + y^2 + z^2)\frac{r}{D} + \frac{27\,m^6}{D^4} = 0,$$

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

27. Като вземем пред вид, че

$$p = -\frac{c^2x}{a^2z},$$

$$q = -\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r = -\frac{c^4 (b^2 - y^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

$$s = -\frac{c^4 xy}{a^2 b^2 z^3},$$

$$t = -\frac{c^4 (a^2 - x^2)}{a^2 b^2 z^3},$$

още, че уравненията на омбилиците са

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

получаваме четири точки, дадени с координатите

$$y = 0, \quad x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

28. $y = 0, \quad x = \pm \frac{1}{2} [a(b-a)]^{\frac{1}{2}}, \quad z = \frac{b-a}{4}.$

29. $x = m, \quad y = m, \quad z = m.$

30. Като вземем пред вид, че

$$\boldsymbol{r}_\lambda = a(\cos\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\lambda \sin\theta\, \boldsymbol{j} - \sin\lambda\, \boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{r}_\theta = a(-\sin\lambda \sin\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{r}_{\lambda\lambda} = -a(\sin\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\lambda \sin\theta\, \boldsymbol{j} + \cos\lambda\, \boldsymbol{k}),$$

$$\boldsymbol{r}_{\lambda\theta} = a(-\sin\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{j}),$$

$$\boldsymbol{r}_{\theta\theta} = -a(\sin\lambda \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\lambda \sin\theta\, \boldsymbol{j}),$$

добиваме

$$E = \boldsymbol{r}_\lambda^2 = a^2, \quad F = \boldsymbol{r}_\lambda . \boldsymbol{r}_\theta = 0, \quad G = \boldsymbol{r}_\theta^2 = a^2 \sin^2\lambda;$$

$$L = \frac{(\boldsymbol{r}_{\lambda\lambda} \boldsymbol{r}_\lambda \boldsymbol{r}_\theta)}{\sqrt{EG - F^2}} = -a, \quad M = \frac{(\boldsymbol{r}_{\lambda\theta} \boldsymbol{r}_\lambda \boldsymbol{r}_\theta)}{\sqrt{EG - F^2}} = 0, \quad N = \frac{(\boldsymbol{r}_{\theta\theta} \boldsymbol{r}_\lambda \boldsymbol{r}_\theta)}{\sqrt{EG - F^2}} = -a \sin^2\lambda;$$

$$EG - F^2 = a^4 \sin^2\lambda, \quad LN - M^2 = a^2 \sin^2\lambda.$$

От зависимостта

$$\frac{E}{L} = \frac{F}{M} = \frac{G}{N} = -a,$$

следва, че всички точки на сферата са омбилици.

Средната и Gauss'овата кривина са съответно

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{2}{a},$$

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{a^2},$$

което показва, че във всички точки на сферата имаме една и съща средна и Gauss'ова кривина.

31. Имаме

$$E = 1 + y^2, \quad F = xy, \quad G = 1 + x^2,$$

$$L = 0, \quad M = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}, \quad N = 0,$$

отгдето

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{2FM}{EG - M^2} = -\frac{xy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{M^2}{EG - M^2} = -\frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}.$$

Повърхнината няма омбилични точки.

32 Като вземем точката M за начало на координатната система и допирателната равнина в M за равнина (xy), уравнението на повърхнината ще бъде

$$z = f(x, y) = ax^2 + 2b\,xy + cy^2 + \lambda x^3 + \mu x^2 y + \nu xy^2 + \rho y^3 + \alpha x^4 + \cdots \tag{1}$$

Пресичаме повърхнината с една равнина, която минава през x и сключва с равнината (xy) ъгъл θ. Понеже оста x е тангента в точката M, трябва да покажем, че можем да определим θ по един единствен начин, така че сечението на повърхнината с тази равнина да има в точката M допиране от 3-ти ред с неговата оскулачна окръжност. Уравнението на проекцията на това сечение върху (xy) е

$$y \operatorname{tg} \theta = f(x, y)$$

и понеже $y = Y \cos\theta$, гдето Y е пресечната права на равнината със (zy), уравнението на сечението в собствената му равнина е

$$Y \sin\theta = f(x, Y \cos\theta). \tag{2}$$

Един допирателен кръг към оста x в M ще има уравнение

$$x^2 + Y^2 - 2RY = 0. \tag{3}$$

За да намерим реда на допирането на тези криви, търсим колко от корените на уравнението за абсцисите на общите точки на (2) и (3) са нули. В околността на точката M уравнението (3) ни дава

$$(4)\qquad Y=R-\sqrt{R^2-x^2}=\frac{x^2}{2R}+\frac{x^4}{8R^3}+\frac{x^6}{16R^5}+\cdots$$

