Определени интеграли - 5

Несобствени интеграли (от I и II род)

Нека е дадена функция $f(x)$, дефинирана и непрекъсната в $[a,b]$.

1. **Определение:** под несобствен интеграл $J=\int_a^b f(x)\,dx$ се разбира границата (ако тя съществува)

$$J=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\substack{\beta\to b\\ \beta<b}}\int_a^\beta f(x)\,dx.$$

При това:

а) ако J съществува, то интегралът е сходящ, а

б) ако J не съществува, то интегралът е разходящ.

Несобственият интеграл е:

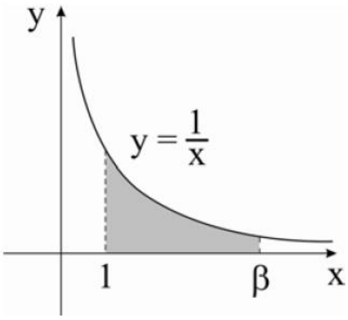
☞ от I род, когато $b=\infty$,

☞ от II род, когато $b<\infty$.

Пример 1. (несобствен интеграл от I род)

$$J=\int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

$$J=\int_1^\infty \frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x}=\lim_{\beta\to\infty}\ln|x|\,\Big|_1^\beta=\lim_{\beta\to\infty}(\ln\beta-\ln 1)=\lim_{\beta\to\infty}\ln\beta=\infty$$



Следователно този несобствен интеграл **не съществува** (интегралът е разходящ).

$$\Big(\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=\infty\quad\Rightarrow\quad S=\infty\Big)$$

Пример 2. (несобствен интеграл от I род)

$$J=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$$

$$J=\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\int_1^\beta \frac{dx}{x^2}=\lim_{\beta\to\infty}\left.\frac{x^{-2+1}}{(-2+1)}\right|_1^\beta=-\lim_{\beta\to\infty}\left.\frac{1}{x}\right|_1^\beta=$$

$$=-\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{1}\right)=-(0-1)=1 \qquad \text{понеже } \lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}=0$$

В този случай интегралът е сходящ, понеже подинтегралната функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ много бързо клони към нула при $x\to\infty$.

Пример 3. (несобствен интеграл от II род)

$$\boxed{J=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}}$$

очевидно $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$ и $f(2)=\infty$.

$$J=\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\int_1^\beta \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\int_1^\beta \frac{dx}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\int_1^\beta (2-x)^{-1/2}\,d(-x+2)$$

$$=-\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\left.\frac{1}{(-1/2+1)}(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}\right|_1^\beta=-2\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\left.\sqrt{2-x}\right|_1^\beta$$

$$=-2\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\left(\sqrt{2-\beta}-\sqrt{2-1}\right)=$$

$$=-2\left(\sqrt{2-\lim_{\substack{\beta\to2\\ \beta<2}}\beta}\;-1\right)=-2.(\sqrt{2-2}-1)=-2.(0-1)=2$$

Пресмятане по формулата на Нютон – Лайбниц

ако $F(x)$ е примитивната функция на подинтегралната функция $f(x)$ в интервала $[a,b]$, то интегралът

$$\boxed{J=\int_a^\infty f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^\infty=F(\infty)-F(a)}.$$

Под $F(\infty)$ тук разбираме $\lim_{\beta\to\infty}F(\beta)\equiv\lim_{x\to\infty}F(x)$.

Пример 4.

$$J=\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{dx}{3+x^2}$$

Очевидно е че $f(x)=\dfrac{1}{(\sqrt{3})^2+x^2}$ и $f(b)=\infty$ при $b=\infty$

Примитивната функция е: $F(x)=\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a}$

като в дадения случай $a=\sqrt{3}$, следователно

$$J=\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{dx}{3+x^2}=F(x)\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\,\infty-arctg\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}(arctg\,\infty-arctg\,1)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{4}\equiv\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

$tg\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}=\dfrac{1}{0}=\infty$ от където следва, че $arctg\,\infty=\dfrac{\pi}{2}$

Пример 5.

$$J=\int_{2}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-2}}$ има особеност в точка $\boldsymbol{x}$ **= 2**

$$f(2)=\frac{1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Правим полагането $x=t-\dfrac{b}{2a}=t-\dfrac{(-1)}{2.1}=t+\dfrac{1}{2}$, като очевидно $dx=dt$

- при $x = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = \alpha + \frac{1}{2}$, т.е. $4 = 2\alpha + 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}$

- при $x = 4 \quad \rightarrow \quad 4 = \beta + \frac{1}{2}$, т.е. $8 = 2\beta + 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{7}{2}$

Така след смяната на променливите имаме

$$J = \int_{2}^{4} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 2}} = \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right) - 2}}$$

$$= \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 2.\frac{1}{2}t + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - t - \frac{1}{2} - 2}}$$

$$= \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2}} = \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{8}{4}}}$$

$$= \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \frac{9}{4}}} = \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}, \text{ т.е. } \qquad J = \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}}$$

използваме, че

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right|$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{dx}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} =$$

$$= \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \ln\left| \frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1} \right| = \ln\left| \frac{x}{a} + \frac{1}{a}\sqrt{x^2 \pm a^2} \right| = \ln\left| \frac{1}{a}\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right) \right|$$

$$= \ln\left(\frac{1}{|a|}\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right|\right)$$

В „нашия” интеграл $a = \dfrac{3}{2}$, и следователно

$$J = \int_{3/2}^{7/2} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}} = \ln\left(\frac{2}{3}\left| x + \sqrt{x^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \right|\right)\Bigg|_{3/2}^{7/2} =$$

$$= \ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\right] - \ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}\right)\right] =$$

$$= \ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2} + \sqrt{\frac{49-9}{4}}\right)\right] - \ln\left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} + 0\right)\right] = \ln\left[\frac{1}{3}\left(7 + 2\sqrt{10}\right)\right] - \ln 1 =$$

$$= \ln\left(\frac{7 + 2\sqrt{10}}{3}\right)$$

Задачи за самостоятелна работа

Зад 1.

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{arctg\, x}{1+x^2}dx \qquad -\frac{\pi^2}{8}$$

Зад 2.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\,.\sqrt[3]{\ln(x)}} \qquad \frac{3}{2}$$

Зад 3.

$$J = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x + x^3} \qquad \ln\sqrt{2}$$