Като внесем сега тази стойност в (2), ще получим уравнението на абсцисите на общите точки. За да получим, че двете криви имат контакт от 2-ри, 3-ти или 4-ти ред, трябва съответно да се анулират коефициентите пред x^2, x^3, x^4.

Допиране от втори ред. Като анулираме коефициента пред x^2, намираме

$$(5)\qquad \frac{\sin\theta}{2R}=a,$$

което уравнение дава радиуса на кривината R на сечението на равнината и което изразява класическата теорема на Meusnier.

Допиране от трети ред. Като анулираме коефициента пред x^3, намираме

$$(6)\qquad \frac{b\cos\theta}{R}+\lambda=0,\quad \text{или}\quad 2b\cos\theta+\frac{\lambda\sin\theta}{a}=0.$$

Това уравнение дава само една стойност за $\operatorname{tg}\theta$ и следователно само една равнина минава през оста, което трябваше да покажем.

Допиране от четвърти ред. Като анулираме коефициента пред x^4, намираме

$$(7)\qquad \frac{\sin\theta}{8R^3}=\frac{c\cos^2\theta}{4R^2}+\frac{\mu\cos\theta}{2R}+\alpha.$$

Уравненията (5), (6) и (7) трябва да бъдат едновременно удовлетворени. Ако внесем стойността на R от (5) в (7), добиваме

$$\frac{a^3}{\sin^2\theta}=a^2c\operatorname{ctg}^2\theta+a\mu\operatorname{ctg}\theta+\alpha.$$

Като държим сметка за (6), което дава $\operatorname{ctg}\theta=-\frac{\lambda}{2ab}$, получаваме

$$a^3\frac{4a^2b^2+\lambda^2}{4a^2b^2}=a^2c\frac{\lambda^2}{4a^2b^2}-a\mu\frac{\lambda}{2ab}+\alpha,$$

или най-сетне

$$(8)\qquad a(4a^2b^2+\lambda^2)=c\lambda^2-2b\lambda\mu+4\alpha b^2.$$

Тази релация не може да бъде изобщо удовлетворена, ако Mx и My са произволни. Обаче тя може да бъде удовлетворена с нови значения a', $b'\ldots$, μ', α' на коефициентите, ако се вземат нови оси $M\xi$ и $M\eta$, определени с ъгъла $xO\xi=\varphi$. Формулите за смяна на координатите са

$$x=\xi\cos\varphi-\eta\sin\varphi,$$

$$y=\xi\sin\varphi+\eta\cos\varphi.$$

Като заместим тези стойности в (1), виждаме, че коефициентът пред $\xi^p\eta^q$ ще бъде един хомогенен полином от степен $p+q$ на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ и че релацията (8), написана за новите коефициенти a', b', …, μ', α', ще даде един член от десета степен на $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (членът на $a'^3b'^2$), а останалите членове ще бъдат от осма степен.

Прочее (8) може да се напише във вида

$$A\sin^{10}\varphi+B\sin^9\varphi\cos\varphi+\cdots+C\cos^{10}\varphi+D\sin^8\varphi+\cdots+E\cos^8\varphi=0,$$

или като разделим на $\cos^{10}\varphi$,

$$A\operatorname{tg}^{10}\varphi+B\operatorname{tg}^9\varphi+\cdots+C+\frac{D\operatorname{tg}^8\varphi+\cdots+E}{\cos^2\varphi}=0.$$

Като заместим $\frac{1}{\cos^2\varphi}$ с $1+\operatorname{tg}^2\varphi$, получаваме едно уравнение от десета степен на $\operatorname{tg}\varphi$. Прочее имаме изобщо десет кръга, които имат в M допиране от 4-ти ред с повърхнината. Ако коефициентите $a, b, c, \ldots$ варират по такъв начин, че $A+D$ да клони към нула, ед и корен на уравнението ще клони към безкрайност. На този корен отговаря стойността $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Прочее имаме десет направления, които отговарят на задачата.

Ако M е омбилик, имаме $a=c$, $b=0$ и също $a'=c'$, $b'=0$. Наистина тези условия изразяват, че индикатрисата в M е окръжност и следователно не зависи от ориентацията на осите $O\xi$ и $O\eta$. Тогава (8) става тъждество, т. е., ако M е омбилик, всеки кръг, който има в M допиране от 3-ти ред с повърхнината, трябва да има допиране и от 4-ти ред. Прочее (6) дава $\theta=0$. Следователно кръгът, който съответствува на някое направление $M\xi$, се слива нина и с кръга с радиус нула, който е сечение на повърхнината с допирателната равнина.

Забележки: 1. Ние оставихме настрана частните случаи $a=0$, $\lambda=a=0$ и $\lambda=b=0$, които могат лесно да се изтълкуват.

2. Наместо да извлечем от (3) развитието (4), бихме могли да извлечем от (2) едно развитие

$$Y=A_2x^2+A_3x^3+\cdots$$

Коефициентите A_i се добиват чрез отъждествяване и се намират пак същите резултати.

Darboux, Bulletin des Sciences mathématiques 2e serie, t. IV, 1880 (p. 348—?84).

§ 22. Обвивки на повърхнини

Основни указания

Обвивката се дава със следните уравнения:

a) $F(x, y, z, \alpha) = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0.$

b) $F(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \alpha} = 0, \quad \dfrac{\partial F}{\partial \beta} = 0.$

1. Диференцираме (1) по параметъра φ:

$$0 = -\frac{x}{a}\sin\varphi + \frac{y}{b}\cos\varphi. \tag{2}$$

От (1) и (2) елиминираме φ:

$$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

Това е асимптотичният конус на един хиперболоид с две повърхнини. Следователно (1) е асимптотична равнина на този хиперболоид.

2. 1°. Равнината, уравнението на която може да се напише във вида

$$(ax - y) + b(z - a^2) = 0,$$

минава винаги през правата D:

$$ax - y = 0, \quad z - a^2 = 0.$$

Тази права е обвивка на дадената равнина.

2°. Като елиминираме a от уравнението на равнината и неговата производна спрямо a, получаваме уравнението на обвивката:

$$x^2 - 4b(y - bz) = 0.$$

3°. От елиминацията между уравнението на равнината и нейните производни спрямо a и b:

$$x - 2ab = 0, \quad z - a^2 = 0,$$

получаваме

$$z = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Това уравнение представлява коноид S, сеченията на който с равнините $z = h$ са правите

$$y = \pm x\sqrt{h},$$

които се пресичат в двойната права Oz. Лесно е да се види също, че този коноид може да се разглежда или като геометрично място на правата D, когато a варира, или като обвивка на цилиндъра C, когато b варира.

4°. Уравнението на равнината може да се напише във вида

$$kbx - b^3y + b^4z - k^2 = 0.$$

В този случай обвивката на тази равнина е една развиваема повърхнина. Ръбът на възвръщането на тази повърхнина е определен от уравнението на равнината и нейните две първи производни по отношение на b:

$$kx - 3b^2y + 4b^3z = 0,$$
$$-6by + 12b^2z = 0.$$

Параметричните уравнения на този ръб са

$$x = \frac{2k}{b}, \quad y = \frac{2k^2}{b^3}, \quad z = \frac{k^2}{b^4}.$$

Геометричното място на ръба на възвръщането, когато k варира, е точно коноидът S.

3. Вземаме уравнението на равнината във вида

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

гдето между a, b и c трябва да съществува връзката

$$abc = k.$$

Обвивката е повърхнината от трета степен

$$xyz = \frac{k}{27}.$$

4. $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\dfrac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\dfrac{z}{c}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1.$

5. Уравнението на сферата е

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by = 0,$$

гдето между a и b съществува зависимостта

$$b^2 - 2ap - p^2 = 0.$$

Като изразим a посредством b, уравнението на сферата добива вида

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{b^2 - p^2}{p}x - 2by = 0. \tag{1}$$

Характеристиката се дава с това уравнение и неговата производна по b:

$$bx + py = 0, \tag{2}$$

което представлява една равнина, минаваща през оста z. Следователно характеристиката е една окръжност.

Центърът на тази окръжност е прободът на предната равнина и нейния диаметър спрямо сферата, представен с уравненията

$$\frac{F'_x}{b}=\frac{F'_y}{p}=\frac{F'_z}{0},$$

които дават

$$z=0,\quad 2px+p^2=2by-b^2.$$

Като елиминираме b от (1) и (2), получаваме обвивката на фамилията сфери:

$$x(x^2+y^2+z^2)+p(x^2+y^2)=0.$$

6. Уравнението на полярата е

$$x\xi+y\eta+z\zeta-r^2=0,$$

гдето ξ, η, ζ са координатите на точката M; те удовлетворяват уравнението

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1=0.$$

Обвивката е триосният елипсоид

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=r^4.$$

7. Уравнението на оскулачната равнина е

(1) $$3t^2x-3ty+z-t^3=0.$$

Като диференцираме това уравнение по t, получаваме

(2) $$6tx-3y-3t^2=0.$$

По-просто елиминацията извършваме така: написваме (1) във вида

$$(6tx-3y-3t^2)\frac{t}{3}+(t^2x-2ty+z)=0.$$

Ясно е, че елиминацията на t трябва да извършим от двете уравнения

$$t^2-2tx+y=0,$$
$$t^2x-2ty+z=0.$$

Като се приложат познатите методи, получаваме търсената обвивка

$$(xy-z)^2-4(x^2-y)(y^2-xz)=0,$$

която представлява същевременно геометричното място на тангентите на кубичната крива.

8. Нека дадените параболи са представени със следните уравнения:

$$z=0,\quad y^2=2px \quad \text{и} \quad y=0,\quad z^2=2qx.$$

Двете тангенти

$$y\eta-p(\xi+x)=0,\quad z_1\zeta-q(\xi+x_1)=0$$

са в една и съща равнина, ако $x=x_1$. Една обща допирателна равнина е

$$\sqrt{\frac{2x}{p}}\,\eta+\sqrt{\frac{2x}{q}}\,\zeta=\xi+x,$$

или като сменим знаците пред радикалите, получаваме четири равнини, които минават през всяка точка от оста ξ. Обвивката ще получим, като изразим че уравнението по x

$$2x\left(\frac{\eta}{\sqrt{p}}+\frac{\zeta}{\sqrt{q}}\right)^2=(\xi+x)^2$$

има двоен корен. Решението

$$\frac{\eta}{\sqrt{p}}+\frac{\zeta}{\sqrt{q}}=0$$

не отговаря на нашето изискване, въпреки че за всяка точка (ξ, η, ζ) от тази равнина двете стойности на x са равни, обаче сливащите се равнини не са допирателни към тази равнинна повърхнина, затова тя не е обвивка.

Обвивката е представена с цилиндрите

$$\left(\frac{\eta}{\sqrt{p}}\pm\frac{\zeta}{\sqrt{q}}\right)^2=2\xi,$$

които минават през двете параболи.

9. Параболоидът

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x, \qquad p>q>0,$$

сече равнината

$$x=a+z\sqrt{\frac{p-q}{q}}$$

в кръг.

Центърът на кръга е върху диаметъра

$$y=0,\quad z=\sqrt{q(p-q)},$$

т. е. $x=a+p-q$. Този кръг минава през точката

$$x=a,\quad z=0,\quad y=\sqrt{2ap}.$$

Сферата, която има този кръг за голям кръг, е

$$x^2+y^2+z^2-2x(a+p-q)-2z\sqrt{q(p-q)}=2aq-a^2.$$

Уравнението на обвивката добиваме, като изразим, че уравнението по a има двоен корен:

$$x^2+y^2+z^2-2(p-q)x-2\sqrt{q(p-q)}z=(x-q)^2.$$

Ако вземем двете системи от кръгове, като сменим знаците на корените, ще получим двата елиптични параболоида

$$y^2+(z\pm\sqrt{q(p-q)})^2=p(2x+q).$$

10. Двете равнини

$$x=h\pm z\frac{a}{c}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{b^2-a^2}},$$

където h варира, пресичат елипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

в два равни симетрични кръга. Сферата, която минава през тези два кръга, е

$$\frac{x^2+y^2+z^2-b^2}{a^2-b^2}a^2+h^2-2hx=0.$$

Обвивката е ротационният елипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1.$$

Други две равнини, в които лежат също два кръга, са

$$z=h\pm x\frac{c}{a}\sqrt{\frac{b^2-a^2}{c^2-b^2}}.$$

За тях обвивката е елипсоидът

$$\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2+y^2}{b^2}=1.$$

11. Нека уравненията на параболоида и сферата са

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x,$$

$$(x-a)^2+y^2+z^2=r^2.$$

Полярната равнина е

$$\frac{y}{p}\eta+\frac{z}{q}\zeta=\xi+x.$$

Търсената обвивка е хиперболоидът

$$\left(\frac{\xi+a}{r}\right)^2-\frac{\eta^2}{p^2}-\frac{\zeta^2}{q^2}=1.$$

12. Нека конусът е

$$x^2+y^2=h^2z^2.$$

Тогава фамилията равнини, успоредни на оста y, които отсичат от конуса постоянен обем, е

$$x=az-c\sqrt{a^2-h^2},$$

където a е променлив параметър. Оттук е лесно да се намери, че търсената обвивка е хиперболоидът

$$h^2z^2-x^2-y^2=c^2h^2.$$

13. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{1}{3}.$

14. Уравнението на сферата е

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=r^2,$$

където

$$\alpha^2+\beta^2=c^2=\text{const}.$$

Като образуваме функцията

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2-r^2-\lambda(\alpha^2+\beta^2-c^2)$$

и приравним към нула частните производни по α и β, получаваме

$$\lambda\alpha+x-\alpha=0,\quad \lambda\beta+y-\beta=0,$$

отгдето

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}.$$

Следователно

$$\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha x+\beta y}{c^2}=\pm\frac{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}{c}.$$

Оттук извеждаме уравнението на търсената обвивка:

$$\left[c\pm(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\right]^2=r^2-z^2,$$

което представлява повърхнината *торус (тор)*.

15. Уравнението на допирателната равнина е

$$\frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1,$$

гдето между x, y, z съществуват зависимостите

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad lx+my+nz=p.$$

Като си образуваме функцията

$$lx+my+nz+\mu\left(\frac{x}{a^2}\xi+\frac{y}{b^2}\eta+\frac{z}{c^2}\zeta\right)+\frac{\lambda}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)$$

и приравним към нула частните ѝ производни по x, y и z, получаваме

$$\lambda\frac{x}{a^2}+\mu\frac{\xi}{a^2}+l=0,$$

$$\lambda\frac{y}{b^2}+\mu\frac{\eta}{b^2}+m=0,$$

$$\lambda\frac{z}{c^2}+\mu\frac{\zeta}{c^2}+n=0.$$

Тези равенства умножаваме съответно с x, y и z и събираме:

$$\lambda+\mu+p=0.$$

Оттук извеждаме

$$\mu(\xi-x)=px-a^2l,$$

$$\mu(\eta-y)=py-b^2m,$$

$$\mu(\zeta-z)=pz-c^2n,$$

отгдето

(1) $$\frac{\xi-x}{px-a^2l}=\frac{\eta-y}{py-b^2m}=\frac{\zeta-z}{pz-c^2n}=k.$$

От свойствата на пропорцията намираме, че, от една страна,

$$k=\frac{\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1}{p-(l\xi+m\eta+n\zeta)},$$

а от друга —

$$k=\frac{p-(l\xi+m\eta+n\zeta)}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-p^2}.$$

Като приравним двете стойности на k, получаваме уравнението на обвивката

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=\frac{(lx+my+nz-p)^2}{a^2l^2+b^2m^2+c^2n^2-p^2}.$$

16. Ако означим с λ и μ два помощни множителя, условията на задачата дават

(1) $$\lambda x=\mu l+\frac{l}{p^2-a^2},$$

(2) $$\lambda y=\mu m+\frac{m}{p^2-b^2},$$

(3) $$\lambda z=\mu n+\frac{n}{p^2-c^2},$$

(4) $$\lambda=p\left[\frac{l^2}{(p^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(p^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(p^2-c^2)^2}\right].$$

От (1), (2) и (3) извеждаме

$$\lambda p=\mu,$$

$$\lambda(x^2+y^2+z^2)=\lambda r^2-\mu p+\frac{lx}{p^2-a^2}+\frac{my}{p^2-b^2}+\frac{nz}{p^2-c^2}.$$

Като повдигнем в квадрат (1), (2) и (3) и съберем, получаваме

$$\lambda^2r^2=\mu^2+\frac{l^2}{(p^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(p^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(p^2-c^2)^2}.$$

Оттук добиваме

$$\lambda^2(r^2-p^2)=\frac{l^2}{(p^2-a^2)^2}+\frac{m^2}{(p^2-b^2)^2}+\frac{n^2}{(p^2-c^2)^2}=\frac{\lambda}{p}$$

и следователно

$$\lambda=\frac{1}{p(r^2-p^2)}, \quad \mu=\frac{1}{r^2-p^2}.$$

Като заместим тези стойности в (1), (2) и (3), намираме

$$\frac{x}{r^2-a^2}=\frac{pl}{p^2-a^2},$$

$$\frac{y}{r^2-b^2}=\frac{pm}{p^2-b^2},$$

$$\frac{z}{r^2-c^2}=\frac{pn}{p^2-c^2}.$$

Чрез умножение на тези равенства съответно с x, y, z и събиране получаваме

$$\frac{x^2}{r^2-a^2}+\frac{y^2}{r^2-b^2}+\frac{z^2}{r^2-c^2}=1.$$

Това е уравнението на *повърхнината на светлинната вълна*, която се разпространява в кристална среда. От това уравнение, като извадим почленно тъждеството

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=1,$$

намираме

$$\frac{a^2x^2}{r^2-a^2}+\frac{b^2y^2}{r^2-b^2}+\frac{c^2z^2}{r^2-c^2}=0.$$

Тази форма на повърхнината е дадена от Fresnel.

17. Ако уравненията на сферите са

$$x^2+y^2+z^2=r^2,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2,$$

то уравнението на общата допирателна равнина е

$$x\xi+y\eta+z\zeta=r^2,$$

отгдето

$$ax+by+cz=r(r\pm R),$$
$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Тогава търсената обвивка представлява два конуса, дадени с

$$(x^2+y^2+z^2-r^2)\,[a^2+b^2+c^2-(r\pm R)^2]=[ax+by+cz-r(r\pm R)]^2.$$

Този резултат можеше да се предвиди.

18. Геометричното място на точки от една сфера, на които сумата от разстоянията им до две фиксирани точки, взети също върху сферата, е постоянна величина 2α, се нарича *сферична елипса*. Уравнението на тази крива се дава от

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ \dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}x^2+\dfrac{\cos^2\gamma}{\cos^2\alpha}y^2=r^2, \end{cases}$$

гдето 2γ е разстоянието между двете произволни фиксирани точки, или още от

$$\text{(1)}\qquad \begin{cases} x^2+y^2+z^2=r^2, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \end{cases}$$

гдето

$$a^2=r^2\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\gamma},\quad b^2=r^2\frac{\cos^2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\gamma},\quad c^2=r^2\cos^2\alpha.$$

Уравнението на нормалната равнина е

$$a^2(b^2-c^2)\frac{\xi}{x}+b^2(c^2-a^2)\frac{\eta}{y}+c^2(a^2-b^2)\frac{\zeta}{z}=0,$$

гдето между x, y, z съществуват зависимостите (1).

Търсената обвивка е коничната повърхнина

$$\left(\frac{\xi}{A}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\eta}{B}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\zeta}{C}\right)^{\frac{2}{3}}=0,$$

гдето

$$\frac{1}{A}=a(b^2-c^2)(r^2-a^2)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{1}{B}=b(c^2-a^2)(r^2-b^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\frac{1}{C}=c(a^2-b^2)(r^2-c^2)^{\frac{1}{2}}.$$